TD 11

Exo 7.11 X v.a. réelle et Y v.a. de loi $\mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}(Y=-1)=\frac{1}{2}$ indép. de X.
On définit $Z = X\cdot Y$. $M_Z(t) := \mathbb{E}(e^{tZ})$

Solution : $M_Z(t) = \mathbb{E}(e^{tZ}) = \mathbb{E}(e^{tXY}) = \mathbb{E}(e^{tXY}\cdot(\mathbb{1}_{\{Y=+1\}} + \mathbb{1}_{\{Y=-1\}}))$

$$\overset{\text{linéarité}}{=} \mathbb{E}(e^{tXY}\cdot\mathbb{1}_{\{Y=1\}}) + \mathbb{E}(e^{tXY}\cdot\mathbb{1}_{\{Y=-1\}})$$

$$= \mathbb{E}(e^{tX}\cdot\mathbb{1}_{\{Y=1\}}) + \mathbb{E}(e^{-tX}\cdot\mathbb{1}_{\{Y=-1\}})$$

$$\overset{\text{indép.}}{=} \mathbb{E}(e^{tX})\,\mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{1}_{\{Y=1\}}}_{\sim \text{Bern}(\frac{1}{2})}) + \mathbb{E}(e^{-tX})\cdot\mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{1}_{\{Y=-1\}}}_{\sim \text{Bern}(\frac{1}{2})})$$

$$= M_X(t)\cdot\frac{1}{2} + M_X(-t)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(M_X(t)+M_X(-t))$$

□

À 9h30 : l'exo 8.3.

Exo 8.3 $U \sim \text{Unif}(]0,1[)$

a) $n\in\mathbb{N}^*$. $\lfloor nU \rfloor$ est unif sur $\{0,1,\dots,n-1\}$.

Solution : Obs: $\{0,1,\dots,n-1\}$ est l'image de $\lfloor nU\rfloor$.

$$\mathbb{P}(\lfloor nU\rfloor = k) = \mathbb{P}(nU\in[k,k+1[)$$

$$= \mathbb{P}(U\in[\tfrac{k}{n},\tfrac{k+1}{n}[)$$

$$= \int_{k/n}^{(k+1)/n} f_U(x)\,dx$$

$$= \int_{k/n}^{(k+1)/n} \mathbb{1}_{]0,1[}(x)\,dx$$

$$= \int_{k/n}^{(k+1)/n} 1\cdot dx = \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \quad \forall k\in\{0,1,\dots,n-1\}.$$

Donc $\lfloor nU\rfloor$ unif. sur $\{0,1,\dots,n-1\}$.

b) La loi de $-\frac{1}{a}\ln(U)$ pour $a>0$.

Solution : Obs : si $\ln(]0,1[) =]-\infty,0[$ donc $-\frac{1}{a}\ln(]0,1[) =]0,+\infty[$.

Méthode 1 : la fonction de répartition.

$$F(t) := \mathbb{P}\left(-\frac{1}{a}\ln(U) \leq t\right) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \mathbb{P}(\ln(U) \geq -a\cdot t) & t>0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & t\leq 0 \\ \mathbb{P}(U \geq e^{-at}) & t>0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \int_{\underset{0<\ \ <1}{e^{-at}}}^{1} \mathbb{1}_{]0,1[}(x)\,dx & t>0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & t\leq 0 \\ 1-e^{-at} & t>0 \end{cases}$$

Donc c'est une v.a. exponentielle de paramètre a.

Méthode 2 : Rappel : Si X est une v.a. et $\exists f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ t.q. $\forall h : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cont. bornée on a $\mathbb{E}(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\cdot f(x)\,dx$

alors X est une v.a. à densité f.

Donc on prend $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et bornée et

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{à densité} \\ \mathbb{1}_{]0,1[}}}{\mathbb{E}\left(h\left(-\frac{1}{a}\ln(U)\right)\right)} \underset{\text{FdT pour } U}{=} \int_{-\infty}^{\infty} h\left(-\frac{1}{a}\ln(x)\right)\cdot \mathbb{1}_{]0,1[}(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 h\left(-\frac{1}{a}\ln(x)\right)dx.$$

Changement de var.

$y = -\frac{1}{a}\ln(x)$ $\quad x = e^{-a\cdot y}$

$dx \rightsquigarrow \frac{dx}{dy}dy = -a e^{-a\cdot y}\,dy$.

bornes : $x=0 \rightsquigarrow y=+\infty$

$x = 1 \rightsquigarrow y = 0$

$$= -\int_0^{+\infty} h(y)\cdot -a e^{-a\cdot y}\,dy$$

$$= \int_0^{+\infty} h(y)\cdot a\cdot e^{-ay}\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\cdot a\cdot e^{-ay}\cdot \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)\,dy$$

Donc $-\frac{1}{a}\ln(U)$ est à densité

$$f_{-\frac{1}{a}\ln(U)}(y) = a\cdot e^{-ay}\cdot \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$$

Donc $-\frac{1}{a}\ln(U)$ est exponentielle de param. a.

À 10^h15 : l'ao 8.5.

Exo 8.5 X v.a. à densité f_X.

Déterminer les densités de

a) $\alpha X + \beta \quad \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}$.

Solution: $Y = \alpha X + \beta$

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(\alpha X + \beta \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \tfrac{1}{\alpha}(t-\beta)\right) = F_X\left(\tfrac{1}{\alpha}(t-\beta)\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{1}{\alpha}(t-\beta)} f_X(y)\, dy = \int_{-\infty}^{t} f_X\left(\tfrac{1}{\alpha}(x-\beta)\right) \cdot \tfrac{1}{\alpha}\, dx$$

Changement de var.

$y = \frac{1}{\alpha}(x-\beta)$

bornes: $y = -\infty \rightsquigarrow x = -\infty$

$y = \frac{1}{\alpha}(t-\beta) \rightsquigarrow x = t$

$dy = \frac{dy}{dx}\, dx = \frac{1}{\alpha}\, dx$

Donc $f_Y(x) = \frac{1}{\alpha} f_X\left(\frac{1}{\alpha}(x-\beta)\right)$

b) $Y = e^X$

Solution: $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée

$$\mathbb{E}(h(Y)) = \mathbb{E}(h(e^X)) \overset{\text{Fdt}_X \text{ pour}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} h(e^x)\, f_X(x)\, dx$$

Changement de var.

$y = e^x \quad x = \ln(y)$

bornes: $x = -\infty \rightsquigarrow y = 0$

$x = \infty \rightsquigarrow y = \infty$

$dx = \frac{dx}{dy}\, dy = \frac{1}{y}\, dy$

$$= \int_0^{\infty} h(y)\, f_X(\ln(y)) \cdot \frac{1}{y}\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(y)\, f_X(\ln(y)) \cdot \frac{1}{y} \cdot \mathbb{1}_{]0,\infty[}(y)\, dy.$$

Donc $f_Y(y) = f_X(\ln(y)) \cdot \frac{1}{y} \cdot \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$

est la densité de Y.

le reste : la prochaine fois.