TD 11

Rappel : Une v.a. réelle $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une v.a. à densité s'il existe une fonction $f_X : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ intégrable sur $\mathbb{R}$ t.q.

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Donc, par ex. si X est une v.a. à densité :

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx \Rightarrow \mathbb{P}(X = a) = \int_a^a f_X(x)\,dx = 0 .$$

Exo 2.5 (continuation)

X v.a. réelle à densité f_X. Trouver les densités de :

a) $\alpha X + \beta = Y$ $\alpha > 0$ $\beta \in \mathbb{R}$. Solution : $f_Y(y) = \frac{1}{\alpha} f_X\left(\frac{1}{\alpha}(y - \beta)\right)$

b) $e^X = Y$. Solution : $f_Y(y) = \frac{1}{y} f_X(\ln(y)) \cdot \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$.

} la dernière fois.

c) $Y = X^2$.

Solution : On a

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(X^2 \leq t)$$

Obs : si $t < 0$ alors $F_Y(t) = 0$

Si $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} F_Y(t) = \mathbb{P}(X^2 \leq t) &= \mathbb{P}(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) \\ &= \mathbb{P}(X \leq \sqrt{t}) - \mathbb{P}(X < -\sqrt{t}) \\ &\underset{X \text{ à densité}}{=} \mathbb{P}(X \leq \sqrt{t}) - \mathbb{P}(X \leq -\sqrt{t}) \\ &= F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t}) \\ &= \int_{-\infty}^{\sqrt{t}} f_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^{-\sqrt{t}} f_X(x)\,dx \\ &= \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} f_X(x)\,dx \\ &= \int_0^{\sqrt{t}} f_X(x)\,dx + \int_{-\sqrt{t}}^{0} f_X(x)\,dx . \end{aligned}$$

Changement de variables

1ère intégrale :

$x = \sqrt{y}$

bornes : $x = 0 \rightsquigarrow y = 0$

$x = \sqrt{t} \rightsquigarrow y = t$

$dx = \frac{dx}{dy} dy = \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$

2ème

$x = -\sqrt{y}$

$x = 0 \rightsquigarrow y = 0$

$x = -\sqrt{t} \rightsquigarrow y = t$

$dx = \frac{dx}{dy} = - \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$

Donc :

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \int_0^t f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy - \int_t^0 f_X(-\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy \\ &= \int_0^t \left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right) \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy \\ &= \int_{-\infty}^t \left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)\,dy \end{aligned}$$

Donc : $Y = X^2$ est une v.a. à densité $f_Y(y) = \left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$

d) $Y = |X|$.

Solution: Rappel: S'il existe une fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.q. pour toute $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et continue : $\mathbb{E}(h(Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f(x)\, dx$ (Formule de transfert)

alors Y est une v.a. à densité f.

On prend $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée

$$\mathbb{E}(h(Y)) = \mathbb{E}(h(|X|)) \overset{\substack{\text{FdT} \\ \text{pour } X}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} h(|x|) \cdot f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} h(-x)\, f_X(x)\,dx + \int_0^{\infty} h(x)\, f_X(x)\, dx$$

Changement de var. pour la 1ère intégrale:

$y = -x$

bornes: $x = 0 \rightsquigarrow y = 0$
$x = -\infty \rightsquigarrow y = \infty$.

$dx \rightsquigarrow \frac{dx}{dy} dy = -dy$

$$= \int_0^{\infty} h(y) \cdot f_X(-y)\, dy + \int_0^{\infty} h(y) f_X(y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(y) \cdot (f_X(y) + f_X(-y)) \cdot \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)\, dy$$

Donc: Y est à densité $f_Y(y) = (f_X(y) + f_X(-y)) \cdot \mathbb{1}_{]0,\infty[}(y)$.

À 11^h50 : l'exo 8.8.

Exo 8.8

$X \sim N(0,1)$

a) Calculer $M_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Solution: Rappel: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

Donc: $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2 - 2tx}{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-t)^2 - t^2}{2}}\, dx$$

$$= \frac{e^{t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-t)^2/2}\, dx$$

Changement de var.

$y = x - t$

bornes: ne changent pas

$dx \rightsquigarrow \frac{dx}{dy} dy = dy$

$$= \frac{e^{t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy$$

$$= e^{t^2/2}$$

b) En déduire $\mathbb{E}(X^k)$, $\forall k \geq 0$.

Solution: développer $M_X(t)$ en série entière:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx)^k}{k!} f_X(x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)\, dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbb{E}(X^k)$$

$$M_X(t) = e^{t^2/2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\, 2^m} t^{2m}$$

Unicité de séries entières $\Rightarrow$ les coëfficients dans les deux séries sont égaux.

Donc: si k est impaire : $\mathbb{E}(X^k) = 0$.

si $k = 2m$ est paire : $\frac{1}{(2m)!} \mathbb{E}(X^{2m}) = \frac{1}{m!\, 2^m}$ donc: $\mathbb{E}(X^{2m}) = \frac{(2m)!}{2^m m!}$

c) $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

i) Quelle est la loi de $\frac{1}{\sigma}(Y-\mu)$?

ii) En déduire M_Y.

Solution : i) h continue et bornée

$$\mathbb{E}\left(h\left(\frac{1}{\sigma}(Y-\mu)\right)\right) \overset{\text{FdT pour } Y}{=} \int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{1}{\sigma}(y-\mu)\right) \cdot \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}}^{f_Y(y)} dy$$

Changement de var.

$x = \frac{1}{\sigma}(y-\mu)$

bornes ne changent pas

$dy = \frac{dy}{dx} dx = \sigma . dx$

$y = \sigma x + \mu$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(\sigma x)^2/2\sigma^2} \cdot \sigma \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

Donc $\frac{1}{\sigma}(Y-\mu) \sim N(0,1)$.

ii) Si on pose $X = \frac{1}{\sigma}(Y-\mu)$ alors $X \sim N(0,1)$

Donc $e^{t^2/2} = M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \mathbb{E}\left(e^{t \cdot \frac{1}{\sigma}(Y-\mu)}\right)$

$$= \mathbb{E}\left(e^{-\mu t/\sigma} \cdot e^{tY/\sigma}\right) = e^{-\mu t/\sigma} \, \mathbb{E}\left(e^{tY/\sigma}\right)$$

$$= e^{-\mu t/\sigma} \cdot M_Y(t/\sigma)$$

Donc si on met $t' = t/\sigma$ alors :

$$M_Y(t') \cdot e^{-\mu t'} = M_X(t' \cdot \sigma) = e^{(t'\sigma)^2/2}$$

donc : $M_Y(t') = e^{(t'\sigma)^2/2 + \mu t'}$

l'exo 8.11 : la prochaine fois.