TD 11 Attention : prochaine séance de TD : vendredi à 14^h15.

Exo 9.7 Soit X une v.a. réelle positive, de densité $f(x)$, $U \sim \mathcal{U}(]0,1[)$ indép de X. Déterminer la loi de Y. Donner f_Y si $X \sim \mathcal{U}(]0,1[)$.

Solution : On prend $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, bornée. (On cherche : $\mathbb{E}(h(Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) \cdot f_Y(y)\, dy$)

$$\mathbb{E}(h(Y)) = \mathbb{E}(h(U \cdot X))$$

Obs : (U, X) est de densité $\mathbb{1}_{]0,1[}(u) \cdot f(x) \cdot \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$ (indép.)

$$\overset{\text{FdT pour } (U,X)}{=} \int_0^{\infty}\int_0^1 h(ux) \cdot f(x)\, du\, dx$$

Changement de var. pour $\int_0^1 h(ux)\, du$:

$y = u \cdot x \qquad u = \frac{1}{x} y$

bornes : $0 \rightsquigarrow 0$, $1 \rightsquigarrow x$

$du \rightsquigarrow \frac{du}{dy} dy = \frac{1}{x} dy$

Donc :

$$\mathbb{E}(h(Y)) = \int_0^{\infty} \int_0^{x} h(y) \cdot \frac{1}{x} f(x)\, dy\, dx$$

$$= \iint_{\{(x,y) \in]0,+\infty[^2 ;\ y \leq x\}} h(y)\, \frac{1}{x} f(x)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} h(y) \cdot \int_y^{\infty} \frac{1}{x} f(x)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(y) \cdot \underbrace{\left(\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y) \int_y^{\infty} \frac{1}{x} f(x)\, dx \right)}_{\text{densité } f_Y(y) \text{ de } Y.} dy$$

Donc Y est de densité $\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y) \int_y^{\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx$.

Si $X \sim \mathcal{U}(]0,1[)$ alors la densité de X est $f_X(x) = \mathbb{1}_{]0,1[}(x)$

donc $f(x) = \mathbb{1}_{]0,1[}(x)$.

Donc : $$f_Y(y) = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y) \cdot \int_y^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{]0,1[}(x)}{x}\, dx$$

$$= \mathbb{1}_{]0,1[}(y) \cdot \int_y^1 \frac{1}{x}\, dx = \mathbb{1}_{]0,1[}(y) \cdot [\ln(x)]_y^1$$

$$= -\ln(y) \cdot \mathbb{1}_{]0,1[}(y)$$

$\square$

À 11^h30 : l'exo 10.1.

Rappel :

Déf 6.7 : $(X_n)_{n\geq 0}$ suite de v.a. et X v.a. toutes définies sur la même esp. proba.

On dit que $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X si $\forall \varepsilon > 0$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Théorème : $(X_i)_{i\geq 0}$ suite de v.a. indép et identiquement distribués (toutes de même loi) (i.i.d.) et telles que $\mu = \mathbb{E}(X_i) < +\infty$.

on déf : $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors : $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 0$$

c-à-d $\overline{X}_n$ converge en proba vers μ.

Exo 10.1 : $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ v.a. indép. $X_i \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ $\forall i$.

On pose $W_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

Prouver que W_n converge en proba vers σ^2.

Solution : $(X_i^2)_{i\geq 1}$ est une suite de v.a. i.i.d.

Et $\mathbb{E}(X_i^2) = \mathrm{Var}(X_i) + \mathbb{E}(X_i)^2 = \mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 < +\infty$

Donc la loi des grands nombres s'applique.

Donc : $\overline{(X_n^2)} = W_n$ converge en proba vers σ^2 quand $n\to\infty$

$\square$

À 12h00 : l'exo 10.5.

Exo 10.5 $(X_n)_{n\geq 0}$ suite de v.a. réelles.

(a) On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = 1$ $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n^2) = 1$. Prouver que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 1$.

Solution : $\boxed{\text{But: } \mathbb{P}(|X_n - 1| > \varepsilon) \to 0.}$ On a : $|X_n - 1| \leq |X_n - \mathbb{E}(X_n)| + |\mathbb{E}(X_n) - 1|$ $(*)$

De plus : $\mathbb{P}\left(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \overset{\text{Bienaymé-Tchebychev}}{\leq} \dfrac{\mathrm{Var}(X_n)}{(\varepsilon/2)^2} = \dfrac{\mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)^2}{(\varepsilon/2)^2}$

Prenons $N\in\mathbb{N}$ t.q. $|\mathbb{E}(X_n) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n\geq N$.

Alors pour $n\geq N$: $\mathbb{P}(|X_n - 1| > \varepsilon) = \mathbb{P}\big(|X_n - 1| - |\mathbb{E}(X_n) - 1| > \overbrace{\varepsilon - |\mathbb{E}(X_n) - 1|}^{\geq \varepsilon/2}\big)$

$$\leq \mathbb{P}(|X_n - 1| - |\mathbb{E}(X_n) - 1| > \varepsilon/2) \overset{(*)}{\leq} \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| > \varepsilon/2)$$

$$\overset{BT}{\leq} \frac{\mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)^2}{(\varepsilon/2)^2} \xrightarrow[\varepsilon \text{ fixe}]{n\to+\infty} 0$$

Donc : $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - 1| > \varepsilon) = 0$.

Si $\varepsilon > \varepsilon'$:
$\mathbb{P}(|X_n - 1| - |\mathbb{E}(X_n) - 1| > \varepsilon)$
$\leq$
$\mathbb{P}(|X_n - 1| - |\mathbb{E}(X_n) - 1| > \varepsilon')$

(b): la prochaine fois.