TD8

Exo 1.4 $A_1, \dots, A_n \subseteq E$

a) $\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_i})$

Preuve: Obs: Si $A \subseteq E$ alors

$$\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$$

Preuve: on a: si $x \in E$

$$\mathbb{1}_{A^c}(x) = \begin{cases} 1 & x \in A^c \\ 0 & x \notin A^c \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin A \\ 0 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

$$1 - \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ 1 & x \notin A \end{cases} \qquad \square$$

Obs: $\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$

Donc: $\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = 1 - \mathbb{1}_{\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)^c}$

$$= 1 - \mathbb{1}_{\bigcap_{i=1}^n A_i^c}$$

Rappel (exo 1.3(b)):

Si $A, B \subseteq E$ alors $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$

en général on a

$$\mathbb{1}_{A_1 \cap \dots \cap A_n} = \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}$$

Donc: $\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i^c}$

$$= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_i})$$

$\square$

Solution alternative:

On a: si $x \in E$ alors:

$\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i}(x) = 1$ ssi $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ t.q. $x \in A_i$.

De plus, si $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ t.q. $x \in A_i$

alors $1 - \mathbb{1}_{A_i}(x) = 0$ donc $\prod (1 - \mathbb{1}_{A_i})(x) = 0$

donc $1 - \prod (1 - \mathbb{1}_{A_i})(x) = 1$

si $\nexists i \in \{1, \dots, n\}$ t.q. $x \in A_i$

alors $\prod (1 - \mathbb{1}_{A_i})(x) = 1$, donc $1 - \prod (1 - \mathbb{1}_{A_i})(x) = 0$ $\square$

b) Prouver que : $\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\{i_1,\dots,i_k\}\subset\{1,\dots,n\}} \mathbb{1}_{A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k}}$

Preuve :

Rappel : si $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

alors
$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\cdots(1+x_n)$$
$$= 1 + x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$
$$+ x_1x_2 + x_1x_3 + \dots$$
$$+ x_1x_2x_3 \dots$$
$$\vdots$$
$$+ x_1x_2\cdots x_n$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq\{1,\dots,n\}} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$$

Donc :
$$\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} \overset{(a)}{=} 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-\mathbb{1}_{A_i}) = 1 - \left[1 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq\{1,\dots,n\}} (-1)^k \, \mathbb{1}_{A_{i_1}} \cdot \mathbb{1}_{A_{i_2}} \cdots \mathbb{1}_{A_{i_k}}\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\{i_1,\dots,i_k\}\subset\{1,\dots,n\}} \overset{(-1)^k}{(-1)^{k-1}} \mathbb{1}_{A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k}} \qquad \square$$

À 9h30 l'exo 2.1

Exo 2.1 : On lance simultanément un dé à n faces et un dé à m faces, $m \leq n$

a) Espace proba ?

Sol : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Ω = univers = ensemble de résultats possibles
$$= \left\{ (i,j)\in\mathbb{N}^2 ; \begin{array}{l} 1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m \end{array} \right\} = \{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\}$$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ = ens. de parties de Ω.

$\mathbb{P}$ = la probabilité uniforme.

$A = \{(i,j)\in\Omega ; i\leq j\} = \bigcup_{k=1}^{m} \left\{(i,j)\in\Omega ; \begin{array}{l} i\leq j \\ j=k \end{array}\right\}$

(b) Quelle est la proba que le résultat du premier dé est inférieur (ou égal) au rés. du deuxième ?

Sol : l'événement est $A = \{(i,j)\in\Omega ; i\leq j\}$ et la proba est :

$\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega|$. On a : $|\Omega| = |\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\}| = m \cdot n$

On écrit $A = \bigcup_{k=1}^{m} A_k$, où $A_k = \{(i,j)\in A ; j=k\} = \{(i,k) ; 1\leq i\leq k\}$ $\;k\leq m\leq n$

disjointe

$$\Rightarrow |A| = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{|A_k|}_{k} = \sum_{k=1}^{m} k = \binom{m+1}{2} = \frac{m(m+1)}{2}. \text{ Donc } \mathbb{P}(A) = \frac{m(m+1)}{2m\cdot n} = \frac{m+1}{2n}.$$

$$= \frac{(m+1)!}{2!(m-1)!} = \frac{(m+1)m\cdot(m-1)!}{2\cdot(m-1)!} = \frac{(m+1)m}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{m} k = \binom{m}{2}$$

Preuve : m paire : $\sum_{k=1}^{m} k = 1 + 2 + 3 + \dots + m-2 + m-1 + m$

Obs : on a créé $\frac{m}{2}$ paires et toutes les paires ont somme $m+1$

Donc $\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m}{2}(m+1) = \binom{m+1}{2}$

m impaire : $\sum_{k=1}^{m} k = 1 + 2 + 3 + \dots + m-2 + m-1 + m$

$\frac{m-1}{2}$ paires de somme $m+1$.
et une terme au milieu de valeur $\frac{m+1}{2}$

Donc : $\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m-1}{2}(m+1) + \frac{m+1}{2}$

$$= \frac{((m-1)+1)(m+1)}{2}$$

$$= \binom{m+1}{2}. \qquad \square$$

À $10^h 30$: l'exo 2.7.

Exo 2.7 : $(A_k)_{k\geq 1}$ suite d'événements.

a) Si $\mathbb{P}(A_k) = 0 \ \forall k \geq 1$ alors $\mathbb{P}(\bigcup_{k\geq 1} A_k) = 0$

Preuve :
$$0 \leq \mathbb{P}(\bigcup_{k\geq 1} A_k) \overset{\text{sous-additivité}}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{k\geq 1} A_k) = 0.$$

b) Si $\mathbb{P}(A_k) = 1 \ \forall k \geq 1$ alors $\mathbb{P}(\bigcap_{k\geq 1} A_k) = 1$.

Preuve : On a
$$\mathbb{P}(\bigcap_{k\geq 1} A_k) = 1 - \mathbb{P}((\bigcap_{k\geq 1} A_k)^c)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\bigcup_{k\geq 1} A_k^c)$$

Et : $0 \leq \mathbb{P}(\bigcup_{k\geq 1} A_k^c) \leq \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(A_k^c) = \sum_{k\geq 1} \underbrace{1 - \mathbb{P}(A_k)}_{=0} = 0$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcap_{k\geq 1} A_k) = 1 - 0 = 1. \qquad \square$$

À 11^h20 : l'exo 2.8.

Exo 2.8. $A_1, \dots, A_n$ de événements d'un esp. proba. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Prouver que :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) \geq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j)$$

Preuve :

pour $n=2$: $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$

hérédité : $n \geq 2$:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\Big) = \mathbb{P}\Big(\Big(\bigcup_{k=1}^n A_k\Big) \cup A_{n+1}\Big)$$

$$= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^n A_k\Big) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\Big(A_{n+1} \cap \Big(\bigcup_{k=1}^n A_k\Big)\Big)$$

$$\overset{\text{hypothèse}}{\geq} \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) - \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^n (A_k \cap A_{n+1})\Big)$$

[Sous-additivité :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^n (A_k \cap A_{n+1})\Big) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k \cap A_{n+1})$$]

$$\geq \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) - \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k \cap A_{n+1})$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} \mathbb{P}(A_i \cap A_j)$$

À 12^h00 : l'exo 2.3.

Exo 2.3 : 52 cartes.
On choisit 5 cartes au hasard.

a) la proba de choisir au moins une paire.

Sol : C = l'ensemble de cartes $= \{1,2,3,4\} \times \{1,2,\dots,13\}$.

$$\Omega = \{T \subset C \,;\, |T| = 5\}.$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

$\mathbb{P}$ = la probabilité unif

donc $\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega| \quad \forall A \in \mathcal{F}$.

A^c = "on n'a aucune paire"

$= \{T \in \Omega \,;\, h \neq h' \ \forall \ (c,h), (c',h') \in T$ avec $(c,h) \neq (c',h')\}$

$$|A^c| = \binom{13}{5} \cdot 4^5$$

pour chaque hauteur il faut choisir un couleur.

choisir 5 hauteurs différentes

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{\binom{13}{5} \cdot 4^5}{\binom{52}{5}} \approx 0{,}4929\dots$$

Solution alternative :

$$|A^c| = \frac{52 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40 \cdot 36}{5!} = \frac{(13\cdot 4)\cdot(12\cdot 4)\cdot(11\cdot 4)\cdot(10\cdot 4)(9\cdot 4)}{5!}$$

$$= \frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{5!}\, 4^5 = \binom{13}{5}\cdot 4^5. \qquad \square$$

$$|A| = |\Omega| - |A^c| = \binom{52}{5} - \binom{13}{5}\cdot 4^5$$

Donc $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\binom{52}{5} - \binom{13}{5}\cdot 4^5}{\binom{52}{5}} = 1 - \dfrac{\binom{13}{5}\cdot 4^5}{\binom{52}{5}}$.

(b) la proba d'avoir exactement une paire.

B = "tirages avec exactement une paire".

$$|B| = \underbrace{13}_{\text{hauteur de la paire}} \cdot \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{couleurs des cartes dans la paire}} \cdot \underbrace{\binom{12}{3}}_{\text{hauteurs des cartes en dehors de la paire}} \cdot \underbrace{4^3}_{\text{couleurs pour les cartes en dehors de la paire}}$$

Donc $\mathbb{P}(B) = \dfrac{13\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{12}{3}\cdot 4^3}{\binom{52}{5}} \approx 0{,}4226\dots$

La semaine prochaine : l'exo 2.9.