TD 8

Exo 2.9 : Ω ensemble fini, notre univers (ensemble d'états possible du système)

$H : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction (Énergie)

$\beta \geq 0$ un paramètre fixé $\left(\beta = \frac{1}{k_B \cdot T} \quad \begin{array}{l} k_B = \text{cste} \\ T \ \text{temperature} \end{array} \right)$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. On définit une proba $\mathbb{P}_\beta$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ par ses valeurs sur les singletons :

$$\mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) = \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta \cdot H(\omega)} \quad \text{où } Z_\beta := \sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta \cdot H(\omega)}.$$

a) Vérifier que $\mathbb{P}_\beta$ est une proba.

Solution : $\mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) \geq 0 \ \forall \omega \in \Omega$.

$$\mathbb{P}_\beta(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}_\beta(\{\omega\})$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{Z_\beta} \cdot e^{-\beta \cdot H(\omega)}$$

$$= \frac{1}{\sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta \cdot H(\omega)}} \sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta \cdot H(\omega)}$$

$$= 1.$$

b) Si $\beta = 0$, $\mathbb{P}_\beta$ est la probabilité uniforme.

Solution : $Z_0 = \sum_{\omega \in \Omega} \underbrace{e^{-0 \cdot H(\omega)}}_{= e^0 = 1} = |\Omega|$

$$\mathbb{P}_0(\{\omega\}) = \frac{1}{\underbrace{Z_0}_{= |\Omega|}} \underbrace{e^{-0 \cdot H(\omega)}}_{= 1} = \frac{1}{|\Omega|}$$

Et pour $A \subseteq \Omega$, on obtient.

$$\mathbb{P}_0(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}_0(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{|\Omega|}$$

$$= \frac{|A|}{|\Omega|}.$$ Donc $\mathbb{P}_0$ est uniforme.

Si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$

alors $\mathbb{P}(\cup A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$

En particulier : $A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$ est une union disjointe, donc

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$$

c) $\boxed{\beta \to +\infty}$

$m = \min\{ H(\omega);\ \omega \in \Omega\}$

$M = \{ \omega \in \Omega;\ H(\omega) = m \} \quad (\neq \emptyset)$

Prouver que : * $\lim\limits_{\beta \to +\infty} \mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) = 0$ si $\omega \notin M$

* En déduire que $\lim\limits_{\beta \to +\infty} \mathbb{P}_\beta(M) = 1$.

Preuve : $\mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) = \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta \cdot H(\omega)}$

$$Z_\beta = \sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta \cdot H(\omega)} \geq \sum_{\omega \in M} e^{-\beta \cdot H(\omega)}$$

$$= |M|^{\geq 1} \cdot e^{-\beta \cdot m} \geq e^{-\beta \cdot m}.$$

Donc, si $\omega \notin M$ alors :

$$0 \leq \lim_{\beta \to +\infty} \mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) = \lim_{\beta \to +\infty} \frac{1}{Z_\beta} \cdot e^{-\beta \cdot H(\omega)}$$

$$\leq \lim_{\beta \to +\infty} \frac{1}{e^{-\beta \cdot m}} e^{-\beta\, H(\omega)}$$

$$= \lim_{\beta \to +\infty} e^{-\beta \cdot (\underbrace{H(\omega) - m}_{>0})}$$

$$= 0$$

Brouillon :

$\frac{1}{e^{-\beta m}} \cdot e^{-\beta \cdot H(\omega)}$

$= e^{\beta m} e^{-\beta\, H(\omega)} = e^{\beta m - \beta \cdot H(\omega)}$

$= e^{-\beta(H(\omega) - m)}$

$$\Rightarrow \lim_{\beta \to +\infty} \mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) = 0$$

* $$\lim_{\beta \to +\infty} \mathbb{P}_\beta(M) = \lim_{\beta \to +\infty} 1 - \mathbb{P}_\beta(M^c)$$

$$= 1 - \lim_{\beta \to +\infty} \sum_{\omega \notin M} \mathbb{P}_\beta(\{\omega\})$$

$$= 1 - \sum_{\omega \notin M} \underbrace{\lim_{\beta \to +\infty} \mathbb{P}_\beta(\{\omega\})}_{=0}$$

$$= 1$$

$\square$

d) Montrer que $\forall\, \omega \in M$: $\lim\limits_{\beta \to +\infty} \mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) = \frac{1}{|M|}$

$$\mathbb{P}_\beta(M) = \sum_{\omega \in M} \mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in M} \frac{1}{Z_\beta} \cdot e^{-\beta \cdot m}$$

toutes les termes sont les mêmes.

$$= \underbrace{|M|}_{\text{nombre de termes}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}_\beta(\{\omega\})}_{\text{valeur d'une terme}} \quad \forall\, \omega \in M.$$

Donc, par (C)

$$1 = \lim_{\beta \to +\infty} \mathbb{P}_\beta(M) = \lim_{\beta \to +\infty} |M| \cdot \mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) = |M| \cdot \lim_{\beta \to +\infty} \mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) \quad \forall\, \omega \in M.$$

Donc $\displaystyle \lim_{\beta \to +\infty} \mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) = \frac{1}{|M|}$. $\quad \forall\, \omega \in M$

À 10^h20 : l'exo 3.2.

Exo 3.2 : Un étudiant fait un QCM avec 5 réponses possibles
Il connaît et donne la bonne réponse avec proba. p
S'il ne la connaît pas il choisit unif au hasard

a) $\mathbb{P}$(l'étudiant donne la bonne réponse)

Solution:

$$\mathbb{P}(\text{bonne réponse}) = \mathbb{P}(\text{connaît}) + \mathbb{P}(\underbrace{\text{ne la connaît pas}}_{B} \text{ et } \underbrace{\text{choisit la bonne rép.}}_{A})$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$= p + \mathbb{P}(\underbrace{\text{ne la connaît pas}}_{B}) \cdot \mathbb{P}(\underbrace{\text{il donne la bonne réponse}}_{A} \mid \underbrace{\text{ne la connaît pas}}_{B})$$

donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A|B)$

$$= p + (1-p) \cdot 1/5$$

$$= \frac{4p+1}{5}$$

b) S'il donne la bonne réponse, quelle est la proba. qu'il la connaissait.

Solution:

$$\mathbb{P}(\text{connaît} \mid \text{donne la bonne réponse}) = \frac{\overset{p}{\mathbb{P}(\text{connaît} \cap \text{donne})}}{\underset{(4p+1)/5}{\mathbb{P}(\text{donne})}}$$

$$= \frac{p}{(4p+1)/5} = \frac{5p}{4p+1}. \qquad \square$$

À 11^h10 : l'exercise 3.3.

Exo 3.3. On place 3 cartes dans un sac :

* une carte avec deux faces rouges
* une avec une face rouge et une face noire
* une avec deux faces noires

On tire une carte avec les yeux fermés et on la met sur la table.
Si la face qu'on voit est rouge, quelle est la proba que l'autre face est rouge aussi ?

Solution : R = la face qu'on voit est rouge

A_1 = On tire la carte à deux faces rouges

A_2 = " " une face rouge et une face noire

A_3 = à deux faces noires.

$$\mathbb{P}(A_1|R) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{\overbrace{\mathbb{P}(R|A_1)}^{=1} \cdot \overbrace{\mathbb{P}(A_1)}^{=1/3}}{\mathbb{P}(R)}$$

Formule de Bayes
A, B deux événements
$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\cdot\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$= \frac{1/3}{\mathbb{P}(R|A_1)\cdot\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(R|A_2)\cdot\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(R|A_3)\cdot\mathbb{P}(A_3)}$$

$$= \frac{1/3}{1\cdot 1/3 + 1/2 \cdot 1/3 + 0\cdot 1/3} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3} \qquad \square$$

À 11h50 : l'exo 3.9.

Exo 3.9 : Que peut-on dire d'un événement qui est indépendant de lui-même ?

Solution : $\left[\begin{array}{l}\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)\\ \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)\end{array}\right.$ $\quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$]

Indépendance de A et B
$$\boxed{\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A\cap B)}$$

On suppose que A est indép de A

$\mathbb{P}(A)^2 = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\cap A) = \mathbb{P}(A)$

les seuls nbres réels positifs x avec la propriété que $x = x^2$ sont 0 et 1.

Donc $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exemple : $\Omega = \{0,1\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(\{0\}) = 1$, $\mathbb{P}(\{1\}) = 0$.

À 12h15 : l'exo 3.10.

Exo 3.10 : On a une urne qui contient
* k boules rouges
* n boules vertes

$k, n \geq 1$.
On tire une boule, on ne la remet pas, et on tire une deuxième

A_1 = "la première boule est rouge"
A_2 = "la deuxième boule est rouge"

Prouver que A_1 et A_2 ne sont pas indépendants.

Preuve : On veut prouver que
$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \neq \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2)$$

Espace proba.
$$B = \{1, \dots, k, k+1, \dots, k+n\}$$
$$\Omega = \{(b_1, b_2) \in B^2 ; b_2 \neq b_1\}$$
$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$
$$\mathbb{P} = \text{uniforme}$$

$$A_1 = \{(b_1, b_2) \in \Omega ;\ 1 \leq b_1 \leq k\}$$
$$A_2 = \{(b_1, b_2) \in \Omega ;\ 1 \leq b_2 \leq k\}$$

Donc $\mathbb{P}(A_1) = |A_1| / |\Omega|$

$$\left.\begin{array}{l} |\Omega| = (n+k) \cdot (n+k-1) \\ |A_1| = k \cdot (n+k-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(A_1) = \frac{k}{n+k}$$

$$\mathbb{P}(A_2) : \quad |A_2| = \underbrace{k}_{\text{\# possibilités pour la 2ème boule}} \cdot \underbrace{(n+k-1)}_{\text{\# possibilités pour la première étant donné la deuxième}} \Rightarrow \mathbb{P}(A_2) = \frac{k}{n+k}$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) : \quad |A_1 \cap A_2| = \left|\left\{(b_1, b_2) \in \Omega ;\ \begin{array}{l} 1 \leq b_1 \leq k \\ 1 \leq b_2 \leq k \end{array}\right\}\right| = k \cdot (k-1)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{k \cdot (k-1)}{(n+k)(n+k-1)}$$

$$\mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) = \frac{k}{n+k} \cdot \frac{k}{n+k}$$

Vu que $\frac{k-1}{n+k-1} \neq \frac{k}{n+k}$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \neq \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2)$$

La prochaine fois : l'exo 3.12.