TD 8

Exo 3.12 : La fonction zêta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}, \qquad s \in]1, +\infty[$$

But : $\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1-p^{-s}}$

Contexte : théorie des nombres

pour $x \in \mathbb{R}$ on définit

$$\pi(x) = |\{ p \leq x ; \ p \text{ premier} \}|$$

Q'n : Comment augmente $\pi(x)$ comme fonc. de x ?

1ère Réponse : Théorème des nombres premiers (Hadamard, de la Vallée-Poussin)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = 1$$

Pt de vue proba : La proba qu'un nbre naturel $\leq x$ est un premier est $\approx \frac{1}{\ln(x)}$.

Riemann : * $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ converge pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $Re(s) > 1$.

* On peut continuer analytiquement ζ à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

* $\zeta(s) = 0$ si $\overbrace{s = -2, -4, -6, \dots}^{\text{zéros triviales.}}$

* Formule explicite pour $\pi(x)$ en termes des zéros non-triviales de ζ

Hypothèse de Riemann : toutes les zéros non-triv. de ζ ont partie réelle $\frac{1}{2}$.

(Ouvert, Clay Millenium Problem)

↳ **Conséquence :** $\left| \pi(x) - \frac{x}{\ln(x)} \right| < \text{Cste} \cdot x^{1/2} \cdot \ln(x)$

Solution à l'exercice:

$s \in]1, +\infty[$

$\Omega = \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$

$\mathbb{P}$ définie par $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s)} \cdot \frac{1}{n^s} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

où $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$

Obs: $\infty > \zeta(s) > 0 \quad \forall s \in]1, +\infty[, \qquad \mathbb{P}(\{n\}) > 0$

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\zeta(s)} \cdot \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \underbrace{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}}_{\zeta(s)}$$

$$= 1$$

a) $k \geq 1, \quad M_k = \{k, 2k, 3k, \dots\}$

Prouver que $\mathbb{P}(M_k) = \frac{1}{k^s}$.

Solution: $$\mathbb{P}(M_k) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{ik\}) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{(ik)^s}$$

$$= \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{k^s} \underbrace{\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^s}}_{\zeta(s)} = \frac{1}{k^s} \qquad \square$$

b) $p_1, \dots, p_\ell$ premiers distincts.

* $M_{p_1} \cap M_{p_2} \cap \dots \cap M_{p_\ell} = M_{p_1 \cdots p_\ell}$

* $(M_p)_{p \in \mathcal{P}}$ où $\mathcal{P}$ est l'ens. de nombres premiers sont indép.

Solution:

$$M_{p_1} \cap \dots \cap M_{p_\ell} = \{n \in \mathbb{N}^* ; \ p_i \overset{\text{divise}}{\mid} n \ \text{ pour } i = 1, \dots, n\}$$

$$\overset{\text{unicité de l'écriture des nombres naturels comme produit de premiers}}{=} \{n \in \mathbb{N}^* ; \ p_1 \cdot p_2 \cdots p_\ell \mid n\}$$

$$= M_{p_1 p_2 \cdots p_\ell}.$$

Rappel $(A_i)_{i\in I}$ collection d'événements sont indépendants ssi

$$\mathbb{P}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\cdot\mathbb{P}(A_{i_2})\cdots\mathbb{P}(A_{i_k})$$

$\forall\ i_1,\dots,i_k\in I$ distincts, $\forall\ k\geq 2$.

On va vérifier: $p_1,\dots,p_\ell$ distincts

$$\mathbb{P}(M_{p_1}\cap\cdots\cap M_{p_\ell}) = \mathbb{P}(M_{p_1\cdot p_2\cdots p_\ell}) \overset{(a)}{=} \frac{1}{(p_1\cdots p_\ell)^s}$$

$$= \frac{1}{p_1^s}\,\frac{1}{p_2^s}\cdots\frac{1}{p_\ell^s}$$

$$\overset{(a)}{=} \mathbb{P}(M_{p_1})\cdot\mathbb{P}(M_{p_2})\cdots\mathbb{P}(M_{p_\ell}) \qquad \square$$

c) On écrit $\mathcal{P}=\{p_1,p_2,\dots\}$.

Prouver : $\forall n$: $\mathbb{P}(M_{p_1}^c\cap M_{p_2}^c\cap\cdots\cap M_{p_n}^c) = \prod_{i=1}^n \left(1-\frac{1}{p_i^s}\right)$

Solution:
$$\mathbb{P}(M_{p_1}^c\cap\cdots\cap M_{p_n}^c) \overset{\text{indép.}}{=} \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(M_{p_i}^c)$$

$$= \prod_{i=1}^n \left(1-\mathbb{P}(M_{p_i})\right)$$

$$\overset{(a)}{=} \prod_{i=1}^n\left(1-\frac{1}{p_i^s}\right) \qquad \square$$

d) Prouver $\mathbb{P}(\{1\}) = \prod_{p\in\mathcal{P}} 1-\frac{1}{p^s}$ et en déduire que $\zeta(s)=\prod_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{1-p^{-s}}$.

Solution: On écrit
$$D_n = M_{p_1}^c\cap\cdots\cap M_{p_n}^c$$

$D_{n+1} = D_n\cap M_{p_{n+1}}^c$

Obs: $*\ D_{n+1}\subset D_n$

ne divise pas

$$*\ \bigcap_{n\geq 1} D_n = \{n\in\mathbb{N}^*;\ p\nmid n\ \ \forall p\in\mathcal{P}\}$$

$$= \{1\}$$

continuité: si $(A_n)_n$ suite d'événements t.q. $A_{n+1}\subset A_n$ alors $\mathbb{P}(\bigcap_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n)$

Donc par continuité:

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(D_n) \overset{(c)}{=} \lim_{n\to+\infty}\prod_{i=1}^n\left(1-\frac{1}{p_i^s}\right) = \prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$$

On a aussi

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)} \cdot \frac{1}{1^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

Donc: $\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \mathcal{P}} 1 - \frac{1}{p^s}$ donc $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$. (Euler)

10h05 : l'exo 4.4.

Exo 4.4 $X \sim \text{Géom}(p)$ avec $p \in]0,1[$

Rappel: $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^*$ $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$

a) Prouver que $\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Solution: $\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \underbrace{(1-p)}_{\in]0,1[}{}^{k-1} \cdot p$$

Rappel: si $x \in]-1,1[$ alors $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$

Donc: $\sum_{k=m}^{\infty} x^k = x^m \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x^m}{1-x}$

$$= p \frac{(1-p)^n}{1-(1-p)} = p \frac{(1-p)^n}{p} = (1-p)^n \quad \square$$

b) $\mathbb{P}(\underbrace{X \text{ est un multiple de } k}_{A_k})$ pour $k \geq 2$.

Solution: $\mathbb{P}(A_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = ik) = \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{ik-1} \cdot p$

$$= \frac{p}{1-p} \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\underbrace{(1-p)^k}_{\in]0,1[}\Big)^i = \frac{p}{1-p} \frac{(1-p)^k}{1-(1-p)^k}$$

$$= p \frac{(1-p)^{k-1}}{1-(1-p)^k}.$$

À 10h45 : l'exo 4.9.

Exo 4.9 X, Y deux v.a. indéps. $X \sim \text{Géom}(p)$
$Y \sim \text{Géom}(q)$. $p, q \in]0,1[$
$Z := \min\{X, Y\}$

a) Calculer $\mathbb{P}(Z > n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Solution: $\mathbb{P}(Z>n) = \mathbb{P}(\min\{X,Y\}>n) = \mathbb{P}(X>n \text{ et } Y>n)$

$$\overset{\text{indép.}}{=} \mathbb{P}(X>n)\cdot\mathbb{P}(Y>n)$$

$$\overset{\text{exo } 4.4}{=} (1-p)^n \cdot (1-q)^n$$

b) En déduire que Z suit une loi géométrique et déterminer le paramètre.

Solution: $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(Z=n) = \mathbb{P}(Z>n-1) - \mathbb{P}(Z>n)$$

$$\mathbb{P}(Z>n-1) = \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(Z=k)$$

$$\mathbb{P}(Z>n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(Z=k)$$

$$\mathbb{P}(Z>n-1) - \mathbb{P}(Z>n) = \mathbb{P}(Z=n)$$

$$\overset{(a)}{=} (1-p)^{n-1}(1-q)^{n-1} - (1-p)^n(1-q)^n$$

$$= (1-p)^{n-1}(1-q)^{n-1}\left(1-(1-p)(1-q)\right)$$

$$= (1-p-q+pq)^{n-1}(p+q-pq)$$

$$= (1-(p+q-pq))^{n-1}(p+q-pq)$$

Donc $Z \sim \text{Géom}(p+q-pq)$

Vérification que $p+q-pq \in]0,1[$:

$$p+q-pq = 1-\underbrace{\underbrace{\underbrace{(1-p)}_{\in]0,1[}\underbrace{(1-q)}_{\in]0,1[}}_{\in]0,1[}}_{\in]0,1[}$$

Solution alternative: X premier succès dans une suite d'expériences indép. avec proba de succès p
Y " " q

Z: on fait les expériences pour X et Y au même temps et si au moins un des deux est un succès, on l'appelle un succès.

La proba de succès de la $k^{\text{ième}}$ expérience: $\mathbb{P}(\text{succès}) = \mathbb{P}\left(\begin{array}{l}\text{la } k^{\text{ième}} \text{ exp. de } X \\ \text{ou de } Y \text{ est un succès}\end{array}\right)$

$= \mathbb{P}(\text{succès } X) + \mathbb{P}(\text{succès } Y) - \mathbb{P}(\text{succès } X \text{ et } Y)$

$\overset{\text{indép.}}{=} p+q-p\cdot q$ $\square$

À 11^h35 : l'exo 4.10.

Exo 4.10 X_1, X_2 deux v.a. indéps. à valeurs dans $\{-1, 1\}$ t.q. $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ $i = 1, 2$.

a) Prouver que $X_1 \cdot X_2$ est indép de X_1 et d'autre part de X_2.

Solution : Obs $X_1 \cdot X_2$ est aussi à valeurs dans $\{-1, 1\}$

Il faut prouver que

$$\mathbb{P}(X_1 X_2 \in A \text{ et } X_1 \in B) = \mathbb{P}(X_1 X_2 \in A) \cdot \mathbb{P}(X_1 \in B)$$

$\forall A, B \subset \{-1, 1\}$

Équivalent :

$$\mathbb{P}(X_1 X_2 = x \text{ et } X_1 = y) = \mathbb{P}(X_1 X_2 = x) \cdot \mathbb{P}(X_1 = y)$$

$\forall x, y \in \{-1, 1\}$.

$\mathbb{P}(X_1 X_2 = x \text{ et } X_1 = y)$:

y \ x	-1	1
-1	$1/4$	$1/4$
1	$1/4$	$1/4$

$$\mathbb{P}(X_1 X_2 = -1 \text{ et } X_1 = -1)$$
$$= \mathbb{P}(X_2 = 1 \text{ et } X_1 = -1)$$
$$\overset{\text{indép}}{=} \mathbb{P}(X_2 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_1 = -1)$$
$$= \frac{1}{4}$$

De plus : $\mathbb{P}(X_1 X_2 = 1) = \mathbb{P}((X_1, X_2) = (1,1)) + \mathbb{P}((X_1, X_2) = (-1, -1))$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(X_1 X_2 = -1) = \frac{1}{2}$$

Donc : $\underbrace{\mathbb{P}(X_1 X_2 = x)}_{1/2} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = y)}_{1/2} = \frac{1}{4}$ $\forall x, y \in \{-1, 1\}$

Et donc $\mathbb{P}(X_1 X_2 = x \text{ et } X_1 = y) = \mathbb{P}(X_1 X_2 = x) \cdot \mathbb{P}(X_1 = y)$

$\forall x, y \in \{-1, 1\}$ donc $X_1 X_2$ et X_1 indép.

Et avec le même calcul : $X_1 X_2$ et X_2 indép.

$\square$

b) $X_1 X_2$ indép de (X_1, X_2) ?

Solution : Non, parce que par ex.

$$\mathbb{P}\left(X_1 X_2 = 1 \text{ et } (X_1, X_2) = (-1,1)\right) = 0$$

Mais : $\underbrace{\mathbb{P}(X_1 X_2 = 1)}_{\overset{(a)}{=}\frac{1}{2}} \cdot \mathbb{P}\left((X_1, X_2) = (-1,1)\right)$ $= \mathbb{P}(X_1 = -1 \text{ et } X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1)\cdot\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$$\overset{\text{(a) et indép.}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \neq 0.$$

À 12^h15 : l'exo 4.11.

Exo 4.11 : On lance un dé à 6 faces de manière répétée.

X_k : résultat du k-ème lancer, $k \geq 1$.

Alice regarde les résultats en attendant le premier instant T où sort un numéro dans $\{1,2,3,4\}$

Et $Y = X_T$.

a) Exprimer $\{T = n\}$ en termes de $X_1, \ldots, X_n$
en déduire la densité discrète de T

Solution:

$$\{T=n\} = \{ X_1 \in \{5,6\}, X_2 \in \{5,6\}, \ldots, X_{n-1} \in \{5,6\}, X_n \in \{1,2,3,4\}\}$$

Donc: $\mathbb{P}(T=n) = \mathbb{P}\left(X_1 \in \{5,6\}, \ldots, X_{n-1} \in \{5,6\}, X_n \in \{1,2,3,4\}\right)$

$$\overset{\text{indép}}{=} \mathbb{P}(X_1 \in \{5,6\}) \cdots \mathbb{P}(X_{n-1} \in \{5,6\}) \cdot \mathbb{P}(X_n \in \{1,2,3,4\})$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{2}{3}$$

Donc $T \sim \text{Géom}\left(\frac{2}{3}\right)$.

b) Exprimer $\{T=n, Y=i\}$ en termes de $X_1, \dots, X_n$ et calculer sa proba.

Solution: $\{T=n, Y=i\} = \{X_1 \in \{5,6\}, \dots, X_{n-1} \in \{5,6\}, X_n = i\}$.

Donc: $\boxed{\mathbb{P}(T=n, Y=i)} = \mathbb{P}(X_1 \in \{5,6\}, \dots, X_{n-1} \in \{5,6\}, X_n = i)$

$\overset{\text{indép}}{=} \mathbb{P}(X_1 \in \{5,6\}) \cdots \mathbb{P}(X_{n-1} \in \{5,6\}) \mathbb{P}(X_n = i)$

$\boxed{= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}}$.

Donc la loi jointe est:

$\mathbb{P}((T,Y) \in A) = \sum_{(n,i) \in A} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$

$\forall A \subset \mathbb{N}^* \times \{1,2,3,4\}$

c) Déterminer la loi de Y.
Sont Y et T indép?

Solution: $\mathbb{P}(Y=i) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T=n, Y=i)$
$i \in \{1,2,3,4\}$

$= \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\overset{\text{série géom.}}{=} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2 \cdot 6} = \frac{1}{4}$.

Donc Y est uniforme sur $\{1,2,3,4\}$.

(b): $\mathbb{P}(T=n, Y=i) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{6}$

(c): $\mathbb{P}(Y=i) = \frac{1}{4}$ (a): $\mathbb{P}(T=n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{2}{3}$.

Donc $\mathbb{P}(T=n)\mathbb{P}(Y=i) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{6}$

$= \mathbb{P}(T=n, Y=i)$ $\forall n \geq 1$ $i \in \{1,2,3,4\}$

donc T et Y sont indéps.