TD 8

Exo 9.7 : X v.a. positive, de densité $f(x)$, $U \sim \mathcal{U}(]0,1[)$ indép. de X.
On définit $Y = UX$. La loi de Y ? Si $X \sim \mathcal{U}(]0,1[)$, quelle est f_Y ?

Solution: On prend $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée $\left(\text{But : } \mathbb{E}(h(Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) \cdot f_Y(y)\, dy. \right)$

Obs: (U,X) est de densité $\mathbb{1}_{]0,1[}(u) \cdot f(x) \cdot \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$.

$$\mathbb{E}(h(Y)) = \mathbb{E}(h(U \cdot X)) \underset{\text{pour } (U,X)}{\overset{\text{FdT}}{=}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u \cdot x) \cdot f_{(U,X)}(u,x)\, du\, dx$$

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (u,x) \mapsto h(u \cdot x) \end{cases}$$

$$= \int_0^\infty \int_0^1 h(u \cdot x) \cdot f(x) \cdot du\, dx.$$

$$= \int_0^\infty \int_0^x h(y) f(x) \frac{1}{x}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^\infty h(y) \cdot \left(\int_y^\infty \frac{f(x)}{x}\, dx \right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^\infty h(y) \cdot \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y) \cdot \left(\int_y^\infty \frac{f(x)}{x}\, dx \right) dy$$

Changement de var. pour $\int_0^1 h(ux)\, du$

On définit $y = ux$, donc $u = \frac{y}{x}$

bornes : $0 \rightsquigarrow 0$

$1 \rightsquigarrow x$

$du \rightsquigarrow \frac{du}{dy} dy = \frac{1}{x} dy$

$$\text{"} \int_0^\infty \int_x^\infty \text{"} = \iint_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x < \infty,\ 0 \le y \le x\}}$$

Donc: Y est de densité

$$f_Y(y) = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y) \cdot \left(\int_y^\infty \frac{f(x)}{x}\, dx \right)$$

De plus, si $X \sim \mathcal{U}(]0,1[)$ alors $\mathbb{1}_{]0,1[}(x) = f(x)$.

Donc $f_Y(y) = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y) \cdot \int_y^\infty \frac{\mathbb{1}_{]0,1[}(x)}{x}\, dx \overset{*}{=} \mathbb{1}_{]0,1[}(y) \int_y^1 \frac{1}{x}\, dx$

$$= \mathbb{1}_{]0,1[}(y) \cdot [\ln(x)]_y^1 = -\ln(y) \cdot \mathbb{1}_{]0,1[}(y).$$

$$* = \begin{cases} 0 & y \geq 1 \\ \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y) \cdot \int_y^1 \frac{1}{x}\, dx & y < 1 \end{cases}$$

À 9h45: l'exo 10.1.

Déf 6.7 : $(X_n)_{n\geq 1}$ suite de v.a., X une v.a., toutes définies sur la même espace proba.

On dit que X_n converge vers X <u>en probabilité</u> quand $n \to \infty$ ssi :

$\forall \varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Thme 6.1. $(X_i)_{i\geq 1}$ suite de v.a. i.i.d. (indéps. et $\overbrace{\text{identiquement distribués}}^{\text{toutes de même loi}}$)

telles que $\mu = \mathbb{E}(X_i) < +\infty$. Et on définit $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

$\forall \varepsilon > 0$: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 0$

Autrement dit $\overline{X}_n$ converge en proba vers μ quand $n \to +\infty$.

Exo 10.1 : $(X_i)_{i\geq 1}$ suite de v.a. i.i.d. avec $X_i \sim N(0, \sigma^2)$. On pose $W_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$, $n \geq 1$

Prouver que W_n converge en proba vers σ^2.

Solution : <u>Obs</u> : $(X_i^2)_{i\geq 1}$ suite de v.a. i.i.d.

$\mathbb{E}(X_i^2)$?

<u>On a</u> : $\infty > \sigma^2 = \mathrm{Var}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - \underbrace{\mathbb{E}(X_i)^2}_{=0 \text{ parce que } X_i \sim N(0,\sigma^2)} = \mathbb{E}(X_i^2)$.

Donc par la loi des grandes nbrs, W_n converge en proba vers σ^2 quand $n \to +\infty$.

<u>À 10^h30</u> : l'exo 10.5.

Exo 10.5 $(X_n)_n$ suite de v.a. réelles.

a) On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)=1$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n^2)=1$.

Prouver que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 1$.

Solution: But: $\forall \varepsilon>0 : \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n-1|>\varepsilon)=0$

On a: $|X_n-1| \leq |X_n-\mathbb{E}(X_n)| + |\mathbb{E}(X_n)-1|$ $(*)$

et $\mathbb{P}(|X_n-\mathbb{E}(X_n)|>\frac{\varepsilon}{2}) \overset{B\text{-}T}{\leq} \frac{Var(X_n)}{(\varepsilon/2)^2} = \frac{\mathbb{E}(X_n^2)-\mathbb{E}(X_n)^2}{(\varepsilon/2)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $(**)$

Donc: on fixe $\varepsilon>0$ et N t.q. si $n\geq N$ alors $|\mathbb{E}(X_n)-1|<\frac{\varepsilon}{2}$

Si $n\geq N$: $0\leq \mathbb{P}(|X_n-1|>\varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n-1|-|\mathbb{E}(X_n)-1| > \underbrace{\varepsilon-|\mathbb{E}(X_n)-1|}_{\geq \varepsilon/2})$

$$\leq \mathbb{P}(|X_n-1|-|\mathbb{E}(X_n)-1| > \varepsilon/2)$$

$$\overset{(*)}{\leq} \mathbb{P}(|X_n-\mathbb{E}(X_n)| > \varepsilon/2)$$

$$\overset{(**)}{\xrightarrow[n\to+\infty]{}} 0$$

Donc: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n-1|>\varepsilon)=0$

b) On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)=+\infty$ et que $\lim_{n\to+\infty} \frac{Var(X_n)}{\mathbb{E}(X_n)^2}=0$

Prouver que X_n converge vers $+\infty$ en proba. quand $n\to+\infty$.

Solution: But: $\forall A>0: \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n<A)=0$ (Def de tendre vers l'infini en proba.)

On fixe $A>0$ et N t.q. $\mathbb{E}(X_n)>2A$ $\forall n\geq N$. (existe parce que $\mathbb{E}(X_n)\xrightarrow{n\to\infty}+\infty$)

Donc si $n\geq N$

$$0\leq \mathbb{P}(X_n<A) \leq \mathbb{P}\left(|X_n-\mathbb{E}(X_n)| \geq \frac{\mathbb{E}(X_n)}{2}\right) \overset{B\text{-}T}{\leq} \frac{Var(X_n)}{(\mathbb{E}(X_n)/2)^2}$$

$$= \frac{4\,Var(X_n)}{\mathbb{E}(X_n)^2} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n<A)=0$.

À 11h25 : l'exo 10.6.

Exo 10.6 : On lance deux dés à 6 faces.

$A =$ " deuxième dé donne 1, 2 ou 5 "

$B =$ " deuxième donne 4, 5 ou 6 "

$C =$ " la somme des deux vaut 9 "

a) Prouver que $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$.

Solution : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ la proba uniforme.

$A = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,5\}$

$B = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{4,5,6\}$

$C = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\}$

$A \cap B \cap C$: $\quad A \cap B = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{5\}$

$A \cap B \cap C = \{(4,5)\}$.

Donc : $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \dfrac{|A \cap B \cap C|}{|\Omega|} = \dfrac{1}{36}$.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Donc : $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.

b) Indépendance de (i) A et B, (ii) A et C et (iii) B et C ?

Solution : (i) $A \cap B = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{5\}$ donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A \cap B)$ donc A et B ne sont pas indéps.

(ii) $A \cap C = \{(4,5)\}$ $\quad \mathbb{P}(A \cap C) = \dfrac{|A \cap C|}{|\Omega|} = \dfrac{1}{36}$

$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{18} \neq \mathbb{P}(A \cap C)$ donc A et C ne sont pas indéps.

(iii) $B \cap C = \{(3,6), (4,5), (5,4)\}$ donc $\mathbb{P}(B \cap C) = \dfrac{|B \cap C|}{|\Omega|} = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$

$\mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{18} \neq \mathbb{P}(B \cap C)$ donc B et C ne sont pas indéps.

À 11h55 : l'exo 10.?

Exo 10.? Alice et Baptiste jouent à un match d'échec.

X_i = le résultat de la i-ième partie $\in \{A, B, N\}$

Alice gagne, Baptiste gagne, match nul.

α est la probabilité que A gagne

β " " B "

$\gamma = 1 - \alpha - \beta$ proba d'un match nul.

toutes les parties sont indéps.

a) la densité discrète de X_i.

Solution: $P_{X_i}(A) = \alpha$ $\quad P_{X_i}(B) = \beta$ $\quad P_{X_i}(N) = \gamma$.

b) $T := \min\{ i \geq 1 \, ; \, X_i \neq N \}$

i) Donner la loi de T. Combien de parties jouent-ils en moyenne?

ii) $\mathbb{P}(X_T = A)$

Solution : (i) $\mathbb{P}(T=k) = \mathbb{P}(X_1 = N, \ldots, X_{k-1} = N, X_k \in \{A,B\})$

$$\overset{\text{indép.}}{=} \mathbb{P}(X_1 = N) \cdot \cdots \mathbb{P}(X_{k-1} = N) \cdot \mathbb{P}(X_k \in \{A,B\})$$

$$= \gamma^{k-1} \cdot (1-\gamma)$$

Donc $T \sim \text{Géom}(1-\gamma)$.

Et $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{1-\gamma} = \frac{1}{\alpha+\beta}$.

(ii) $$\mathbb{P}(X_T = A) = \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{P}(T = t \text{ et } X_t = A)$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 = N, \ldots, X_{t-1} = N, X_t = A)$$

$$\overset{\text{indép.}}{=} \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 = N) \cdots \mathbb{P}(X_{t-1} = N) \cdot \mathbb{P}(X_t = A)$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} \gamma^{t-1} \cdot \alpha \overset{s=t-1}{=} \alpha \sum_{s=0}^{\infty} \gamma^s = \frac{\alpha}{1-\gamma} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$