Renforcement Mathématiques - EISE3

Bram Petri [1]

2021 – 2022

1. bram.petri@imj-prg.fr

Basé sur un polycopié réalisé par Clément Cancès, Frédérique Charles et Maxime Zavidovique

Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels

Dans ce cours nous allons étudier l'algèbre linéaire. Ceci est la théorie des espaces vectoriels et les applications linéaires entre eux. Dans ce chapitre nous commençons avec les espaces vectoriels.

Avant de définir formellement qu'est-ce que c'est un espace vectoriel, nous discutons la notion intuitive d'un vecteur. Intuitivement, les vecteurs sont des objets qui peuvent être addionnés et qui peuvent être multiplié par des nombres. Plusieurs manifestations de cette idée sont :

1. La géométrie plane :

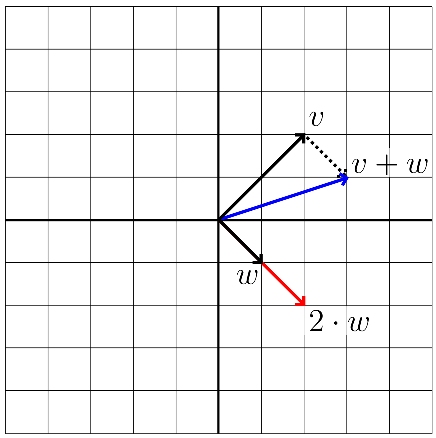

FIGURE 1.1 – Les vecteurs $v = (2, 2)$, $w = (1, -1)$, $2 \cdot w = (2, -2)$ et $v + w = (3, 1)$ dans le plan

2. Des sons, où multiplier correspond à augmenter le volume et addition correspond à superposition (jouer un accord au piano est un exemple de superposition).
3. Des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Où, si par exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont respectivement définies par :

$$f(x) = x^2 + 2 \quad \text{et} \quad g(x) = 3x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

alors la fonction "$f + g$" est la fonction définie par

$$(f + g)(x) = x^2 + 3x + 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et la fonction "$17 \cdot f$" est la fonction définie par

$$(17 \cdot f)(x) = 17x^2 + 34$$

1.1 La définition et des exemples

Notre premier objectif est maintenant de formaliser l'idée de "un espace dont on peut additionner les éléments et multiplier les éléments avec des nombres". Tout d'abord on a besoin d'une notation pour les nombres que nous allons utiliser :

Notation: $\mathbb{R}$ denote l'ensemble de nombres réels, $\mathbb{C}$ dénote l'ensemble de nombres complexes. Dans le reste de ce texte, nous écrirons $\mathbb{K}$ si nous voulons dire "$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$".

Maintenant on peut définir la notion d'un espace vectoriel.

Définition 1.1 *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble E muni de deux applications :*

1. *Une addition $E \times E \to E$ qui associe à $(u, v) \in E \times E$ un élément de E qu'on denote par $u + v \in E$*
2. *et une multiplication par scalaires $\mathbb{K} \times E \to E$ qui associe à $(\lambda, v) \in \mathbb{K} \times E$ un élément de E qu'on dénote par $\lambda \cdot v \in E$*

qui ont les propriétés suivantes :

1. *l'addition est commutative : $u + v = v + u$ pour tout $u, v \in E$,*
2. *l'addition est associative : $(u + v) + w = u + (v + w)$ pour tout $u, v, w \in E$,*
3. *l'addition admet un zéro (ou élément neutre) : il existe $0_E \in E$ tel que $0_E + V = v$ pour tout $v \in E$,*
4. *tout vecteur a un opposé : pour tout $v \in E$ il existe un élément $(-v) \in E$ tel que $v + (-v) = 0_E$,*
5. *la multiplication par scalaires est distributive par rapport à l'addition :*

   $$\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{K}, u, v \in E$$

   et

   $$(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u \text{ pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{K}, u \in E$$

6. *la multiplication par scalaires est compatible avec multiplication dans $\mathbb{K}$: $(\lambda \cdot \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$ pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u \in E$*

7. $1 \cdot u = u$ *pour tout* $u \in E$.

Exemples:

1. $\mathbb{R}$ avec l'addition et la multiplication usuelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. $\mathbb{C}$ avec l'addition et la multiplication usuelles est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
3. L'ensemble
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$$
avec l'addition
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$$
et multiplication par scalaires
$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a \\ \lambda \cdot b \end{pmatrix} \quad \forall a, b, \lambda \in \mathbb{R}$$
est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
4. En générale $\mathbb{K}^n$ – l'ensemble de n-uplets de nombres dans $\mathbb{K}$ – est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec les opérations d'addition et multiplication par scalaires analogues à celles du dernier exemple.
5. L'ensemble $\{0\}$.
6. L'ensemble
$$C([0,1];\ \mathbb{K}) := \{f : [0,1] \to \mathbb{K};\ f \text{ continue}\}$$
avec l'addition :
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in [0,1], f, g \in C([0,1];\ \mathbb{K})$$
et la multiplication par scalaires :
$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \quad \forall x \in [0,1] f \in C([0,1];\ \mathbb{K}).$$
7. L'ensemble de suites à valeurs dans $\mathbb{K}$:
$$\mathbb{K}^{\mathbb{N}} := \{(a_n)_{n=0}^{\infty};\ a_n \in \mathbb{K}\}$$
avec l'addition
$$(a_n)_{n=0}^{\infty} + (b_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n + b_n)_{n=0}^{\infty} \quad \forall (a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$$
et la multiplication par scalaires :
$$\lambda \cdot (a_n)_{n=0}^{\infty} = (\lambda \cdot a_n)_{n=0}^{\infty} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, (a_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$$

8. L'ensemble de polynomes à coëfficients dans $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K}[x] = \left\{ P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k;\ n \in \mathbb{N},\ a_k \in \mathbb{K} \text{ pour } k = 0, \ldots, n \right\}$$

avec l'addition et la multiplication scalaires :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{m} b_k x^k = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k + \sum_{k=n+1}^{m} b_k x^k & \text{si } m \geq n \\ \sum_{k=0}^{m} (a_k + b_k) x^k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k & \text{si } n > m \end{cases}$$

et

$$\lambda \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (\lambda \cdot a_k) x^k$$

pour tout $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \in \mathbb{K}[x]$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

9. L'ensemble de polynomes à coëfficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus n :

$$\mathbb{K}_n[x] = \left\{ P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k;\ a_k \in \mathbb{K} \text{ pour } k = 0, \ldots, n \right\}$$

avec la même addition et la même multiplication par scalaires de $\mathbb{K}[x]$.

En bref, cette structure est partout.

1.1.1 Sous-espaces vectoriels

Nous commençons avec un exemple. Considerons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ et son sous-ensemble

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2;\ x = y \right\}.$$

(voir la figure 1.2)

Observons que si on additionne deux vecteurs de L, le résultat reste dans L. De la même manière, si on multiplit un vecteur dans L avec un nombre réel, on obtient un autre vecteur dans L. Vu qu'on sait déjà que $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel et donc son addition et sa multiplication par scalaires satisfont toutes les conditions de la définition 1.1, cela implique en particulier que L est aussi un espace vectoriel.

On généralise cet example comme suivant :

Définition 1.2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors un* <u>*sous-espace vectoriel de E*</u> *est un sous-ensemble non-vide $F \subset E$ tel que :*

— *pour tout $u, v \in F$, $u + v \in F$ et*

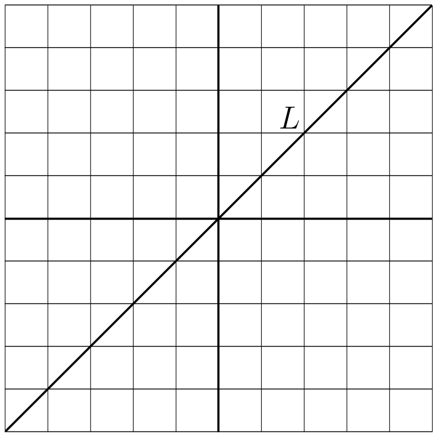

FIGURE 1.2 – Le sous-espace vectoriel L de $\mathbb{R}^2$

— *pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et tout* $u \in F$, $\lambda \cdot v \in F$.

L'observation que L est un espace vectoriel se généralise aussi :

Proposition 1.3 *Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel, alors F, muni avec les mêmes applications d'addition et de multiplication par scalaires, est un espace vectoriel aussi.*

Observons que cela implique par exemple que $0_E \in V$ pour tout sous-espace vectoriel V de E.

Exemples:

1. Prenons $E = \mathbb{R}^2$, alors
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E;\ x - 3y = 0 \right\}$$
est un sous-espace vectoriel de E.
Preuve : Il faut vérifier les conditions de la définition 1.2. Tout d'abord, F est non-vide, parce que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$. Maintenant prenons
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in F$$
alors
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}.$$

On a
$$(a+c)-3(b+d)=(a-3b)+(c-3d)=0+0=0,$$
et donc $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} \in F$, où nous avons utilise le fait que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in F$ dans la deuxième étape.

Maintenant nous devons encore vérifier que F est stable sous la multiplication par scalaires. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in F$, on a
$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a \\ \lambda \cdot b \end{pmatrix}.$$
On a
$$(\lambda \cdot a) - 3 \cdot (\lambda \cdot b) = \lambda \cdot (a-3b) = \lambda \cdot 0 = 0.$$
Donc F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. □

2. $\mathbb{K}_n[x]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[x]$
3. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $\{0_E\}$ et E sont toujours des sous-espaces vectoriels.

1.2 Combinaisons linéaires, bases et dimension

1.2.1 Combinaisons linéaires et espaces engendrés

Une question importante dans un espace vectoriel est de si un vecteur est une combinaison linéaire de certains autres vecteurs. On donne un exemple :

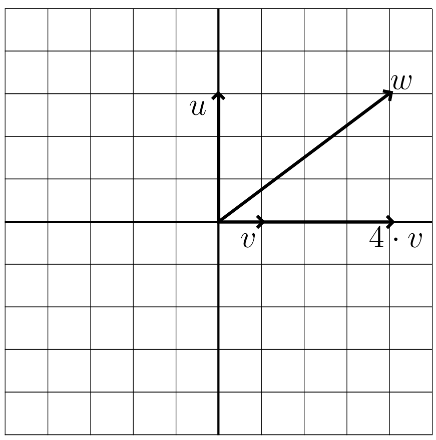

FIGURE 1.3 – Les vecteurs $v=(1,0)$, $u=(0,3)$ et $w=(4,3)$. Nous avons $w=4\cdot v+u$.

Définition 1.4 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u_1, \ldots, u_k \in E$. On dit que un élément $u \in E$ est une* <u>*combinaison linéaire*</u> *des u_i s'il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ tels que*

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k.$$

Étant donné une famille de vecteurs $u_1, \ldots, u_k \in E$ dans un espace vectoriel E, on peut considerer tous les vecteurs qu'on peut obtenir comme combinaison linéaire des u_k :

Définition 1.5 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient $u_1, \ldots, u_k \in E$. Alors* <u>*l'espace engendré*</u> *par $u_1, \ldots, u_k$ est*

$$\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \in E;\ \lambda_i \in \mathbb{K},\ i = 0, \ldots, k \right\}$$

Exemples:

1. Prenons $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$. On a

$$\mathbb{K}^2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

2. Prenons $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$. On a

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix};\ x \in \mathbb{K} \right\}$$

Par définition de $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$ on a :

Proposition 1.6 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u_1, \ldots, u_k \in E$. Alors $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$ est un sous-espace vectoriel de E.*

1.2.2 Familles libres, familles génératrices et bases

On fait un autre exemple d'un espace engendré :

Exemple: On a

$$\mathbb{K}^2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

aussi. Donc, on observe que en ajoutant des vecteurs, on n'enlarge pas toujours l'espace engendré. Ici, c'est un conséquance du fait que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cela implique que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et donc que on n'ajoute aucun nouveau vecteur si on ajoute $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ à l'espace engendré. On dit que la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

n'est pas libre.

Définition 1.7 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, \ldots, u_k)$ une famille finie de vecteurs dans E. La famille est <u>libre</u> si*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = 0_E \quad \textit{si et seulement si} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

Une famille qui n'est pas libre est dite <u>liée</u>.

Remarque:

— Observons que dire qu'une famille $(u_1, \ldots, u_k)$ de vecteurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est liée est la même chose que dire qu'il existe un $1 \leq j \leq k$ tel que u_j est une combinaison linéare des autres u_i.

— Pour prouver qu'une famille de vecteurs est libre, il faut seulement vérifier la direction

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0,$$

l'autre direction est automatique.

Exemples:

1. Toute famille d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E contenant le vecteur 0_E est liée.
2. La famille (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est liée, car

$$u_1 = u_2 + u_3$$

3. Nous allons prouver que la famille (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ où
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
est libre.

Donc, supposons que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ sont tels que
$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$
Alors
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix}$$
et donc
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$
et on trouve que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, donc on peut conlcure que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

Dans la section précédante, nous avons vu que $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. C'est-à-dire, tout vecteur dans $\mathbb{R}^2$ s'exprime comme combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dans cette situation, on dit que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$:

Définition 1.8 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, \ldots, u_k)$ une famille finie d'éléments de E. On dit que $(u_1, \ldots, u_k)$ est une famille génératrice de E si*
$$E = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_k).$$

Exemples:

1. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est aussi une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$
2. $(1, x, x^2)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_2[x]$.
3. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u_1, \ldots, u_k \in E$, alors $(u_1, \ldots, u_k)$ est une famille génératrice de $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$.

Les familles génératrices qui sont aussi libres sont appelées bases :

Définition 1.9 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une* <u>*base*</u> *de E est une famille $(u_1, \ldots, u_k)$ d'éléments de E qui est à la fois libre et génératrice.*

Donc, si $(u_1, \ldots, u_k)$ est une base de E, tout vecteur dans E s'écrit comme combinaison linéaire des u_i (la famille est génératrice) et cette combinaison linéaire est unique (parce que la famille est libre).

Exemple: La <u>base canonique</u> de $\mathbb{K}^n$ est la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ donnée par :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j^{\text{ème}} \text{ ligne}, \qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.10 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vecoriel admettant une base $(e_1, \ldots, e_n)$, alors toute base de E compte exactement n éléments. Ce nombre n est appelé* <u>*dimension*</u> $\dim(E)$ *de E.*

Par convention, on dit que $\dim(\{0\}) = 0$.

Exemple: Soient

$$e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. La famille (e_1, e_2) forme une base du sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ suivant :

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ x - 3y + z = 0 \right\}.$$

Avant prouver ce fait, nous remarquons que V est donc de dimension 2.

Nous commençons maintenant avec la preuve du fait que (e_1, e_2) est une famille génératrice de V. Supposons que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V$. Alors $x - 3y + z = 0$ et donc $x = 3y - z$. Cela implique

que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = y \cdot e_1 + z \cdot e_2.$$

C'est-à-dire : tout vecteur dans V est une combinaison linéaire de e_1 et e_2, et donc (e_1, e_2) est une famille génératrice de V.

Pour prouver que (e_1, e_2) est une base, il faut prouver que cette famille est libre. Donc, supposons que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$. Alors

$$\begin{pmatrix} 3\lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et des deux dernières lignes on voit que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, ce qui prouve que (e_1, e_2) est libre et donc une base.

Définition 1.11 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u_1, \ldots, u_k \in E$. Alors le rang de la famille $(u_1, \ldots, u_k)$ est la dimension de* $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$.

Théorème 1.12 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.*

— *Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de E, alors $p \leq n$. De plus, il existe $(n-p)$ vecteurs $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de E tels que $(e_1, \ldots e_n)$ soit une base.*

— *Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille génératrice de E, alors $p \geq n$. De plus, on peut choisir n vecteurs $(e_{k_1}, \ldots, e_{k_n})$ parmi $(e_1, \ldots, e_p)$ tels que $(e_{k_1}, \ldots e_{k_n})$ soit une base de E.*

Corollaire 1.13 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, alors*

— *toute famille libre de n vecteurs de E est une base de E ;*

— *toute famille génératrice de n vecteurs de E est une base de E.*

1.3 Somme, intersection et sous-espace supplémentaires

Nous commençons avec un rappel. Si $A, B \subset X$ sont deux sous-ensembles d'un ensemble X, alors leur intersection est l'ensemble

$$A \cap B = \{x \in X;\ x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

On observe :

Proposition 1.14 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $V, W \subset E$ deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $V \cap W$ est un sous-espace vectoriel de E aussi.*

Preuve : Pour vérifier que $V \cap W$ est un sous-espace vectoriel de E, on doit vérifier les conditions de la définition 1.2.

On observe que $V \cap W$ est non-vide parce que $0_E \in V$ et $0_E \in W$, donc $0_E \in V \cap W$.

De plus, si $u, v \in V \cap W$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors, vu que V et W sont des sous-espaces vectoriels de E,

$$u + v, \in V \quad \lambda u \in V, \quad u + v \in W \quad \text{et} \quad \lambda u \in W$$

et donc $u + v \in V \cap W$ et $\lambda u \in V \cap W$. □

Une autre construction qu'on peut faire avec deux sous-espaces est leur somme :

Définition 1.15 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $V, W \subset E$ deux sous-espaces vectoriels. Alors, leur somme est*

$$V + W = \{v + w;\ v \in V,\ w \in W\}.$$

On a :

Proposition 1.16 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $V, W \subset E$ deux sous-espaces vectoriels. Alors $V + W$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Exemples:

1. On a

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix};\ x \in \mathbb{R} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix};\ y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

2. mais aussi

$$\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

3. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u_1, \ldots, u_k \in E$ et $v_1, \ldots, v_m \in E$, alors

$$\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_m) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k) + \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_m)$$

4. Dans $\mathbb{C}[x]$ on a

$$\mathrm{Vect}(x^2) + \mathrm{Vect}(x^{17}) = \left\{a \cdot x^2 + b \cdot x^{17};\ a, b \in \mathbb{C}\right\}$$

5. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$ est un sous-espace, alors

$$F + F = F.$$

Si on regarde les examples ci-dessus, on voit que si $u \in V + W$, alors par défintion il existe $v \in V$ et $w \in W$ tels que $u = v + w$, mais ces vecteurs v et w ne sont pas forcement uniques. Par exemple, dans le deuxième exemple, on peut écrire

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dans la preuve de la proposition suivante on va voir que cela est un effet du fait que

$$\left(\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) \bigcap \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \neq \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Définition 1.17 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $V, W \subset E$ deux sous-espaces. Si*

— $V + W = E$ *et*

— V *et* W *sont en somme directe, c'est-à-dire :* $V \cap W = \{0_E\}$

alors on dit que V et W sont <u>supplémentaires</u> et on écrit

$$E = V \oplus W.$$

Donc, si deux sous-espaces V et W de E sont supplémentaires, tout vecteur dans E s'écrit de maniere *unique* comme somme d'un vecteur de V et un vecteur de W :

Proposition 1.18 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $V, W \subset E$ deux sous-espaces. Alors*

$$E = V \oplus W \quad \textit{ssi} \quad \forall u \in E\ \exists! v \in V \ \textit{et}\ \exists! w \in W \ \textit{tels que}\ u = v + w.$$

Preuve : Pour prouver l'équivalence ci-dessus, on prouve les implications dans les deux sens.

"$\Rightarrow$" On suppose que $E = V \oplus W$, alors en particulier $E = V + W$. Soit $u \in E$, il existe $v \in V$ et $w \in W$ tels que $u = v + w$. On suppose que u s'écrit aussi $u = v' + w'$ avec $v' \in V$ et $w' \in W$, alors

$$\underbrace{v - v'}_{\text{dans } V} = \underbrace{w' - w}_{\text{dans } W} \in V \cap W = \{0_E\}.$$

On en déduit donc que $v = v'$ et que $w = w'$, la décomposition de u en un éleement de V et un élément de W est donc unique.

"$\Leftarrow$" On suppose que : $\forall\ u \in E$, $\exists!\ (v, w) \in V \times W$ tel que $u = v + w$. En particulier, l'existence d'une telle décomposition assure que $E = V + W$. Il suffit donc de montrer que $V \cap W = \{0_E\}$. Procédons par l'absurde et supposons que cela soit faux, c'est à dire qu'il existe $x \neq 0_E$ dans $V \cap W$. Dans ce cas, 0_E peut se décomposer de deux façons :

$$0_E = \underbrace{0_E}_{\in V} + \underbrace{0_E}_{\in W} = \underbrace{x}_{\in V} - \underbrace{x}_{\in W},$$

ce qui contredit l'hypothèse de départ.

$\square$

Exemples:

1. On a
$$\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \oplus \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

2. Si $E = \mathbb{R}^3$ et
$$V = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad W = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
alors V et W ne sont pas supplémentaires, parce que par exemple
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V \cap W.$$

Chapitre 2

Applications linéaires

2.1 Défintion et premiers exemples

Maintenant on va étudier les applications entre les espaces vectoriels. On considera les applications qui préservent l'addition et la multiplication, c'est-à-dire les applications linéaires :

Définition 2.1 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application vérifiant :*

$$f(u+v) = f(u) + f(v)\ \forall u, v \in E, \quad et \quad f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)\ \forall v \in E,\ \lambda \in \mathbb{K}$$

Observons qu'une manière équivalente de définir une application linéaire est dire que c'est une application $f : E \to F$ telle que

$$f(u + \lambda \cdot v) = f(u) + \lambda \cdot f(v)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u, v \in E$.

Exemples:

1. L'application $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ définie par

$$f(x, y) = (3x + y, -x + 2y),\ x, y \in \mathbb{C}$$

est linéaire. Nous le vérifions :

$$\begin{aligned} f(x + x', y + y') &= \Big(3(x + x') + (y + y'), -(x + x') + 2(y + y')\Big) \\ &= \Big(3x + y, -x + 2y\Big) + \Big(3x' + y', -x' + 2y'\Big) \\ &= f(x, y) + f(x', y') \end{aligned}$$

pour tous $x, y, x', y' \in \mathbb{C}$. De plus,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \Big(3 \cdot \lambda x + \lambda \cdot y), -\lambda x + 2 \cdot \lambda y\Big)$$
$$= \lambda \cdot \Big(3x + y, -x + 2y\Big)$$
$$= \lambda \cdot f(x, y)$$

pour tous $\lambda, x, y \in \mathbb{C}$

2. Soit
$$C([0,1], \mathbb{R}) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R};\ f \text{ continue}\}.$$
Alors l'aplication $I : C([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par
$$I(f) = \int_0^1 f(x)dx, \quad f \in C([0,1], \mathbb{R})$$
est linéaire.

3. L'application $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) = a_0 + a_1 \cdot 2 + \ldots + a_n \cdot 2^n$$
pour tout polynome $a_0 + a_1 x \ldots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$, est linéaire. Donc il s'agit l'application qui évalue les polynomes dans $\mathbb{R}[x]$ à 2.

4. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, où on voit $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, définie par
$$f(x, y) = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$
est linéaire.

5. L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ définie par
$$f(a, b, c) = a + b \cdot x + c \cdot x^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$
est linéaire.

6. Applications de la forme $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(x) = a \cdot x + b, \quad x \in \mathbb{R}$$
où $a, b \in \mathbb{R}$ sont des constantes, ne sont *pas* linéares si $b \neq 0$. Parce que, par exemple, $g(2) = 2 + b \neq 2 \cdot g(1) = 2 + 2b$ si $b \neq 0$.

2.2 Premières propriétés

Il s'avère qu'une application linéaire préserve aussi toujours l'élement zéro :

Proposition 2.2 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire, alors*

$$f(0_E) = 0_F.$$

Preuve : Par linéarité, et vu que $2 \cdot 0_E = 0_E$, on a

$$f(0_E) = f(2 \cdot 0_E) = 2 \cdot f(0_E).$$

Si on soustrait $f(0_E)$ des deux côtés, alors on obtient

$$0_F = f(0_E).$$

□

De plus, compositions d'applications linéaires sont linéaires :

Proposition 2.3 *Soient U, V et W trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : U \to V$ et $g : V \to W$ deux applications linéaires, alors l'application*

$$g \circ f : U \to W$$

définie par

$$(g \circ f)(u) = g(f(u)) \quad \forall u \in U,$$

est aussi linéaire.

Preuve : Supposons que $u, v \in U$, alors

$$\begin{aligned}(g \circ f)(u + v) &= g(f(u + v)) \\ &= g(f(u) + f(v)) \\ &= g(f(u)) + g(f(v)) \\ &= (g \circ f)(u) + (g \circ f)(v),\end{aligned}$$

où on a utilisé d'abord le linéarité de f et après le linéarité de g.

De plus, si nous prenons $u \in U$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\lambda u) &= g(f(\lambda u)) \\ &= g(\lambda \cdot f(u)) \\ &= \lambda \cdot g(f(u)) \\ &= \lambda \cdot (g \circ f)(u).\end{aligned}$$

Et donc $g \circ f : U \to W$ est linéaire. □

2.3 Matrices

2.3.1 La matrice associée à une application linéaire

Les matrices donnent une façon simple d'encoder les applications linéaires :

Définition 2.4 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soient $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ et $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ des bases pour E et F respectivement. Si $A : E \to F$ est une application linéaire, alors la <u>matrice</u> de A par rapport aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ est le tableau de nombres*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

tels que

$$A(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} f_j, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Nous écrivons $\mathrm{Mat}_{n \times m}(\mathbb{K})$ pour l'ensemble de matrices de n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque:

- Si $A : E \to F$ est une application linéaire, alors le nombre de lignes de sa matrice est la dimension de F et le nombre de colonnes de sa matrice est la dimension de E.
- Si $A : E \to F$ est une application linéaire, alors typiquement on appelle sa matrice A aussi.
- Si $E = \mathbb{K}^m$ et $F = \mathbb{K}^n$ et on ne spécifie aucune base, alors on suppose qu'on travaille avec les bases canoniques.
- On écrit aussi :
$$(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$
- Dans la définition ci-dessus, nous utilisons bien le fait que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des bases. Cela implique qu'il ya une combinaison linéaire des vecteurs dans $\mathcal{F}$ unique telle que $A(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} f_j$ et donc les nombres a_{ji} sont bien définis.

Exemples:

1. La matrice de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x+y, -3x+4y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ est
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$
2. La matrice de l'application $f : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$ définie par $f(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = a_0 + a_1 \cdot 2 + \ldots + a_n \cdot 2^n$ pour tout polynome $a_0 + a_1x \ldots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$, par rapport aux bases $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ de $\mathbb{R}_n[x]$ et (1) de $\mathbb{R}$ est :
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & \ldots & 2^n \end{pmatrix}.$$
3. La matrice de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, où on voit $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, définie par $f(x, y) = x + iy$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, par rapport aux à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et la base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$ est :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
4. La matrice de l; application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ définie par $f(a, b, c) = a + b \cdot x + c \cdot x^2$ pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et la base $(1, x, x^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$ est :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
5. Soit $\theta \in [0, 2\pi]$. alors la rotation dans le sens anti-horaire d'angle θ dans le plan $\mathbb{R}^2$ est une application linéaire et sa matrice est :
$$r_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Si on a la matrice d'une application linéaire $A : E \to F$, on calcule facilement l'image de tout vecteur sous A. On utilise le fait que si $v \in E$ et $(e_1, \ldots, e_m)$ est un base de E, alors il existe $v_1, \ldots v_m \in \mathbb{K}$ uniques tels que $v = \sum_{i=1}^m v_ie_i$ et donc
$$A(v) = A\left(\sum_{i=1}^m v_ie_i\right) \overset{\text{linéarité}}{=} \sum_{i=1}^m v_i \cdot A(e_i) = \sum_{i=1}^m v_i \cdot \sum_{j=1}^n a_{ji}f_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ji}v_i\right) f_j.$$
C'est-à-dire : l'image d'un vecteur v sous une application linéaire A se calcule en termes de la matrice de A (les a_{ij}) et les coefficients de v par rapport à la base de E (les v_i).

Remarque: Ci-dessus on voit aussi que la matrice d'une application linéaire détermine complètement l'application.

Faisons un exemple concrèt :

Exemple: Soit $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire avec la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Si $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, alors

$$A(v) = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ -1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'opération ci-dessus est la multiplication d'un vecteur avec une matrice :

Définition 2.5 *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K}) \quad et \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m.$$

Alors

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}v_j \\ \sum_{j=1}^m a_{2j}v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}v_j \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

Et on obtient donc :

Proposition 2.6 *Soit $A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ une application linéaire et $v \in \mathbb{K}^m$. Alors, on a*

$$A(v) = A \cdot v,$$

où à droite on interprète A comme une matrice.

2.3.2 Composition d'applications et multiplication de matrices

On va prendre deux applications linéaires $B : E \to F$ et $A : F \to G$ entre des espaces vectoriels E, F et G et essayer de calculer la matrice de l'application linéaire $A \circ B : E \to G$. Donc on suppose qu'on a trois bases $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_l)$, $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_m)$ et $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_n)$ de E, F et G respectivement.

On suppose maintenant qu'on connait les matrices $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m,\\ 1\leq j\leq l}}$ de A et $(b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n,\\ 1\leq j\leq m}}$ de B. Pour calculer la matrice de $A \circ B$, on doit exprimer les images des vecteurs dans $\mathcal{E}$ sous $A \circ B$ en termes de la base $\mathcal{G}$. On a :

$$\begin{aligned}
(A \circ B)(e_i) &= A(B(e_i)) \\
&= A(\sum_{j=1}^{m} b_{ji} f_j) \\
&\overset{\text{linéarité}}{=} \sum_{j=1}^{m} b_{ji} \cdot A(f_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} b_{ji} \sum_{k=1}^{n} a_{kj} g_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{kj} b_{j_i} \right) g_k
\end{aligned}$$

Donc la matrice de $A \circ B$ est

$$\left(\sum_{j=1}^{m} a_{kj} b_{j_i} \right)_{\substack{1 \leq k \leq n, \\ 1 \leq i \leq l}} \in \mathrm{Mat}_{n \times l}(\mathbb{K})$$

Cette opération est la multiplication de deux matrices L'opération ci-dessus est la multiplication d'un vecteur avec une matrice :

Définition 2.7 *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lm} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{l \times m}(\mathbb{K}) \quad et \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{n2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$$

alors leur <u>produit</u> est la matrice

$$A \cdot B := \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} a_{1j} b_{j1} & \sum_{k=1}^{m} a_{1j} b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{m} a_{1j} b_{jn} \\ \sum_{j=1}^{m} a_{2j} b_{j1} & \sum_{k=1}^{m} a_{2j} b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{m} a_{2j} b_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} a_{lj} b_{j1} & \sum_{j=1}^{m} a_{lj} b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{m} a_{lj} b_{jn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{l \times n}(\mathbb{K})$$

Remarque: Les tailles des matrices sont très importantes dans la définition ci-dessus. On peut multiplier la matrice A avec la matrice B si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Faisons un exemple concrèt :

Exemple: Nous avons

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 7 + 2\cdot 0 + 3\cdot(-3) & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot(-1) \\ -3\cdot 7 + 0\cdot 0 + 5\cdot(-3) & -3\cdot 1 + 0\cdot 2 + 5\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -36 & -8 \end{pmatrix}$$

Remarque: Il faut faire très attention lorsque l'on multiplie des matrices : pour deux matrices carrées – c'est-à-dire avec les même nombres de lignes et colonnes – A et B, on a en général

$$AB \neq BA.$$

C'est par exemple le cas pour

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire : le **produit de matrices n'est pas commutatif**.

Cependant, dans certains cas, on a $AB = BA$, et on dit alors que les matrice A et B commutent.

2.4 Noyau, image, Théorème du rang

Dans cette section nous allons nous poser les questions de injectivité, surjectivité et bijectivité d'applications linéaires. Nous rappellons les définitions :

Définition 2.8 *Soient A, B deux ensembles et $f : A \to B$ une application. Alors*
- *f est dite <u>injective</u> si pour tout $a \neq a' \in A$ on a que $f(a) \neq f(a')$.*
- *f est dite <u>surjective</u> si pour tout $b \in B$ il existe un $a \in A$ tel que $f(a) = b$.*
- *f est dite <u>bijective</u> si elle est injective et surjective.*

Rappellons qu'une application $f : A \to B$ est inversible si et seulement s'elle est bijective. On écrit $f^{-1} : B \to A$ pour son application inverse. C'est-à-dire la fonction telle que

$$f^{-1} \circ f(a) = a \quad \forall a \in A.$$

Pour étudier ces propriétés pour les applications linéaires, nous définissons :

Définition 2.9 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors*

— *L'image de f est l'ensemble*

$$\mathrm{Im}(f) := \{f(v);\ v \in E\}. \subset F$$

— *Le noyau de f est l'ensemble*[1]

$$\ker(f) := \{v \in E;\ f(v) = 0_F\} \subset E.$$

On fait quelques exemples :

Exemples:

1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors l'application $f : E \to F$ définie par $f(v) = 0_F$ pour tout $v \in E$. Alors f est linéaire et :

$$\mathrm{Im}(f) = \{0_F\} \quad \text{et} \quad \ker(f) = E.$$

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application donnée par la matrice $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors nous allons prouver que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}.$$

Nous commençons avec l'image de f. Nous avons

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ y \end{pmatrix}.$$

Pour prouver que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$, nous devons prouver que pour tout $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ nous pouvons trouver $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ y \end{pmatrix}.$$

Donc nous devons resoudre le système d'équations

$$\begin{cases} a = x + 2y \\ b = y. \end{cases}$$

Ce système admet la solution

$$\begin{cases} x = a - 2b \\ y = b \end{cases}$$

et donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

1. La notation 'ker' vient du mot anglais "kernel"

Pour notre deuxième affirmation – le fait que $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ – nous devons trouver tous les $x, y \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{pmatrix} x+2y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc nous devons resoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x+2y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

et nous trouvons bien $x = y = 0$ comme unique solution.

3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application donnée par la matrice $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ alors nous allons prouver que

$$\ker(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Ici le noyau est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.

Supposons que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(f)$. Alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; \begin{array}{rl} x+2y & = 0 \\ \text{et } 2x+4y & = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2;\ x = -2y \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix};\ y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application donnée par la matrice $f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ alors nous allons prouver que

$$\ker(f) =$$

Nous avons

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ x+y+2z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ x = -y-2z \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -y-2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Remarque: Observons que $f : E \to F$ est surjective si et seulement si

$$\mathrm{Im}(f) = F.$$

On a aussi :

Proposition 2.10 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors f est injective si et seulement si* $\ker(f) = \{0_E\}$.

Preuve : Nous allons prouver que $\ker(f) \neq \{0_E\}$ si et seulement si f n'est pas injective.

Si f n'est pas injective alors il existe deux vecteurs $v \neq w \in E$ tels que

$$f(v) = f(w)$$

et donc

$$f(v) - f(w) = f(v - w) = 0_F.$$

et donc $v - w \in \ker(f)$. Vu que $v - w \neq 0_E$, $\ker(f) \neq \{0_E\}$.

Par contre si $\ker(f) \neq \{0_E\}$, alors il existe $0_E \neq v \in ker(f)$ et donc

$$0_F = f(0_E) = f(v)$$

et f n'est pas injective. □

On a donc :

Corollaire 2.11 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application linéaire $f : E \to F$ est inversible si et seulement si*

$$\ker(f) = \{0_E\} \quad \textit{et} \quad \mathrm{Im}(f) = F.$$

Dans ce cas on dit que f est une <u>isomorphisme</u> et que E et F sont <u>isomorphes</u>.

On a :

Remarque: Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $A : E \to F$ une application linéaire inversible. Alors la matrice associée à l'application inverse $A^{-1} : F \to E$ est la matrice unique (qu'on dénote A^{-1} aussi) telle que

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \mathrm{Id}_n$$

où n est la dimension de E et Id_n la matrice d'identité de taille n, c'est-à-dire la matrice $n \times n$ définie par :

$$(\mathrm{Id}_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour $i, j = 1, \ldots, n$.

Dans les exemples ci-dessus le noyau et l'image étaient aussi toujours des sous-espaces vectoriels des espaces vectoriels correspondants. Cela n'était pas une coïncidence :

Proposition 2.12 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors :*

— $\ker(f)$ *est un sous-espace vectoriel de E.*

— $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

Preuve : Exercice. □

Cette observation nous permet de définir le rang d'une application linéaire :

Définition 2.13 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors on définit le <u>rang</u> de f par :*

$$\mathrm{rang}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Nous avons :

Théorème 2.14 (Théorème du rang) *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors*

$$\dim(\ker(f)) + \mathrm{rang}(f) = \dim(E).$$

Exemple: Reprenons l'exemple de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par la matrice $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Nous avons vu que

$$\ker(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Donc $\dim(\ker(f)) = 1$. Le théorème du rang implique maintenant que

$$\mathrm{rang}(f) = \dim(\mathbb{R}^2) - 1 = 1.$$

Nous connaissons donc la dimension de l'image de f sans avoir calculé l'image même.

Un utilisant la proposition 2.10, la remarque là-dessus et le théorème du rang on obtient :

Corollaire 2.15 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire.*
- *Si f est surjective, alors* $\dim(E) \geq \dim(F)$
- *Si f est injective, alors* $\dim(E) \leq \dim(F)$.

En particulier, si E et F sont isomorphes, $\dim(E) = \dim(F)$.

On observe donc aussi que une matrice répresentant une isomorphisme est forcement une matrice carré. Et que pour une matrice carré A, les trois énoncés suivantes sont equivalentes :
- A est surjective.
- A est injective.
- A est inversible.

Chapitre 3

Réduction de matrices carrées

3.1 Intoduction

Une matrice diagonale est une matrice carrée dont tout les coordonnées non-diagonales sont nulles, comme

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si on applique cette matrice à un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x_1 \\ -3x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Donc, géométriquement, ce que fait cette matrice est très facile à décrire : elle multiplit les vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3) par 7, -3 et 1 respectivement. On va dire que ces vecteurs et ces nombres sont les vecteurs et les valeurs propres de la matrice :

Définition 3.1 *Soit $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ alors, si $x \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ sont tels que*

$$A \cdot x = \lambda \cdot x,$$

on dit que x est un vecteur propre de A avec valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$.

On observe que :

Proposition 3.2 *Si $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ et A admet une famille libre $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs propres. Alors cette famille est une base de $\mathbb{K}^n$ et par rapport à cette base A est diagonale.*

La question qu'on va se poser dans ce chapitre est quand et comment on peut trouver des vecteurs propres pour une matrice plus générale.

3.2 Noyaux et déterminants

On observe que si $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}^n$ est un vecteur propre pour A avec valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$A \cdot x = \lambda x \quad \Rightarrow \quad \Big(A - \lambda \cdot \mathrm{Id}_n\Big) \cdot x = 0_{\mathbb{K}^n}$$

C'est à dire, l'ensemble de vecteurs propre de valeur propre λ est :

$$\ker \Big(A - \lambda \cdot \mathrm{Id}_n\Big).$$

Donc la question est : quand (pour quel $\lambda \in \mathbb{K}$) est $\ker\Big(A - \lambda \cdot \mathrm{Id}_n\Big) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$? Vu que $A - \lambda \cdot \mathrm{Id}_n$ est une matrice carrée, une question équivalente est : quand est $A - \lambda \cdot \mathrm{Id}_n$ inversible ?

L'outil qu'on va utiliser pour cette question est le <u>déterminant</u> :

Définition 3.3 *On définit inductivement :*

— *Le déterminant d'une matrice* 1×1 *est*

$$\det(a) = a, \quad (a) \in \mathrm{Mat}_{1\times 1}(\mathbb{K})$$

— *Si* $n \geq 2$ *et* $A = \Big(a_{ij}\Big)_{i,j=1}^{n} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *alors*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot \det(A_{(i1)}), \quad A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}),$$

où $A_{(i1)}$ *est la matrice* $(n-1)\times(n-1)$ *qu'on obtient si on enlève la première colonne et la i-ème ligne de* A.

On fait un exemple :

Exemples:

— Si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$, alors

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot \det(d) - c \cdot \det(b) = ad - bc.$$

— On a

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= 1 \cdot (-1 \cdot 0 - 0 \cdot 1) - 2 \cdot (0 \cdot 0 - 3 \cdot 1) + 3 \cdot (0 \cdot 0 - 3 \cdot (-1)) = 15$$

— Soit $n \geq 1$, on a
$$\det(\mathrm{Id}_n) = 1.$$

En fait on peut calculer le déterminant à partir de chaque colonne et chaque ligne :

Proposition 3.4 *Si $n \geq 2$ et $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ alors :*

— *en utilisant la j-ème colonne : pour tout $1 \leq j \leq n$:*
$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{(ij)}), \quad A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}),$$
où $A_{(ij)}$ est la matrice $(n-1)\times(n-1)$ qu'on obtient si on enlève la j-ème colonne et la k-ème ligne de A.

— *en utilisant la i-ème ligne : pour tout $1 \leq k \leq n$:*
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{(ij)}), \quad A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}),$$
où $A_{(ij)}$ est la matrice $(n-1)\times(n-1)$ qu'on obtient si on enlève la j-ème colonne et la k-ème ligne de A.

Esquisse de preuve : Il faut tout d'abord observer que toutes les expressions qu'on a pour $\det(A)$ sont de la forme
$$\sum_{\{i_1,\ldots,i_n\}=\{1,\ldots,n\}} \varepsilon_{i_1,\ldots,i_n} \cdot a_{i_1 1} \cdot a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$
où $\varepsilon_{i_1,\ldots,i_n} \in \{\pm 1\}$ pour tout $i_1,\ldots,i_n$. A priori, ces coefficients $\varepsilon_{i_1,\ldots,i_n}$ dépendent de la colonne ou la ligne qu'on utilise pour le développement. Mais on peut prouver qu'ils sont égaux. □

De plus on a :

Proposition 3.5 *(a) Soit $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Si $\widetilde{A} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ est obtenue de A en échangant sa j-ème colonne avec sa k-ème. Alors*
$$\det\left(\widetilde{A}\right) = (-1)^{j-k}\det(A).$$

(b) Soit $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Si $\widetilde{A} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ est obtenue de A en ajoutant une colonne de A à une autre. Alors
$$\det\left(\widetilde{A}\right) = \det(A).$$

(c) Soient $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ alors
$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot (B)$$

(d) $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$.

Esquisse de preuve : (a) est une conséquance directe de la proposition précédante.

Pour (b), on suppose que $\widetilde{A}$ est obtenue en ajoutant la j-ème à la k-ème colonne. On observe, en utilisant la proposition précédante pour la k-ème colonne, que

$$\det\left(\widetilde{A}\right) = \det(A) + \det(A')$$

où A' est la matrice qu'on obtient de A si on remplace la k-ème colonne par la j-ème. Donc il faut prouver que $\det(A') = 0$. Pour cela on utilise (a). On a $\det(A') = (-1)^{k-j-1}\det(A'')$ ou A'' est obtenue de A' en échangant sa $(j+1)$-ème colonne avec sa k-ème. En particulier, sa j-ème colonne est égale à sa $(j+1)$-ème colonne. Si on échange ces deux, alors A'' ne change pas, donc on obtient

$$\det(A'') = -\det(A'')$$

et donc

$$\det(A') = (-1)^{k-j-1}\det(A'') = 0.$$

Pour (c), on observe que si on multiplit une ligne avec $\lambda \in \mathbb{K}$, alors le déterminant se multiplit avec λ aussi. Avec cela et (b), on peut exprimer le déterminant de A en termes du déterminant d'une matrice avec que des zéros en dessous de la diagonale – une matrice triangulaire supérieure. Après on prouve le théorème pour les matrices triangulaires supérieures en utilisant le fait (qu'on prouve par récurrence) que

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

si A est une matrice triangulaire supérieure.

Pour (d), on utilise que si A est inversible, alors $A^{-1}\cdot A = \mathrm{Id}_n$ et donc par (c),

$$\det(A^{-1})\det(A) = 1$$

et donc

$$\det(A^{-1}) \neq 0.$$

En revance, si $\det(A^{-1}) \neq 0$, on peut écrire une formule explicite pour A^{-1}. □

Exemple: Dans l'exemple précédant nous avons calculé que

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 15.$$

Cette matrice est donc inversible.

3.3 Valeurs propres

En utilisant la proposition 3.5 et nos observations dans la section 3.1, on obtient :

Proposition 3.6 *soit $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors λ est une valeur propre de A si et seulement si*

$$\det\left(A - \lambda \cdot \mathrm{Id}_n\right) = 0$$

On définit :

Définition 3.7 *Soit $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Alors, le polynôme caracteristique de A est le polynôme*

$$\chi_A(x) := \det\left(A - x \cdot \mathrm{Id}_n\right) \in \mathbb{K}[x].$$

Donc les valeurs propres de A sont exactement les racines de $\chi_A(x)$.

Exemples:

— Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$\chi_A(x) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix}$$

$$= (2-x)(1-x) - 1 = x^2 - 3x + 1.$$

Les racines de ce polynome sont

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

et ces sont donc les valeurs propres de A.

— Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$\chi_A(x) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2.$$

Donc A admet une seule valeur propre : 1.

On observe :

Proposition 3.8 *Soit $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Alors $\chi_A(x)$ est un polynôme de degré n.*

Et donc on a :

Corollaire 3.9 *Soit $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Alors A admet au plus n valeurs propres distinctes.*

3.4 Vecteurs propres

On a vu dans la section 3.1 que :

Proposition 3.10 *Soit $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$, alors l'ensemble de vecteurs propres pour λ est :*

$$E_\lambda = \ker\left(A - \lambda \cdot \mathrm{Id}_n\right).$$

On l'appelle l'espace propre pour λ.

Exemples:

— Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a vu que ses valeurs propres sont $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Pour trouver le premier espaces propre il faut resoudre l'équation

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2}x \\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}y \end{pmatrix}$$

On trouve $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}x = y$ et donc

$$E_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\right).$$

Pour le deuxième valeur propre on trouve :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2}x \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}y \end{pmatrix}$$

et donc $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x = y$ et

$$E_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\right).$$

— Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a vu que A admet une seule valeur propre : 1. Donc on résout :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et donc $y = 0$ et

$$E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

3.5 Matrices diagonalisables

On revient au problème orginal : changer la base pour que la matrice devient diagonale.

On commence avec un exemple :

Exemples:

— Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors, on a vu que ses valeurs propres sont $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ avec espaces propres

$$E_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\right).$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ donc on peut écrire A par rapport à cette base. Ce qu'on trouve est :

$$\begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

On dit que A est <u>diagonalisable</u>.

— La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable parce que ses vecteurs propres ne forment pas une base.

Supposons que la matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ est diagonalisable et $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de vecteurs propres de A. Alors la matrice B qui a les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ comme colonnes a la propriété que

$$Be_i = v_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

De plus, cette matrice est inversible, et on a

$$B^{-1}v_i = e_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

En fait, on trouve B^{-1} en écrivant les e_i dans la base $(v_1, \ldots, v_n)$, c'est-à-dire :

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} \left(B^{-1}\right)_{ji} v_j.$$

En particulier on trouve

$$A = B \cdot D \cdot B^{-1},$$

où D est la matrice diagonale avec les valeurs propres de A sur la diagonale.

Pour cette raison on définit :

Définition 3.11 *Une matrice* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *est* *diagonalisable* *si il existe une matrice diagonale* $D \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *et une matrice inversible* $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *telles que*

$$A = B \cdot D \cdot B^{-1}.$$

Les observations ci-dessus impliquent :

Proposition 3.12 $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des espaces propres de* A *est égale à* n.

Exemple: Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors, on a vu que ses valeurs propres sont $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ avec espaces propres

$$E_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\right).$$

Dans la notation ci-dessus on trouve

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

et :

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

3.6 Calculer l'inverse d'une matrice

Si $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ est inversible, alors il existe une matrice A^{-1} telle que

$$A^{-1} \cdot A = \mathrm{Id}_n.$$

On peut calculer A^{-1} en résoudant ce sytème de n^2 equations. Vu le nombre d'équations, c'est utile de systématiser un peu les calculs. Donc dans cette section, on décrit un algorithme pour trouver l'inverse d'une matrice.

Prenons un exemple. On met

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D'abord on met l'identité $n \times n$ a coté de notre matrice. Donc on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Le but est maintenant de réduire la matrice à gauche (A) à l'identité. On fait cela par l'addition de multiples des lignes les unes aux autres. On applique les mêmes opérations à la matrice a droite.

Donc pour notre matrice on enlève d'abord 2 fois la première ligne de la deuxième :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Après on multiplit la deuxième ligne avec $-\frac{1}{7}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On soustrait la deuxième ligne de la troisième :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 1 \end{array}\right)$$

On multiplit la troisième ligne avec $\frac{7}{8}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{array}\right)$$

On additionne $\frac{1}{7}$ fois la troisième ligne à la deuxième :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{array}\right)$$

Et enfin on soustrait 3 fois la deuxième ligne de la première :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{array}\right)$$

L'inverse est la matrice à droite. C'est à dire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$$