TD 1: Espaces vectoriels, familles de vecteurs, dimension finie.

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels réels?

1. $\mathbb{C}$, où l'addition et la multiplication par scalaires sont données par l'addition et multiplication usuelles.
2. $\mathbb{C}$, avec addition et multiplication par scalaires données par: $x+y := 0$ et $\lambda \cdot x := 0$ $\forall x, y, \lambda \in \mathbb{C}$ respectivement.
3. L'ensemble des fonctions réelles à valeurs réelles dérivables en tout point. C'est-à-dire
$$E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\ f \text{ dérivable}\}$$
avec addition et multiplication par scalaires définies par:
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \quad \forall f, g \in E, x \in \mathbb{R}.$$
4. L'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle $x'(t) + \sqrt{t^2 + e^{-t^5}}x(t) = 0$. C'est-à-dire:
$$E' = \left\{ x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} x \text{ dérivable} \\ x'(t) + \sqrt{t^2 + e^{-t^5}}x(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$
5. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $x'(t) + \sqrt{t^2 + e^{-t^5}}x(t) = 1$. C'est-à-dire:
$$E'' = \left\{ x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} x \text{ dérivable} \\ x'(t) + \sqrt{t^2 + e^{-t^5}}x(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$
6. L'ensemble des suites réelles convergentes. C'est-à-dire:
$$\left\{ (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots) \;\middle|\; \begin{array}{c} a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \\ \exists \ell \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \lim_{n\to\infty} a_n = \ell \end{array} \right\}$$
7. L'ensemble des suites réelles divergentes. C'est-à-dire:
$$\left\{ (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots) \;\middle|\; \begin{array}{c} a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \text{ où } \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \end{array} \right\}$$

Exercice 2. Dessiner les ensembles suivants. Lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $\{(0,y) |\ y \in \mathbb{R}\}$.
2. $\{(0,y) |\ y \geqslant 0\}$.
3. $\{(0,y) |\ y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,0) |\ x \in \mathbb{R}\}$.
4. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ |x| = |y|\}$.
5. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x = y\}$.
6. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 7x + 12y = 0\}$
7. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 7x^2 + 12y = 0\}$

Exercice 3. Les familles suivantes, sont elles libres?

1. La famille (u_1, u_2) de $\mathbb{R}^2$, où:
$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. La famille (u_1, u_2) de $\mathbb{R}^2$, où:
$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. La famille (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$, où:
$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. La famille (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$, où:
$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. La famille (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}[x]$, où: $u_1 = x$, $u_2 = 2x + x^2$ et $u_3 = 3x^2$.

6. La famille (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}[x]$, où: $u_1 = x$, $u_2 = 2x + x^2$ et $u_3 = 3x^3$.

7. $\{t \mapsto \cos(t), t \mapsto \sin(t)\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

Exercice 4. Déterminer la dimension et donner une base pour les espaces vectoriels suivants:

1. $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. $\mathbb{R}_2[x]$

3. $$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \subset \mathbb{R}^3$$

Exercice 5. Les sous-espaces vectoriels suivants sont-ils en somme directe dans $\mathbb{R}^3$?

1. $F = \mathrm{Vect}((0, 1, 0))$ et $G = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$.

2. $F = \mathrm{Vect}((0, 1, 0), (1, 1, 0))$ et $G = \mathrm{Vect}(1, 0, 0)$.

Exercice 6. Soit E l'espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F l'ensemble des $f \in E$ vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F.

Exercice 7. On considère les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ h \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ \frac{h}{3} \end{pmatrix}$. Déterminer pour quelles valeurs de $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ la famille $\{u, v, w\}$ est libre et pour quelles valeurs elle est liée.

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^n$, donner un exemple de sous-espace vectoriel de dimension 0, de dimension 1, de dimension 2,... de dimension $n - 1$.

Exercice 9. Les espaces vectoriels réels suivants sont-ils de dimension finie ? Si oui, donner leur dimension et une base.

1. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $x(t)' + 2t \cdot x(t) = 0$.

2. L'ensemble des suites réelles.

3. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 3x + 5y\}$.

Exercice 10. On considère $a_0, \dots a_n$ $n + 1$ nombres réels distincts et $b_0, \dots, b_n$ $n + 1$ nombres réels (pas forcément distincts). On rappelle que l'ensemble des polynômes réels de dimension inférieure à n (noté $\mathbb{R}_n[X]$) est un espace vectoriel de dimension finie $n + 1$.

1. Construire de manière explicite une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ (notée $(L_0, \dots L_n)$) telle que pour tout $i \in [|0, n|]$ on a $L_i(a_i) = 1$ et $L_i(a_j) = 0$ si $j \neq i$.

2. Montrer que cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout i on ait $P(a_i) = b_i$ et l'expliciter.