**TD 2: Applications linéaires.**

**Exercice 1.** Sont les applications suivantes linéaires ? Si oui, donner des matrices pour les applications par rapport à vos bases préfèrées.

1. L'application $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_1(x, y, z) = x + y + z, \quad x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$
2. L'application $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$f_2(x, y) = (x + y, x, \pi \cdot y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$
3. L'application $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$f_3(x, y) = (x + y, x, \pi \cdot y + 2), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$
4. L'application $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, où on interprète $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel réel, définie par
$$f_4(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$
5. L'application $f_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, où on interprète $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel réel, définie par
$$f_5(z) = e^{i\theta} \cdot z, \quad z \in \mathbb{C}.$$
où $\theta \in [0, 2\pi[$.
6. L'application $f_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}[x]$ définie par
$$f_6(a, b) = a \cdot (x + x^2) + b \cdot (x - x^2), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$
7. L'application $f_7 : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_7(a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2) = \int_0^2 \left(a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2\right) dx, \quad a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$$
8. L'application $f_8 : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ définie par
$$f_8(P) = \frac{d}{dx} P(x), \quad P \in \mathbb{R}_2[x]$$

**Exercice 2.**

1. On se place dans $\mathbb{R}^3$. On considère le plan
$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ z = x + y \right\}$$
Rappeler sa dimension et en donner une base.
2. Trouver un supplémentaire de $P$ (i.e. trouver $D$ tel que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$).
3. Si $E$ est un espace vectoriel, $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ supplémentaires ($F \oplus G = E$). Tout élément de $E$ se décompose de manière unique sous la forme $e = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. On appelle *projecteur sur $F$ parallèlement* à $G$ l'application suivante:
$$p : e = f + g \in E \mapsto f.$$
Montrer que c'est une application linéaire.

4. Montrer qu'elle vérifie $p \circ p = p$. Quel est son noyau et son image?

5. Dans l'exemple précédent, on considère la projection sur $P$ parallèlement à $D$. Exprimer cette projection dans la base canonique.

6. On appelle *symétrie par rapport à* $F$ *parallèlement* à $G$ l'application suivante:

$$s : e = f + g \mapsto f - g.$$

   Montrer que c'est une application linéaire.

7. Montrer qu'elle vérifie $s \circ s = \mathrm{Id}$. Quel est son noyau et son image? Quel est le lien entre $s$ et $p$?

8. Dans l'exemple précédent, on considère la symétrie sur $P$ parallèlement à $D$. Exprimer cette symétrie dans la base canonique.

**Exercice 3.** On considère les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Lesquelles peut-on multiplier et dans quel ordre ? Calculer ces produits.

2. Déterminer leurs noyaux.

3. Donner une base pour leurs noyaux.

**Exercice 4.** On considère l'espace vectoriel

$$E = \mathbb{C}^{\mathbb{C}} = \{(a_0, a_1, a_2, \ldots);\ a_k \in \mathbb{C}\ \forall k \in \mathbb{N}\}$$

1. On définit l'application $f_1 : E \to E$ par

$$f_1\Big((a_0, a_1, a_2, \ldots)\Big) = (a_1, a_2, a_3, \ldots), \quad (a_0, a_1, a_2, \ldots) \in E$$

   Est $f_1$ linéaire? Est elle injective ? Est elle surjective?

2. On définit l'application $f_2 : E \to E$ par

$$f_2\Big((a_0, a_1, a_2, \ldots)\Big) = (0, a_0, a_1, a_2 \ldots), \quad (a_0, a_1, a_2, \ldots) \in E$$

   Est $f_2$ linéaire? Est elle injective ? Est elle surjective?

**Exercice 5.** Quelles applications de l'exercice 1 sont surjectives ? Et quelles sont injectives ?

**Exercice 6.** Déterminer les noyaux des applications linéaires de l'exercice 1.

**Exercice 7.** Quelles sont les dimensions des images des matrices de l'exercice 3 ?