TD 2: Applications linéaires.

Exercice 1. Sont les applications suivantes linéaires ? Si oui, donner des matrices pour les applications par rapport à vos bases préfèrées.

1. L'application $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_1(x, y, z) = x + y + z, \quad x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$
2. L'application $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$f_2(x, y) = (x + y, x, \pi \cdot y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$
3. L'application $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$f_3(x, y) = (x + y, x, \pi \cdot y + 2), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$
4. L'application $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, où on interprète $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel réel, définie par
$$f_4(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$
5. L'application $f_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, où on interprète $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel réel, définie par
$$f_5(z) = e^{i\theta} \cdot z, \quad z \in \mathbb{C}.$$
où $\theta \in [0, 2\pi[$.
6. L'application $f_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}[x]$ définie par
$$f_6(a, b) = a \cdot (x + x^2) + b \cdot (x - x^2), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$
7. L'application $f_7 : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_7(a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2) = \int_0^2 \left(a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2\right) dx, \quad a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$$
8. L'application $f_8 : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ définie par
$$f_8(P) = \frac{d}{dx} P(x), \quad P \in \mathbb{R}_2[x]$$

Solution.

1. f_1 est bien linéaire parce que
$$f_1(x + x', y + y', z + z') = x + x' + y + y' + z + z' = f_1(x, y, z) + f_1(x', y', z')$$
et
$$f_1(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda \cdot f(x, y, z) \quad \forall x, x', y, y', z, z', \lambda \in \mathbb{R}.$$
La matrice de f par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et la base (1) de $\mathbb{R}$ est
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
2. f_2 est linéaire parce que
$$\begin{aligned} f_2(x + x', y + y') &= (x + x' + y + y', x + x', \pi \cdot y + \pi \cdot y') \\ &= (x + y, x, \pi \cdot y) + (x' + y', x', \pi \cdot y') = f(x, y) + f(y, y') \end{aligned}$$
et
$$f_2(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda y, \lambda x, \pi \cdot \lambda \cdot y) = \lambda f_2(x, y) \quad \forall x, x', y, y', z, z', \lambda \in \mathbb{R}.$$
La matrice de f_2 par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$$

3. f_3 n'est pas linéaire parce que

$$f_3(0,2) = (2,0,2\pi+2) \neq 2f(0,1) = (2,0,2\pi+4).$$

4. f_4 est linéaire parce que

$$f_4(x+x') = x+x' = f_4(x)+f_4(x') \quad \text{et} \quad f_4(\lambda x) = \lambda x = \lambda f_4(x) \quad \forall x, x', \lambda \in \mathbb{R}.$$

La matrice de f_4 par rapport aux bases (1) et $(1,i)$ de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ respectivement est

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. f_5 est linéaire parce que

$$f_5(z+z') = e^{i\theta}\cdot(z+z') = f_5(z)+f_5(z') \quad \text{et} \quad f_5(\lambda z) = e^{i\theta}\lambda z = \lambda f_5(z) \quad \forall z, z' \in \mathbb{C},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

On prend la base $(1,i)$ pour $\mathbb{C}$ et on calcule leurs images

$$f_5(1) = e^{i\theta} = \cos(\theta)\cdot 1 + \sin(\theta)\cdot i$$

et

$$f_5(i) = e^{i\theta}\cdot i = (\cos(\theta)+\sin(\theta)\cdot i)\cdot i = -\sin(\theta)\cdot 1 + \cos(\theta)\cdot i.$$

Donc la matrice de f_5 est

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

6. f_6 est linéaire parce que

$$f_6(a+a', b+b') = (a+a')\cdot(x+x^2) + (b+b')\cdot(x-x^2) = f_6(a,b)+f_6(b,b')$$

et

$$f_6(\lambda a, \lambda b) = \lambda a(x+x^2) + \lambda b(x-x^2) = \lambda f_6(a,b) \quad \forall a, a', b, b', \lambda \in \mathbb{R}.$$

La matrice de f_6 par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et la base $(1, x, x^2, x^3, \ldots)$ de $\mathbb{R}[x]$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

7. f_7 est linéaire parce que

$$\begin{aligned} f_7(a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+b_0+b_1\cdot x+b_2\cdot x^2) &= \int_0^2 \left(a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+b_0+b_1\cdot x+b_2\cdot x^2\right)dx \\ &= \int_0^2 \left(a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2\right)dx + \int_0^2 \left(b_0+b_1\cdot x+b_2\cdot x^2\right)dx \\ &= f_7(a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2) + f_7(b_0+b_1\cdot x+b_2\cdot x^2) \end{aligned}$$

et

$$f_7(\lambda\cdot(a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2)) = \int_0^2 \lambda\cdot\left(a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2\right)dx = \lambda\cdot\int_0^2 \cdot\left(a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2\right)dx = \lambda\cdot f_7(a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2)$$

pour tout $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, \lambda \in \mathbb{R}$.

On utilise les bases $(1, x, x^2)$ et (1) pour $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ respectivement. On a

$$f_7(1) = 2, \quad f_7(x) = 2 \quad \text{et} \quad f_7(x^2) = \frac{8}{3}$$

donc la matrice de f_7 est

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

8. f_8 est linéaire parce que

$$\begin{aligned} f_8(a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2) &= \frac{d}{dx}\left(a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2\right) \\ &= f_8(a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2) + f_8(b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2) \end{aligned}$$

et

$$f_8(\lambda \cdot (a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2)) = \frac{d}{dx}\left(\lambda \cdot \left(a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2\right)\right) = \lambda \cdot \frac{d}{dx} \cdot \left(a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2\right) = \lambda \cdot f_8(a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2)$$

pour tout $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, \lambda \in \mathbb{R}$.

On utilise la base $(1, x, x^2)$ pour $\mathbb{R}_2[x]$ et on calcule

$$\frac{d}{dx}(1) = 0, \quad \frac{d}{dx}(x) = 1, \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx}x^2 = 2x,$$

donc la matrice de f_8 est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. 1. On se place dans $\mathbb{R}^3$. On considère le plan

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ z = x + y \right\}$$

Rappeler sa dimension et en donner une base.

2. Trouver un supplémentaire de P (i.e. trouver D tel que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$).

3. Si E est un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires ($F \oplus G = E$). Tout élément de E se décompose de manière unique sous la forme $e = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. On appelle *projecteur sur F parallèlement* à G l'application suivante:

$$p : e = f + g \in E \mapsto f.$$

Montrer que c'est une application linéaire.

4. Montrer qu'elle vérifie $p \circ p = p$. Quel est son noyau et son image?

5. Dans l'exemple précédent, on considère la projection sur P parallèlement à D. Exprimer cette projection dans la base canonique.

6. On appelle *symétrie par rapport à F parallèlement* à G l'application suivante:

$$s : e = f + g \mapsto f - g.$$

Montrer que c'est une application linéaire.

7. Montrer qu'elle vérifie $s \circ s = \mathrm{Id}$. Quel est son noyau et son image? Quel est le lien entre s et p?

8. Dans l'exemple précédent, on considère la symétrie sur P parallèlement à D. Exprimer cette symétrie dans la base canonique.

Solution. 1. On a

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est donc génératrice pour P. Elle est aussi libre parce que si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sont tels que

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Donc la famille est libre, et donc une base. Et la dimension de P est donc 2.

2. Il y a beaucoup de choix possibles pour D. On affirme que

$$D = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

est un supplémentaire. Donc il faut vérifier que

(i) $D + P = \mathbb{R}^3$

(ii) et $D \cap P = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Pour (i) on doit prouver que tout vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ s'écrit comme la somme d'un vecteur de D et un vecteur de P. Il faut donc trouver $t, x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}$$

donc une solution au système d'équations

$$\begin{cases} a & = t + x \\ b & = y \\ c & = x + y \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} t & = a - c + b \\ y & = b \\ x & = c - b \end{cases}$$

est une solution.

Pour (ii) on calcule

$$D \cap P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\ \begin{matrix} y = z = 0 \\ z = x + y \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Observons que p est bien-définie parce que la somme est directe (et donc l'écriture $e = f + g$ est unique).

   On vérifit les deux propriétés pour linéarité: Si $e, e' \in E$ avec $e = f + g$ et $e' = f' + g'$ où $f, f' \in F$ et $g, g' \in G$, alors:
$$p(e + e') = p(f + f' + g + g') = f + f' = p(e) + p(e')$$
   et
$$p(\lambda e) = p(\lambda f + \lambda g) = \lambda f = \lambda p(e)$$
   pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

4. Si $e = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$, alors
$$(p \circ p)(e) = p(p(f + g)) = p(f) = f = p(e).$$
   Donc $p \circ p = p$.

   Le noyau de p est:
$$\ker(p) = \{e \in E;\ p(e) = 0_E\} = \{f + g \in E;\ f \in F, g \in G,\ p(f + g) = f = 0_E\} = G$$
   et l'image:
$$\mathrm{Im}(p) = \{p(e);\ e \in E\} = \{p(f + g);\ f \in F,\ g \in G\} = \{f;\ f \in F, g \in G\} = F.$$

5. On met donc $F = P$ et $G = D$. Pour calculer les images des vecteurs de la base canonique il faut les exprimer comme la somme d'un vecteur de P et un vecteur de D. On a
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{dans } P} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{dans } D}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{dans } P} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{dans } D}$$
   et
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{dans } P} + \underbrace{- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{dans } D}$$
   Donc
$$p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   Donc la matrice de p par rapport à la base canonique est
$$p = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. La preuve est très similaire à la preuve du linéarité de p.

   Observons que p est bien-définie parce que la somme est directe (et donc l'écriture $e = f + g$ est unique).

   On vérifit les deux propriétés pour linéarité: Si $e, e' \in E$ avec $e = f + g$ et $e' = f' + g'$ où $f, f' \in F$ et $g, g' \in G$, alors:
$$s(e + e') = s(f + f' + g + g') = f + f' - g - g' = s(e) + s(e')$$
   et
$$s(\lambda e) = s(\lambda f + \lambda g) = \lambda f - \lambda g = \lambda s(e)$$
   pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

7. Si $e = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$, alors

$$(s \circ s)(e) = s(s(f+g)) = s(f-g) = f + g = e.$$

Donc $s \circ s = \mathrm{Id}$.

Le noyau de p est:

$$\begin{aligned} \ker(s) = \{e \in E;\ p(e) = 0_E\} &= \{f + g \in E;\ f \in F, g \in G,\ s(f+g) = f - g = 0_E\} \\ &= \{f + g \in E;\ f \in F, g \in G,\ f = g\} = \{0_E\}, \end{aligned}$$

vu que $F \cap G = \{0_E\}$.

L'image est:

$$\mathrm{Im}(s) = \{s(e);\ e \in E\} = \{s(f+g);\ f \in F,\ g \in G\} = \{f - g;\ f \in F, g \in G\} = \{f + g;\ f \in F, -g \in G\} = E$$

On a

$$s(e) = 2 \cdot p(e) - \mathrm{Id}(e) \quad \forall e \in E.$$

8. Vu que $s = 2 \cdot p - \mathrm{Id}$, la matrice de s est

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. On considère les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Lesquelles peut-on multiplier et dans quel ordre ? Calculer ces produits.
2. Déterminer leurs noyaux.
3. Donner une base pour leurs noyaux.

Solution. 1. On peut multiplier

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad A \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ -7 & -5 & -6 \end{pmatrix}, \quad D \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D \cdot E = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. On a

$$\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2;\ x = 0, y = 0, x + y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\ker(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ \begin{matrix} x-y=0, \\ 2x+2y+2z=0, \\ 8x+4y+6z=0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ \begin{matrix} x-y=0, \\ 4y+2z=0, \\ 12y+6z=0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ \begin{matrix} x-y=0, \\ 4y+2z=0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ \begin{matrix} x=y, \\ z=-2y \end{matrix} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

$$\ker(C) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ \begin{matrix} x+z=0, \\ x-z=0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ \begin{matrix} x=0, \\ z=0 \end{matrix} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\ker(D) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2;\ x+2y=0, 2x+y=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\ker(E) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2;\ x+y=0 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

3. Vu que tous les noyaux ci-dessus sont de dimension 0 ou 1, on a

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{pour } \ker(B),$$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{pour } \ker(C)$$

et

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{pour } \ker(E)$$

Exercice 4. On considère l'espace vectoriel

$$E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}} = \{(a_0, a_1, a_2, \ldots);\ a_k \in \mathbb{C}\ \forall k \in \mathbb{N}\}$$

1. On définit l'application $f_1 : E \to E$ par

$$f_1\Big((a_0, a_1, a_2, \ldots)\Big) = (a_1, a_2, a_3, \ldots), \quad (a_0, a_1, a_2, \ldots) \in E$$

   Est f_1 linéaire? Est elle injective ? Est elle surjective?

2. On définit l'application $f_2 : E \to E$ par

$$f_2\Big((a_0, a_1, a_2, \ldots)\Big) = (0, a_0, a_1, a_2 \ldots), \quad (a_0, a_1, a_2, \ldots) \in E$$

   Est f_2 linéaire? Est elle injective ? Est elle surjective?

Solution. 1. f_1 est linéaire parce que

$$f_1\Big((a_0, a_1, \ldots) + (b_0, b_1, \ldots)\Big) = f_1\Big((a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots)\Big) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$$
$$= f_1\Big((a_0, a_1, \ldots)\Big) + f_1\Big((b_0, b_1, \ldots)\Big)$$

et

$$f_1\Big((\lambda\cdot a_0,\lambda\cdot a_1,\lambda a_2,\dots)\Big)=(\lambda\cdot a_1,\lambda a_2,\dots)=\lambda\cdot f_1\Big((a_0,a_1,a_2,\dots)\Big)$$

pour tout $(\lambda\cdot a_0,\lambda\cdot a_1,\lambda a_2,\dots),(\lambda\cdot b_0,\lambda\cdot b_1,\lambda b_2,\dots)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda\in\mathbb{C}$

Le noyau de f_1 est

$$\ker(f_1)=\mathrm{Vect}\Big((1,0,0,\dots)\Big)\neq\{0_E\}$$

donc f_1 n'est pas injective.

L'image de f_1 est E (pour toute suite $(a_0,a_1,\dots)$ on peut trouver $(b_0,b_1,\dots)$ tel que $f_1\Big((b_0,b_1,\dots)\Big)=(a_0,a_1,\dots)$, on peut prendre $(b_0,b_1,\dots)=(0,a_0,a_1,\dots)$).

Donc f_1 est surjective mais pas injective.

2. Aussi f_2 est linéaire parce que

$$\begin{aligned}f_2\Big((a_0,a_1,\dots)+(b_0,b_1,\dots)\Big)=f_2\Big((a_0+b_0,a_1+b_1,\dots)\Big)&=(0,a_0+b_0,a_1+b_1,a_2+b_2,\dots)\\&=f_2\Big((a_0,a_1,\dots)\Big)+f_2\Big((b_0,b_1,\dots)\Big)\end{aligned}$$

et

$$f_2\Big((\lambda\cdot a_0,\lambda\cdot a_1,\lambda a_2,\dots)\Big)=(0,\lambda\cdot a_0,\lambda\cdot a_1,\lambda a_2,\dots)=\lambda\cdot f_2\Big((a_0,a_1,a_2,\dots)\Big)$$

pour tout $(\lambda\cdot a_0,\lambda\cdot a_1,\lambda a_2,\dots),(\lambda\cdot b_0,\lambda\cdot b_1,\lambda b_2,\dots)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda\in\mathbb{C}$.

Le noyau de f_2 est

$$\ker(f_2)=\{0_E\}$$

et l'image

$$\mathrm{Im}(f_2)=\{(a_0,a_1,a_2,\dots)\in E;\ a_0=0\}$$

Donc f_2 est injective mais pas surjective.

Exercice 5. Quelles applications de l'exercice 1 sont surjectives ? Et quelles sont injectives ?

Solution. 1. f_1 est surjective mais pas injective

2. f_2 est injective mais pas surjective
3. f_3 est injective mais pas surjective
4. f_4 est injective mais pas surjective
5. f_5 est bijective
6. f_6 est injective mais pas surjective
7. f_7 est surjective mais pas injective
8. f_8 est ni surjective ni injective

Exercice 6. Déterminer les noyaux des applications linéaires de l'exercice 1.

Solution. 1. Le noyau de f_1 est

$$\ker(f_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ x+y+z=0 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

2. f_2 est injective, donc
$$\ker(f_2) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$$

4. f_4 est injective, donc
$$\ker(f_4) = \{0\}$$

5. f_5 est bijective donc
$$\ker(f_5) = \{0_{\mathbb{C}}\}$$

6. f_6 est injective donc
$$\ker(f_6) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$$

7. On a
$$\ker(f_7) = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2;\ 2a_0 + 2a_1 + \frac{8}{3}a_2 = 0 \right\} = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2;\ -\frac{3}{4}a_0 - \frac{3}{4}a_1 = a_2 \right\}$$
$$= \mathrm{Vect}\left(1 - \frac{3}{4}x^2,\ x - \frac{3}{4}x^2 \right)$$

8. On a
$$\ker(f_8) = \mathrm{Vect}(1)$$
ou “1” est le polynôme “1”.

Exercice 7. Quelles sont les dimensions des images des matrices de l'exercice 3 ?

Solution. En utilisant le théorème du rang, on obtient:

1. $\mathrm{rang}(f_1) = 1$
2. $\mathrm{rang}(f_2) = 2$
4. $\mathrm{rang}(f_4) = 1$
5. $\mathrm{rang}(f_5) = 2$
6. $\mathrm{rang}(f_6) = 2$
7. $\mathrm{rang}(f_7) = 1$
8. $\mathrm{rang}(f_8) = 2$