TD 3: Réduction de matrices.

Exercice 1. Calculer les déterminants des matrices suivants

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solution. On a:

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 3 \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{C1 \to C1 - C3}{=} \det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{C2 \to C2 - 2C1}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

Exercice 2. Considerons les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 17 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer leurs polyômes caractéristiques.
2. Déterminer leurs valeurs propres.
3. Déterminer leurs vecteurs propres.
4. Lesquelles sont diagonalisables ?
5. Exprimer les matrices diagonalisables comme $T \cdot D \cdot T^{-1}$, où D est une matrice diagonale.

Solution. 1. On a:

$$\chi_A(x) = \det\begin{pmatrix} 3-x & 1 \\ 2 & 1-x \end{pmatrix} = (3-x)(1-x) - 2 = x^2 - 4x + 1$$

$$\chi_B(x) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 0 \\ 17 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2$$

$$\chi_C(x) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 4-x & 1 \\ 0 & 3 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)((4-x)(1-x) - 3) = (1-x)(x^2 - 5x + 1)$$

2. Les valeurs propres sont donc
$$\frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \quad \text{pour } A,$$
$$1 \quad \text{pour } B,$$
$$1 \text{ et } \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2} \quad \text{pour } C.$$

3.
   - Pour A, on calcule
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y \\ 2x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \pm \sqrt{3}) \cdot x \\ (2 \pm \sqrt{3}) \cdot y \end{pmatrix}$$
et donc
$$\begin{cases} y = (-1 \pm \sqrt{3}) \cdot x \\ y = \frac{2}{1 \pm \sqrt{3}} x \end{cases}$$
vu que $\frac{2}{1 \pm \sqrt{3}} x = -1 \pm \sqrt{3}$ ces deux équations sont équivalentes (en fait elles le sont forcement, parce que sinon on trouverait $x = y = 0$ et donc aucun vecteur propre non-trivial, ce qui n'est pas possible). Donc les espaces propres de A sont
$$E_{2-\sqrt{3}} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{3} \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_{2+\sqrt{3}} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}\right)$$
   - Pour B:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 17 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 17x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
et donc on trouve $x = 0$ et
$$E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
   - Et pour C, pour la valeur propre 1:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 4y + z \\ 3y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
et donc
$$\begin{cases} 3y + z & = 0 \\ 3y = 0 \end{cases}$$
donc $y = z = 0$ et
$$E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$
Pour les autres deux valeurs propres on calcule:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 4y + z \\ 3y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2} \cdot x \\ \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2} \cdot y \\ \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2} \cdot z \end{pmatrix}$$
la première coordonnée nous donne $x = 0$ et les deux autres équations sont équivalentes pour la même raison que pour la matrice A. On trouve donc $z = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2} \cdot y$ et :
$$E_{\frac{5-\sqrt{21}}{2}} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-3-\sqrt{21}}{2} \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_{\frac{5+\sqrt{21}}{2}} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-3+\sqrt{21}}{2} \end{pmatrix}\right)$$

4. A et C sont diagonalisables parce que la somme des dimensions de leurs espaces propres est la dimension de l'espace sur lequel elles agissent (2 et 3 respectivement). B n'est pas diagonalisable parce que la somme des dimensions de ses espaces propres est 1 et B est une matrice 2×2.

5. - Pour A on met
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1-\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$
tel que
$$T \cdot e_i = v_i, \quad i = 1,2$$
où $\{e_1, e_2\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et v_1 et v_2 sont les vecteurs propres qu'on a trouvé.
On calcule l'inverse de T
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1-\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L2 \to L2+(1+\sqrt{3})L1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{array}\right)$$
$$\overset{L2 \to L2/2\sqrt{3}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{array}\right) \overset{L1 \to L1-L2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{array}\right)$$
Donc
$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$$
et
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1-\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$$
   - Pour C on met
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-3-\sqrt{21}}{2} & \frac{-3+\sqrt{21}}{2} \end{pmatrix}$$
et avec un calcul similaire à celui ci-dessus on trouve:
$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{21-3\sqrt{21}}{42} & -\frac{1}{\sqrt{21}} \\ 0 & \frac{21+3\sqrt{21}}{42} & \frac{1}{\sqrt{21}} \end{pmatrix}$$
et donc
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-3-\sqrt{21}}{2} & \frac{-3+\sqrt{21}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5-\sqrt{21}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5+\sqrt{21}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{21-3\sqrt{21}}{42} & -\frac{1}{\sqrt{21}} \\ 0 & \frac{21+3\sqrt{21}}{42} & \frac{1}{\sqrt{21}} \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soit $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable.

1. Soit $T \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ inversible. Prouver que
$$\det(T \cdot A \cdot T^{-1}) = \det(A).$$

2. Prouver que
$$\chi_{T\cdot A\cdot T^{-1}}(x) = \chi_A(x)$$
et en déduire que les valeurs propres de $T \cdot A \cdot T^{-1}$ sont égaux aux valeurs propres de A

3. Prouver que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A, alors, pour tout $k \geq 0$, $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$ sont des valeurs propres de A^k.

4. Prouver que, si $A = T \cdot D \cdot T^{-1}$, alors
$$A^k = T \cdot D^k \cdot T^{-1}$$

5. Maintenant on met
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
et on définit inductivement
$$v^{(k)} = A \cdot v^{(k-1)}, \quad k \geq 2.$$
Calculer $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ et $v^{(4)}$. Reconnaissez-vous cette suite ?

6. Donner une formule fermée pour $\left(v^{(k)}\right)_1$ (la première coordonnée de $v^{(k)}$).

Solution. 1. On a:
$$\det(T \cdot A \cdot T^{-1}) = \det(T)\det(A)\det(T^{-1}) = \det(A)\det(T \cdot T^{-1}) = \det(A) \cdot \det(\mathrm{Id}_n) = \det(A)$$

2. On a:
$$T \cdot A \cdot T^{-1} - x \cdot \mathrm{Id}_n = T \cdot \left(A - x \cdot \mathrm{Id}_n\right) \cdot T^{-1}$$
et donc
$$\chi_{T \cdot A \cdot T^{-1}}(x) = \det(T \cdot A \cdot T^{-1} - x \cdot \mathrm{Id}_n) = \det\left(T \cdot \left(A - x \cdot \mathrm{Id}_n\right) \cdot T^{-1}\right) = \chi_A(x).$$
Où on a utilisé le résultat de la question précédante pour la dernière étape.

3. Si $A \cdot v_i = \lambda_i \cdot v_i$, alors $A^k \cdot v_i = \lambda^k \cdot v_i$.

4. On fait une preuve par récurrance par rapport à k. Le cas de base $k = 1$ est donné, donc on considère l'hérédité: si $A^k = T \cdot D^k \cdot T^{-1}$ alors
$$A^{k+1} = A^k \cdot A = T \cdot D^k \cdot T^{-1} T \cdot D T^{-1} = T \cdot D^{k+1} \cdot T^{-1}$$
parce que $T^{-1} \cdot T = \mathrm{Id}_n$.

5. On a
$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v^{(4)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
La suite des premières coordonnées est la suite de Fibonacci. C'est-à-dire si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite définie par:
$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ a_{n-1} + a_{n-2} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$
alors
$$v^{(k)} = \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k-1} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

6. On observe que
$$v^{(k)} = A^{k-1} v^{(1)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$
Pour calculer cette puissance de A on va utiliser les observations précédantes. On commence avec les valeurs propres de A. On a
$$\chi_A(x) = \det\begin{pmatrix} 1 - x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = -x(1 - x) - 1 = x^2 - x - 1.$$

Et donc les valeurs propres de A sont[1]

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Maintenant on calcule les espaces propres:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \cdot x \\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \cdot y \end{pmatrix}.$$

Pour la même raison que ci-dessus les deux équations qu'on obtient son équivalentes, et donc

$$E_{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

On met

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on calcule

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Et on a donc:

$$\begin{aligned}
A^{k-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc on trouve

$$\begin{aligned}
v^{(k)} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc, après ce calcul monstueux, on a trouvé que $\left(v^{(k)}\right)_1$ – c'est-à-dire le $k^{\text{ème}}$ nombre de Fibonacci – est donné par la formule

$$\left(v^{(k)}\right)_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}$$

[1] Le nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $-1/\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Pour montrer la puissance du résultat, on calcule maintenant facilement (à l'aide d'un ordinateur) les nombres de Fibonacci. Par exemple, le $700^{\text{ème}}$ nombre de Fibonacci est:

$$
\begin{aligned}
&14153075162206073478934963754161180690656058181482565606505778265589725431805766214234113 5\\
&\qquad 31484476942290390586786387713924668188609735448654776370 1
\end{aligned}
$$