TD 3: Réduction de matrices.

Exercice 1. Calculer les déterminants des matrices suivants

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Considerons les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 17 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer leurs polyômes caractéristiques.
2. Déterminer leurs valeurs propres.
3. Déterminer leurs vecteurs propres.
4. Lesquelles sont diagonalisables ?
5. Exprimer les matrices diagonalisables comme $T \cdot D \cdot T^{-1}$, où D est une matrice diagonale.

Exercice 3. Soit $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable.

1. Soit $T \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ inversible. Prouver que
$$\det(T \cdot A \cdot T^{-1}) = \det(A).$$
2. Prouver que
$$\chi_{T\cdot A\cdot T^{-1}}(x) = \chi_A(x)$$
et en déduire que les valeurs propres de $T \cdot A \cdot T^{-1}$ sont égaux aux valeurs propres de A
3. Prouver que si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A, alors, pour tout $k \geq 0$, $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ sont des valeurs propres de A^k.
4. Prouver que, si $A = T \cdot D \cdot T^{-1}$, alors
$$A^k = T \cdot D^k \cdot T^{-1}$$
5. Maintenant on met
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
et on définit inductivement
$$v^{(k)} = A \cdot v^{(k-1)}, \quad k \geq 2.$$
Calculer $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ et $v^{(4)}$. Reconnaissez-vous cette suite ?
6. Donner une formule fermée pour $\left(v^{(k)}\right)_1$ (la première coordonnée de $v^{(k)}$).