J. Math. Pures Appl. 102 (2014) 972–1013

Contents lists available at ScienceDirect

Journal de Mathématiques Pures et Appliquées

www.elsevier.com/locate/matpur

Sur l'espace classifiant d'un groupe algébrique linéaire, I [☆]

Bruno Kahn [a], Nguyen Thi Kim Ngan [b]

[a] *Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 247, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France*
[b] *Faculty of Natural Sciences, Thu Dau Mot University, Binh Duong, Viet Nam*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 5 avril 2013
Disponible sur Internet le 19 mars 2014

MSC:
20G15
14F42

Mots-clés :
Groupes algébriques
Groupes de Chow
Cohomologie motivique
Cohomologie étale

RÉSUMÉ

On donne une version abstraite de la définition par Totaro des groupes de Chow de l'espace classifiant d'un groupe algébrique linéaire G sur un corps k. Elle fournit automatiquement une définition de $F(BG)$ pour des foncteurs F vérifiant quelques axiomes simples. Lorsque F est la cohomologie motivique étale, k est algébriquement clos et G est fini, $F(BG)$ se réduit essentiellement à la cohomologie entière de G. En général, on obtient des suites spectrales de coniveau convergeant vers la cohomologie motivique étale de BG, qui unifient et généralisent des invariants de G considérés antérieurement par Bogomolov et Serre.

ABSTRACT

We give an abstract version of Totaro's definition of the Chow groups of the classifying space of a linear algebraic group G over a field k, so that it yields automatically a definition of $F(BG)$ for functors F satisfying some simple axioms. If F is étale motivic cohomology, k is algebraically closed and G is finite, $F(BG)$ essentially boils down to the integral cohomology of G. In general, we get coniveau spectral sequences converging to the étale motivic cohomology of BG, which unify and generalize invariants of G previously considered by Bogomolov and Serre.

0. Introduction

Le but de ce travail est de placer la définition par Totaro des groupes de Chow du classifiant d'un groupe algébrique linéaire [46] dans sa généralité naturelle.

Rappelons la construction de Totaro. Soit G un groupe algébrique linéaire sur un corps k. Totaro commence par montrer l'existence de représentations linéaires E de G possédant un ouvert G-stable U, tel que U soit l'espace total d'un G-torseur et que la codimension $c = \mathrm{codim}_E(E - U)$ soit arbitrairement

☆ B.K. a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-12-BL01-0005.
Adresses e-mail : bruno.kahn@imj-prg.fr (B. Kahn), nguyen.t.k.ngan.vn@gmail.com (N.T.K. Ngan).

http://dx.doi.org/10.1016/j.matpur.2014.03.006
0021-7824/

grande. L'entier $n \geqslant 0$ étant fixé, le groupe de Chow $CH^n(U/G)$ est indépendant du choix de E et de U lorsque $c > n$: par définition, c'est $CH^n(BG)$.

Ceci soulève la question suivante : quelle est la nature de « BG » ? Par construction, c'est une famille de bases de G-torseurs de dimension variable : il n'existe pas en général de modèle unique de BG comme k-variété. Peut-on néanmoins en donner une définition conceptuelle ?

Notre observation principale est que les propriétés du foncteur CH^n utilisées par Totaro sont facilement mises en évidence ; X étant une k-variété lisse :

H : $CH^n(X) \xrightarrow{\sim} CH^n(V)$ si V est un fibré vectoriel de base X ;
P : $CH^n(X) \xrightarrow{\sim} CH^n(U)$ si U est un ouvert de X tel que $\operatorname{codim}_X(X - U) > n$.

En d'autres termes, ces propriétés reviennent à *rendre inversibles* certains morphismes entre variétés lisses. Il y a alors un cas universel : la catégorie des variétés lisses localisée, au sens de Gabriel et Zisman [17], en inversant cette classe de morphismes. Un objet « BG » vit naturellement dans une telle catégorie.

Pour cette définition, on n'est pas obligé de considérer tous les morphismes entre variétés lisses : ceci n'est pas innocent, le résultat de la localisation étant sensible au changement de morphismes. Nous avons choisi de nous limiter aux morphismes *plats*, ce qui est suffisant pour la construction (et peut-être minimal).

Plus précisément, soit $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ la catégorie des k-schémas lisses séparés de type fini, les morphismes étant les morphismes plats. Pour tout $n \geqslant 1$, notons S_n la classe des morphismes de $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ formée

– des projections $V \to X$, où V est un fibré vectoriel de base X ;
– des imersions ouvertes $U \hookrightarrow X$ telles que $\operatorname{codim}_X(X - U) > n$.

Soit **Grp** la catégorie des k-groupes algébriques linéaires, les morphismes étant les k-homomorphismes. Dans la Proposition 2.22, nous construisons un foncteur $G \mapsto B_nG$ de **Grp** vers $S_n^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$. Le foncteur B_n se comporte bien vis-à-vis des produits (§2.6), ce qui permet de donner dans le Théorème 2.29 la bonne généralisation d'un vieux théorème de Fischer sur la rationalité des corps d'invariants de groupes abéliens sur un corps contenant assez de racines de l'unité. Au §2.8, on compare la présente définition de B_nG à la définition de BG donnée par Morel et Voevodsky dans [36], à valeurs dans leur catégorie homotopique des schémas.[1]

Par construction, tout foncteur F sur $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ ayant les propriétés H et P ci-dessus se factorise canoniquement en un foncteur $\bar{F}$ sur $S_n^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$, ce qui donne un sens à $F(BG) := \bar{F}(B_nG)$, plus une fonctorialité évidente en F. Le foncteur naturel $S_{n+1}^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \to S_n^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ envoyant $B_{n+1}G$ sur B_nG, cette définition ne dépend pas du choix de n. La fonctorialité de B_nG en G donne celle de $F(BG)$ en G, qui n'est pas traitée dans [46].

La Section 3 applique ceci à un certain nombre de foncteurs concrets, généralisant le cas des groupes de Chow : cohomologie étale, cohomologie motivique, cohomologie motivique étale, homologie motivique, K-théorie algébrique. La Section 4 donne quelques déterminations explicites de BG.

Les Sections 5 et 6 couvrent un cas non traité dans la Section 3 : la cohomologie de cycles de Rost [42]. La Section 5 rappelle la théorie des modules de cycles et de la cohomologie de cycles : on y vérifie que cette dernière prend un sens sur BG. La Section 6 étudie les classes non ramifiées dans un module de cycles, à la Colliot-Thélène et Ojanguren [7] ; on montre qu'elles vérifient les axiomes H et P ci-dessus, donc prennent un sens sur BG.

Les Sections 7 et 8 sont consacrées à des calculs plus concrets. Dans la Section 7, on calcule la cohomologie motivique étale de BG quand G est un groupe fini constant sur un corps k ; lorsque k est séparablement

[1] Au prix de plus de technique, on peut étendre la construction de B_nG aux « constructions de Borel » considérées par Edidin et Graham dans [12] : nous ne le faisons pas ici.

clos, on trouve essentiellement la cohomologie entière de G. Dans la Section 8, on établit l'existence de suites spectrales de coniveau pour la cohomologie motivique, la cohomologie étale et la cohomologie motivique étale de BG, dont le terme E_2 est donné par des groupes de cohomologie de cycles au sens de la Section 5 : les deux derniers cas sont relativement délicats. Lorsque G est fini et k est algébriquement clos, disons de caractéristique zéro, ceci joint au résultat de la Section 7 fournit des renseignements très riches sur la cohomologie entière de G, parmi lesquels on retrouve des notions antérieures (invariants cohomologiques de Serre, cohomologie stable de Bogomolov) et des isomorphismes et suites exactes déjà connues (Bogomolov, Peyre), mais aussi de telles suites exactes, isomorphismes et invariants nouveaux. Nous espérons que ceci pourra être utilisé fructueusement dans l'avenir.

D'autres applications sont données dans [28].

Ce travail est une version remaniée et augmentée d'une partie de la thèse du premier auteur (N.T.K.N.) [38]. B.K. tient à remercier N.T.K.N. de l'avoir invité à rédiger ce texte en commun.

1. Rappel sur les torseurs

Dans cette section, nous rappelons les définitions et les propriétés des torseurs dont nous aurons besoin. Notre parti pris, comme dans [46] et contrairement à [12], est ici de ne considérer que des quotients représentables en évitant les espaces algébriques. Cela permet une présentation plus élémentaire dans les sections suivantes.

1.1. Quotients

Soit k un corps.

Définition 1.1. (Voir Mumford et al. [37, déf. 0.6 ii, p. 4].) Soit G un k-groupe algébrique et soit X un k-schéma de type fini sur lequel G opère par le morphisme $\mu_X : G \times X \to X$.

a) Un *quotient géométrique* de X par G est un k-schéma Y muni d'un k-morphisme $f : X \to Y$ tel que :
   (i) Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\mu_X"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y. \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

   (ii) f et le morphisme $\varphi : G \times X \to X \times_Y X$ défini par $\varphi(g, x) = (gx, x)$ sont surjectifs.
   (iii) f est submersif, i.e. $U \subset Y$ est ouvert si et seulement si $f^{-1}(U)$ est ouvert dans X.
   (iv) Le faisceau $\mathcal{O}_Y$ est isomorphe au sous-faisceau de $f_*\mathcal{O}_X$ formé des fonctions G-invariantes.

b) f est un *quotient géométrique universel* s'il le reste après tout changement de base.

Si ce schéma Y existe, il est unique à isomorphisme unique près. On le note $Y = X/G$.

1.2. Existence de quotients

Proposition 1.2. *Soit G opérant sur X et soit N un sous-groupe distingué de G. Supposons que X admette un quotient géométrique universel $f : X \to Y$ relativement à l'action de N. Alors G/N opère sur Y et les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X admet un quotient géométrique universel Z relativement à l'action de G.*
(ii) *Y admet un quotient géométrique universel Z' relativement à l'action de G/N.*

Si c'est le cas, alors Z est isomorphe à Z'.

Démonstration. On peut vérifer que cette proposition est vraie en remplaçant « quotient géométrique » par « quotient catégorique » (*cf.* [37, déf. 0.5, p. 3]). En particulier, les deux quotients coïncident si l'un des deux existe par la propriété universelle des quotients catégoriques. Supposons donc que Z soit un quotient catégorique universel de X par G et de Y par G/N, et notons $g : Y \to Z$, $h = g \circ f : X \to Z$.

Appliquons le critère [37, (3), p. 6] : Il suffit de vérifier la submersion de g, h et la surjectivité de $\varphi_X, \bar{\varphi}_Y$ dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
N \times X \arrow[r, two heads, "\varphi'_X"] \arrow[d] & X \times_Y X \arrow[d] \\
G \times X \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "\pi\times f"'] & X \times_Z X \arrow[d, "f\times f"] \\
G/N \times Y \arrow[r, "\bar{\varphi}_Y"] & Y \times_Z Y.
\end{tikzcd}$$

D'abord, comme f est un quotient géométrique universel, il est universellement submersif ; par conséquent, g est universellement submersif si et seulement si h l'est.

D'autre part, comme f est surjectif, $f \times f$ est surjectif ; donc si φ_X est surjectif, $\bar{\varphi}_Y$ est surjectif.

Inversement, si $\bar{\varphi}_Y$ est surjectif, alors on peut vérifier que φ_X est surjectif sur les $\bar{k}$-points grâce au diagramme ci-dessus. Enfin, φ_X est surjectif d'après [48, prop. 7.1.8, p. 331]. □

Corollaire 1.3. *Dans la situation de la Proposition 1.2, supposons que l'action de N sur X soit triviale. Alors l'action de G sur X en induit une de G/N. De plus, le quotient géométrique de X par G existe si et seulement si celui par G/N existe, et alors ils coïncident.*

1.3. Torseurs

Définition 1.4. (Voir Mumford et al. [37, déf. 0.10, p. 17].) Soit X un k-schéma sur lequel G opère et soit $f : X \to Y$ un k-morphisme. On dit que f est un *G-torseur* de *base Y* et *d'espace total X* si

(i) Y est un quotient géométrique de X,
(ii) f est plat,
(iii) φ (*cf.* déf. 1.1 a) (ii)) est un isomorphisme.

Remarque 1.5. On peut montrer que cette définition est équivalente à celle de Colliot-Thélène et Sansuc [8, déf. 2.9].

Théorème 1.6. *(Voir [11, III.2.6.1, p. 313].) Si G est fini et opère sur un k-schéma X de sorte que toute orbite ensembliste soit contenue dans un ouvert affine de X, alors*

1. *Le carré (1.1) existe et est cocartésien dans la catégorie des k-schémas.*
2. *La projection $f : X \to Y := X/G$ est entière et le morphisme φ est surjectif.*

3. *Si G opère librement sur X, f est fini localement libre et φ est un isomorphisme. En particulier, X est l'espace total d'un G-torseur.*

1.4. Fermés G-irréductibles

Définition 1.7. Un G-schéma X est *G-irréductible* si, pour toute décomposition $X = F_1 \cup F_2$ où F_1, F_2 sont des fermés G-stables, on a $X = F_1$ où $X = F_2$.

Lemme 1.8. *Soit G opérant sur X de type fini. Alors on peut écrire $X = \bigcup_{\beta \in B} X_\beta$ où les X_β sont des fermés G-irréductibles. On appelle les X_β les composantes G-irréductibles de X.*

Lemme 1.9. *Soit U un k-schéma intègre de type fini, muni d'une action d'un groupe algébrique G. Soit $j : U' \hookrightarrow U$ une immersion ouverte, avec U' G-invariant. Alors j est composée d'immersions ouvertes $V_i \overset{j_i}{\hookrightarrow} V_{i+1}$ où V_i est G-stable et $V_{i+1} - V_i$ est G-irréductible pour tout i. Si k est parfait, on peut choisir les j_i de complémentaire lisse.*

1.5. Propriétés de permanence des torseurs

Lemme 1.10. *Soient G, H deux groupes algébriques et U_G, U_H les espaces totaux d'un G et d'un H-torseur. Alors $U_G \times U_H$ est l'espace total d'un $G \times H$-torseur.*

Proposition 1.11. *Les G-torseurs ont les propriétés suivantes :*

1. Stabilité par changement de base : *si on a le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} X' = Y' \times_Y X \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"] & Y, \end{tikzcd}$$

et si f est un G-torseur, alors f' l'est aussi pour tout g.
Réciproquement, si f' est un G-torseur et g est fidèlement plat, alors f est un G-torseur.

2. Formule de la dimension : *si X est G-irréductible (cf. déf. 1.7), alors*

$$\dim X = \dim Y + \dim G.$$

3. *Soit $f : X \to Y$ un G-torseur et soit $\pi : E \to X$ un fibré vectoriel sur X avec G-action linéaire équivariante, alors E/G existe et est un fibré vectoriel sur Y.*

Démonstration.

1. La première assertion découle de la platitude de f. La deuxième assertion résulte de la descente fidèlement plate.
2. L'hypothèse implique que Y est irréductible. Comme f est plat, on peut appliquer [18, chap. III, cor. 9.6, p. 257] : on a

$$\dim X - \dim Y = \dim X_y,$$

où X_y est la fibre d'un point quelconque de Y (elle est équidimensionnelle). D'après [37, (4), p. 6/7], on a $\dim X_y = \dim G$.

3. Cela résulte de la descente fidèlement plate [50, VIII, cor. 1.3 et prop. 1.10]. □

Remarque 1.12. : Soient $f : X \to Y$ un G-torseur et $\pi : X' \to X$ un morphisme G-équivariant avec l'action de G sur X'. Alors, X'/G existe dans certains cas :

– si π est un fibré vectoriel (Proposition 1.11, 3).
– Dans le cas de [37, prop. 7.1].

Voici un autre cas utile :

Lemme 1.13 *(Colliot-Thélène). Soit X l'espace total d'un G-torseur de base Y avec X de type fini. Soit U un ouvert non vide de X, stable par G. Posons $Z = (X - U)_{red}$. Alors, U et Z sont aussi les espaces totaux de G-torseurs.*

Démonstration. Comme U est G-stable, Z l'est aussi. Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & \supset & U \arrow[d, "f"] \\ Y & \supset & f(U) \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

où $f(U)$ est un ouvert de Y car f est plat. On a $U \subset f^{-1}(f(U))$ et aussi l'égalité car U est G-stable. En effet, il nous suffit de montrer pour tout $K \supset k$, K algébriquement clos, on a $f^{-1}(f(U))(K) = U(K)$ (*cf.* [48, prop. 7.1.8, p. 331]). Soit $x \in X(K)$ tel que $f(x) \in f(U)(K)$ i.e. $f(x) = f(u)$ pour $u \in U(K)$. Comme f est un G-torseur, $f(K)$ l'est aussi (au sens discret). Alors, il existe $g \in G(K)$ tel que $x = gu$ et donc $x \in U(K)$. Donc le diagramme (1.2) est cartésien et donc $U \to f(U)$ est un G-torseur (par la Proposition 1.11).

Posons $Z' = Y - f(U)$. Alors $f^{-1}(Z') = f^{-1}(Y) - f^{-1}(f(U)) = X - U = Z$ car f est fidèlement plat. De manière analogue, on a que $Z \to Z'$ est un G-torseur. □

Proposition 1.14. *Soit $f : X \to Y$ un G-torseur.*

a) Si X est lisse, Y est lisse.
b) Si G est lisse, f est lisse.
c) Si G et Y sont lisses, X est lisse.

Démonstration. a) est clair puisque f est plat [49, prop. 17.7.7]. Il suffit de voir b) après changement de base par f, puisque f est fidèlement plat [49, prop. 17.7.1]. Ceci nous ramène au cas où f est de la forme $p_2 : G \times Y \to Y$, et alors c'est clair. Enfin, c) résulte de b) puisqu'un composé de morphismes lisses est lisse. □

2. Le classifiant d'un groupe algébrique linéaire, à la Totaro

Dans cette section, nous reformulons la théorie développée par Totaro dans [46] pour donner un sens aux groupes de Chow d'un espace classifiant, en la plaçant dans sa généralité naturelle. Ceci lui donne la flexibilité dont nous aurons besoin dans les sections suivantes. Mis à part la fonctorialité de BG (Proposition 2.22), il n'y a rien d'essentiellement nouveau par rapport à l'article de Totaro.

2.1. Coniveaux

Définition 2.1. Soit U un k-schéma intègre de type fini, et soit $j : U' \to U$ une immersion ouverte (avec $U' \neq \emptyset$). On définit :

$$\delta(j) = \delta(U, U') = \operatorname{codim}_U(U - j(U')) = \dim U - \dim(U - j(U')) \tag{2.1}$$

(*cf.* [18, Exercise 3.20,(d), p. 95]). C'est le *coniveau* de j (ou de U' dans U).

Lemme 2.2. *Soit U un k-schéma lisse et soit r un entier positif.*

1. *Soient $U'' \overset{j'}{\hookrightarrow} U' \overset{j}{\hookrightarrow} U$ des immersions ouvertes. On a*

$$\delta(j) \geqslant r \text{ et } \delta(j') \geqslant r \Leftrightarrow \delta(jj') \geqslant r.$$

2. *Soit X un autre schéma lisse, on a $U' \times X \overset{j \times 1_X}{\hookrightarrow} U \times X$ et $\delta(j \times 1_X) = \delta(j)$.*
3. *Si U est un G-torseur et que G laisse stable $U' \hookrightarrow U$, on a*

$$\delta(U/G, U'/G) = \delta(U, U').$$

Démonstration. Seul le point (3) mérite une démonstration. D'après le Lemme 1.13, U'/G existe et $U' \to U'/G$ est un G-torseur. Grâce au Lemme 1.9, on se ramène au cas où $U - U'$ est G-irréductible, et l'énoncé résulte alors facilement de la Proposition 1.11 (2). □

2.2. Catégories de fractions en géométrie algébrique

Pour les catégories de fractions, nous renvoyons au chapitre 1 du livre de Gabriel et Zisman [17]. Rappelons que, si $\mathcal{C}$ est une catégorie et S est une classe de morphismes de $\mathcal{C}$, on définit (modulo des problèmes ensemblistes) une catégorie $S^{-1}\mathcal{C}$ (notée $\mathcal{C}[S^{-1}]$ dans [17]), ayant les mêmes objets que $\mathcal{C}$, et un foncteur $\mathcal{C} \to S^{-1}\mathcal{C}$, qui est l'identité sur les objets et universel parmi les foncteurs de source $\mathcal{C}$ rendant les éléments de S inversibles. On dit que $S^{-1}\mathcal{C}$ est la *catégorie de fractions* ou la *localisée* de $\mathcal{C}$ relativement à S.

Soit $\mathbf{Sm}(k)$ la catégorie des k-variétés lisses. Dans [29], on a étudié la catégorie de fractions $S^{-1}\mathbf{Sm}(k)$, où S désigne l'ensemble des morphismes birationnels, ou celui des morphismes birationnels stables. Dans cet article, nous en utiliserons des versions de coniveau supérieur ; par ailleurs, nous nous restreindrons pour une large part à la sous-catégorie non pleine de $\mathbf{Sm}(k)$ qui suit.

Définition 2.3. a) On note $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ la catégorie dont les objets sont les k-variétés lisses et les morphismes sont les morphismes plats.

b) On introduit des classes de morphismes de $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$:

- S^h : projections $E \to X$, où E est un fibré vectoriel sur X.
- Pour $r \geqslant 1$, S_r^o : immersions ouvertes de coniveau $\geqslant r$; $S_r = S_r^o \cup S^h$.

D'après le Lemme 2.2, S_r^o est stable par composition. On voit facilement que cette classe admet un calcul des fractions à droite au sens de [17] ; ce n'est pas le cas de S_r. On a des inclusions

$$\ldots \subset S_{r+1} \subset S_r \subset \ldots$$

d'où des projections

$$\ldots \to S_{r+1}^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \xrightarrow{\Pi_r} S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \to \ldots$$

Définition 2.4. On note **Grp** la catégorie des k-groupes algébriques linéaires, les morphismes étant les k-homomorphismes.

Le but des numéros suivants est de construire un système compatible de foncteurs

$$B_r : \mathbf{Grp} \to S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$$

conceptualisant la construction de Totaro [46]. Ce but est atteint dans la Proposition 2.22.

2.3. Un théorème de Totaro

Théorème 2.5 *(Totaro). Soient $G \in$ **Grp** et r un entier > 0. Il existe une représentation linéaire E de G et un ouvert U de E, stable par G, tels que le quotient géométrique U/G existe, que $U \to U/G$ soit un G-torseur et que $\delta(E,U) \geqslant r$ (Définition 2.1).*

Démonstration. Voir [46, rem. 1.4, p. 4] ou [8, Lemma 9.2]. Ces démonstrations montrent que U/G est de la forme GL_N/Γ, donc en particulier quasi-projectif. □

Remarque 2.6. Pour la commodité du lecteur et pour un usage ultérieur, résumons la construction de Totaro. Il part d'une représentation linéaire fidèle quelconque E_0, de dimension n. Pour $N > 0$, considérons $E_0^N \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{A}^N, E_0)$ (action triviale de G sur $\mathbb{A}^N$). Pour $N > n$, Totaro considère le fermé (G-stable) S_N formé des applications linéaires non surjectives. Alors $U_N = E_0^N - S_N$ s'identifie à $GL(E_0^N)/H$, où H est le plus grand sous-groupe de $GL(E_0^N)$ qui opère trivialement sur E_0^N/E_0^{N-1}. Comme $G \cap H = \{1\}$, U_N est l'espace total d'un G-torseur de base $GL(E_0^N)/(H \rtimes G)$.

Il reste à donner le coniveau de $U_N \hookrightarrow E_0^N$. Après le choix d'une base de E_0, un élément de $S_N(k)$ est décrit par une matrice $N \times n$, et la condition de non surjectivité est donnée par l'annulation simultanée de ses mineurs d'ordre n. Il est bien connu que

$$\mathrm{codim}_{E_0^N}(S_N) = N - n + 1$$

(*cf.* [14, p. 419, Lemma A.7.2]). Ce coniveau tend bien vers l'infini avec N.

Définition 2.7. Dans la situation du Théorème 2.5, on dit que E est une *représentation très fidèle* de G de coniveau $\geqslant r$ et que U est un *G-torseur linéaire de coniveau* $\geqslant r$.

Remarque 2.8. Si G est fini, il est facile d'obtenir des représentations très fidèles de G de coniveau aussi grand qu'on veut en partant d'une représentation fidèle W : d'après le Théorème 1.6, l'ouvert G-stable $U = W - \bigcup_{g \neq 1} W^g$ est l'espace total d'un G-torseur. On a

$$\nu(W) := \delta(W,U) = \inf_{g \neq 1}\{\mathrm{codim}_W W^g\}$$

d'où facilement :

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \nu(W^n) = n\nu(W).$$

2.4. Le lemme sans nom, version catégorique

Soit $G \in \mathbf{Grp}$. Notons $G - \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ la catégorie des k-variétés lisses X munies d'une action de G, telles que le quotient géométrique X/G existe et soit séparé. Les morphismes de $G - \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ sont les morphismes plats G-équivariants. On note S^h, S_r^o et S_r les mêmes classes de morphismes que dans la Définition 2.3.

La définition suivante est un peu désagréable, mais très pratique pour la suite :

Définition 2.9. Soit $X \in G - \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$. On dit que X est un *G-torseur potentiel* s'il existe un sous-groupe fermé normal $N \lhd G$ tel que l'action de G sur X se factorise par G/N, et que X soit l'espace total d'un G/N-torseur. On parlera aussi de G-torseurs potentiels linéaires de coniveau $\geqslant r$, *cf.* déf. 2.7.

Avec ces notations, un G-torseur potentiel est donc un G/N-torseur vu comme G-objet.

Soit $G - \mathbf{Tors}$ la sous-catégorie pleine de $G - \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ formée des G-torseurs potentiels. On dispose de deux foncteurs $G - \mathbf{Tors} \to \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$:

$$X \mapsto X \qquad \text{(oubli)}, \tag{2.2}$$

$$X \mapsto X/G \qquad \text{(quotient)}, \tag{2.3}$$

et d'une transformation naturelle $X \to X/G$. En effet, si $X \in G - \mathbf{Tors}$, X/G est lisse grâce à la Proposition 1.14 ; si $f : X \to Y$ est un morphisme de $G - \mathbf{Tors}$, alors f/G est plat grâce à [49, cor. 2.2.11 (iv)].

Lemme 2.10. *Le foncteur (2.3) envoie S^h, S_r^o et S_r respectivement dans S^h, S_r^o et S_r.*

Démonstration. Pour S^h, cela résulte du point 3 de la Proposition 1.11. Pour S_r^o, cela résulte du point 3 du Lemme 2.2. Le cas de S_r en découle. $\square$

Définition 2.11. Soit $r > 0$. Soient $U, U' \in G - \mathbf{Tors}$. On dit que le couple (U, U') est *admissible de coniveau* $\geqslant r$ si U est un G-torseur et U' est un G-torseur potentiel, linéaire de coniveau $\geqslant r$ (Définition 2.9).

Remarque 2.12. (U, U) est admissible de coniveau $\geqslant r$ si et seulement si U est un G-torseur linéaire de coniveau $\geqslant r$. Si (U, U') et (U', U'') sont admissibles, alors (U, U'') est admissible.

Construction 2.13. *À tout couple admissible (U, U') de coniveau $\geqslant r$, on associe un morphisme $\Psi_{U,U'} : U \to U'$ dans $S_r^{-1}(G - \mathbf{Tors})$, ces morphismes ayant les propriétés suivantes :*

Réflexivité : *si (U, U) est admissible, alors $\Psi_{U,U} = 1_U$.*
Symétrie : *si (U, U') et (U', U) sont admissibles, alors*

$$\Psi_{U,U'}\Psi_{U',U} = 1_U$$

et $\Psi_{U,U'}$ est un isomorphisme.
Transitivité : *si (U, U'), (U', U'') et (U, U'') sont admissibles, alors*

$$\Psi_{U',U''}\Psi_{U,U'} = \Psi_{U,U''}.$$

On note $\psi_{U,U'}$ (resp. $\varphi_{U,U'}$) l'image de $\Psi_{U,U'}$ par le foncteur (2.2) (resp. (2.3)).

Démonstration. C'est la construction de la double fibration qui remonte à Bogomolov, Katsylo… (« lemme sans nom », *cf.* [8, §3.2]).

Définissons le morphisme $\Psi_{U,U'}$. Soit E' une représentation linéaire associée à U' : U' est un ouvert G-stable de E', de coniveau $\geqslant r$. Comme U est l'espace total d'un G-torseur et que $U \times E' \to U$ est un fibré vectoriel G-équivariant, le point 3 de la Proposition 1.11 montre que $U \times E'$ est aussi l'espace total d'un G-torseur et que $(U \times E')/G \to U/G$ est un fibré vectoriel. D'après le Lemme 1.13, comme $U \times U' \hookrightarrow U \times E'$ est une immersion ouverte, $U \times U'$ est encore (l'espace total d'un) G-torseur. On a ainsi un diagramme

$$\begin{tikzcd}
U \times E' \arrow[d, "p"'] & U \times U' \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[r, "p_{U'}^{U,U'}"] \arrow[d, "p_U^{U,U'}"'] & U' \\
U \arrow[r, equal] & U. &
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, $p \in S^h$ et $j \in S_r^o$ (Lemme 2.2). On définit $\Psi_{U,U'}$ comme la composition $p_{U'}^{U,U'} j^{-1} p^{-1}$. Notons que $p_U^{U,U'}$ est donc inversible dans $S_r^{-1}(G - \mathbf{Tors})$ et qu'on a aussi

$$\Psi_{U,U'} = p_{U'}^{U,U'} \left(p_U^{U,U'}\right)^{-1}, \tag{2.4}$$

ce qui montre que $\Psi_{U,U'}$ ne dépend que de U' et pas de l'immersion $U' \hookrightarrow E'$.

Il reste à vérifier les trois propriétés de l'énoncé : elles découlent immédiatement de (2.4). □

Définition 2.14. Soit $r > 0$. On note

$$\mathbb{E}_r G = \varinjlim U \in S_r^{-1}(G - \mathbf{Tors})$$
$$E_r G = \varinjlim U \in S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$$
$$B_r G = \varinjlim U/G \in S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$$

où les limites sont prises sur le système transitif d'isomorphismes $\Psi_{U,U'}$, pour U, U' parcourant les G-torseurs linéaires de coniveau $\geqslant r$.

Remarque 2.15. La notion de limite inductive sur un groupoïde trivial n'est pas très sérieuse : tout terme du système inductif en vérifie la propriété universelle. Cette notion est donc soit utile quand on a un foncteur « limite inductive » explicite (par exemple dans la catégorie des ensembles), soit rassurante sur le plan psychologique. On peut la considérer comme l'ensemble des termes du système inductif, sans choix privilégié.

Lemme 2.16. *L'objet $E_r G \in S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ est « contractile » : le morphisme naturel $E_r G \to \operatorname{Spec} k$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Cet objet est représenté par l'espace total d'un G-torseur linéaire de coniveau $\geqslant r$: l'énoncé est donc évident. □

L'objet $\mathbb{E}_r G$ a les propriétés « universelles » suivantes, qui sont de simples reformulations de la construction 2.13 :

Lemme 2.17. *Dans la catégorie $S_r^{-1}(G - \mathbf{Tors})$,* *(a) Si U est l'espace total d'un G-torseur, on a un « morphisme classifiant » $\Psi_U : U \to \mathbb{E}_r G$, d'où un carré commutatif*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\psi_U"] \arrow[d] & E_r G \arrow[d] \\ U/G \arrow[r, "\varphi_U"] & B_r G \end{tikzcd}$$

dans $S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$.

(b) Si $f : U' \to U$ est un morphisme de G-torseurs, on a $\Psi_{U'} = \Psi_U \circ f$.

(c) Si U est un G-torseur potentiel, linéaire de coniveau $\geqslant r$, on a un morphisme canonique $\Theta_U : \mathbb{E}_r G \to U$.

(d) Si $f : U' \to U$ est un morphisme avec U, U' comme en (c), alors $\Theta_U = f \circ \Theta_{U'}$.

(e) Si U est un G-torseur linéaire de coniveau $\geqslant r$, Ψ_U et Θ_U sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

Exemple 2.18. Si $H \subset G$ est un sous-groupe fermé de G, alors $G \to G/H$ est un H-torseur. Donc on a un morphisme canonique

$$G \to \mathbb{E}_r H \tag{2.5}$$

dans $S_r^{-1}(H - \mathbf{Tors})$, induisant un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d] & E_r H \arrow[d] \\ G/H \arrow[r] & B_r H \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

dans $S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$.

Le lemme suivant est évident par construction :

Lemme 2.19. *Considérons les foncteurs canoniques $\tilde{\Pi}_r : S_{r+1}^{-1}\,\mathbf{Tors} \to S_r^{-1}\,\mathbf{Tors}$ et $\Pi_r : S_{r+1}^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \to S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$. Alors on a des isomorphismes canoniques :*

$$\tilde{\Pi}_r(\mathbb{E}_{r+1}G) \simeq \mathbb{E}_r G, \qquad \Pi_r(E_{r+1}G) \simeq E_r G, \qquad \Pi_r(B_{r+1}G) \simeq B_r G.$$

Remarque 2.20. L'image de G dans $S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ est toujours un objet en groupes ; on peut donc parler de G-objet dans cette catégorie, et le foncteur (2.2) s'enrichit en un foncteur $S_r^{-1}(G - \mathbf{Tors}) \to G - (S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}})$. Ceci permet de considérer $E_r G$ comme un G-objet, mais malheureusement pas $E_r G \to B_r G$ comme un G-fibré principal...

2.5. Fonctorialité en G

Définition 2.21. Soient $f : G \to H$ un homomorphisme de k-groupes algébriques linéaires et X un schéma sur lequel H opère. On note $f^*(X)$ le schéma X muni de l'action de G via f : c'est l'image réciproque de X par f.

Proposition 2.22. *La loi $G \mapsto B_r G$ définit un foncteur $B_r : \mathbf{Grp} \to S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$. Les diagrammes*

$$\begin{tikzcd} & S_{r+1}^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \arrow[dd, "\Pi_r"] \\ \mathbf{Grp} \arrow[ur, "B_{r+1}"] \arrow[dr, "B_r"'] & \\ & S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \end{tikzcd}$$

sont naturellement commutatifs.[2]

Démonstration. Soit $f : G \to H$ un homomorphisme. Soient U un G-torseur linéaire de coniveau $\geqslant r$ et U' un H-torseur linéaire de coniveau $\geqslant r$, ce dernier de représentation sous-jacente E'. Alors G opère aussi sur E' via f, en laissant stable U'. Décomposons f comme suit :

$$G \twoheadrightarrow G/N \hookrightarrow H,$$

où $N = \mathrm{Ker}(f)$. D'après le Corollaire 1.3, U' est l'espace total d'un $f(G/N)$-torseur et $U'/(f(G/N)) \to U'/H$ est fidèlement plat. On note $f^*(U')$ l'image réciproque de U' relative à f (déf. 2.21). Donc

$$f^*\big(U'\big)/(G/N) \xrightarrow{\sim} U'/\big(f(G/N)\big) \to U'/H$$

est fidèlement plat et $f^*(U')$ est aussi l'espace total d'un G/N-torseur (i.e. $f^*(U')$ est l'espace total d'un G-torseur potentiel). D'après la Proposition 1.2, le quotient géométrique $f^*(U')/G$ existe et est égal à $f^*(U')/(G/N)$. Notons $\pi_f^{U'} : f^*(U')/G \to U'/H$. On obtient donc un morphisme de B_rG vers B_rH comme suit :

$$B_rG \xleftarrow{\sim} U/G \xrightarrow{\varphi^G_{U,f^*(U')}} f^*(U')/G \xrightarrow{\pi_f^{U'}} U'/H \xrightarrow{\sim} B_rH.$$

Voir construction 2.13 pour $\varphi^G_{U,f^*(U')}$: on a ajouté G en exposant pour en garder trace dans la suite. Par la transitivité de cette construction, ce morphisme ne dépend pas du choix de U et U'. On le note B_rf.

Si $g : H \to K$ est un autre morphisme, on a

$$B_r(gf) = B_rg \circ B_rf.$$

En effet, soit U'' un K-torseur linéaire de coniveau $\geqslant r$. Il nous faut montrer que

$$\pi_{gf}^{U''}\varphi^G_{U,(gf)^*(U'')} = \pi_g^{U''}\varphi^H_{U',g^*(U'')}\pi_f^{U'}\varphi^G_{U,f^*(U')}.$$

[2] Rappelons ce que cela signifie : il existe un isomorphisme naturel $B_r \simeq \Pi_r B_{r+1}$.

Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} U/G \arrow[r, "\varphi^G_{U,f^*(U')}"] & f^*(U'/G) \arrow[r, "\varphi^G_{f^*(U'),(gf)^*(U'')}"] \arrow[d, "\pi_f^{U'}"'] & (gf)^*(U''/G) \arrow[d, "\pi_f^{U''}"'] \\ & U'/H \arrow[r, "\varphi^H_{U',g^*(U'')}"] & g^*(U''/H) \arrow[d, "\pi_g^{U''}"'] \\ & & U''/K. \end{tikzcd} \tag{2.7}$$

On a

$$\varphi^G_{U,(gf)^*(U'')} = \varphi^G_{f^*(U'),(gf)^*(U'')}\varphi^G_{U,f^*(U')}$$

(propriété de transitivité de φ dans la construction 2.13) et

$$\pi_{gf}^{U''} = \pi_g^{U''} \circ \pi_f^{U'_0}.$$

Considérons maintenant le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} U'/G \arrow[d] & (U' \times U'')/G \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & U''/G \arrow[d] \\ U'/H & (U' \times U'')/H \arrow[l] \arrow[r] & U''/H. \end{tikzcd}$$

Il est commutatif. Ceci implique que le rectangle dans le diagramme (2.7) l'est aussi. Enfin, l'assertion « naturellement commutatifs » résulte du Lemme 2.19 dont les isomorphismes sont clairement naturels en G. □

Exemple 2.23. a) En prenant $H = 1$, on obtient un morphisme canonique

$$\operatorname{Spec} k \simeq B_r 1 \to B_r G$$

bien que la catégorie $S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ soit construite en termes de morphismes plats. On note e_G ce « point rationnel » de $B_r G$. Une flèche vers $B_r G$ qui se factorise à travers e_G sera dite *nulle*.

b) En prenant $H \subset G$ et en tenant compte de l'exemple 2.18, on obtient une suite dans $S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$

$$G \to G/H \to B_r H \to B_r G$$

dans laquelle les compositions de deux flèches successives sont nulles. Nous ignorons sous quelles conditions, pour $X \in S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$, la suite correspondante d'ensembles

$$S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}(X, G) \to S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}(X, G/H) \to S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}(X, B_r H) \to S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}(X, B_r G)$$

est exacte (voir Note 3 ci-dessous).

2.6. Le classifiant d'un produit

Le lemme suivant résulte de la Définition 2.14 et du Lemme 1.10 :

Lemme 2.24. *Soient G, H deux k-groupes algébriques linéaires, et $r > 0$. On a un isomorphisme canonique et bifonctoriel :*

$$B_r(G \times H) \xrightarrow{\sim} B_rG \times B_rH. \tag{2.8}$$

Mise en garde 2.25. Il faut donner un sens au membre de droite de (2.8) comme objet de $S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$. On vérifie tout de suite que le produit cartésien $\times : \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \times \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \to \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ induit un bifoncteur $S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \times S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \to S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$, encore noté $\times$. C'est celui qui intervient dans (2.8). On prendra garde toutefois que ce bifoncteur n'a pas la propriété universelle d'un produit.

2.7. Application : le théorème de Fischer sur un corps quelconque

Rappelons d'abord la notion d'équivalence stable et de rationalité stable :

Définition 2.26. Soit X une k-schéma intègre de type fini. On dit que

- X est *k-rationnel* si il est k-birationnel à un espace affine.
- X est *stablement k-rationnel* si $X \times_k \mathbb{A}^n$ est k-rationnel.

Plus généralement, si X, Y sont intègres et de type fini, on dit qu'ils sont *stablement équivalents* si $X \times \mathbb{A}^m$ est birationnel à $Y \times \mathbb{A}^n$ pour des entiers m, n convenables (notation : $X \sim_{\mathrm{st}} Y$).

L'équivalence stable est une relation d'équivalence sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de k-schémas intègres de type fini. Si $X, Y \in \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$, alors $X \sim_{\mathrm{st}} Y \Rightarrow X \simeq Y$ dans $S_1^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$, mais la réciproque est loin d'être claire.[3] Pour cette raison, la relation $B_1G \sim_{\mathrm{st}} B_1H$ n'a *a priori* pas de sens. Mais le lemme sans nom lui en donne un :

Définition 2.27. Soient G, H deux k-groupes algébriques linéaires, et soit U (resp. V) un G- (resp. un H-) torseur linéaire de coniveau > 0. Alors le fait que U/G soit stablement birationnel à V/H ne dépend que de G et H. On note cette relation $G \sim_{[\mathrm{st}]} H$.

On a alors le théorème bien connu [13] :

Théorème 2.28 *(Fischer). Ssupposons que k contienne le groupe μ_m des racines m-ièmes de l'unité où m est inversible dans k et soit A un groupe abélien fini d'exposant m. Alors $A \sim_{[\mathrm{st}]} 1$.*

Retrouvons ce théorème dans son contexte naturel :

Théorème 2.29. *(Cf. [30, prop. 7.6.2].) Le corps k étant quelconque, soit M un k-groupe de type multiplicatif déployé : M est de type multiplicatif et son groupe des caractères est un module galoisien trivial (de manière équivalente : M est un sous-groupe fermé d'un tore déployé). Alors $G \times M \sim_{[\mathrm{st}]} G$ pour tout k-groupe linéaire G. En particulier, $B_1(G \times M) \xrightarrow{\sim} B_1G$.*

Démonstration. Soit $X(M)$ le groupe des caractères de M. La relation $\sim_{[\mathrm{st}]}$ sur les k-groupes linéaires étant clairement transitive et stable par produit, on se ramène d'abord à $G = 1$, puis (par récurrence sur le nombre de facteurs cycliques) au cas où $X(M)$ est cyclique, c'est-à-dire au cas où $M = \mathbb{G}_m$ ou μ_m pour un entier $m > 1$.

[3] La question est de savoir si tout isomorphisme dans $S_1^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ s'écrit comme zig-zag de morphismes de S_1.

Dans les deux cas, M admet une représentation linéaire très fidèle de rang 1, à savoir $E = k$ muni de l'action par homothéties. Le M-torseur linéaire correspondant est $U = E - \{0\}$. Si $M = \mathbb{G}_m$, on a $U/M = \operatorname{Spec} k$. Si $M = \mu_m$, il s'agit du torseur de Kummer ; donc $U/M \simeq \mathbb{G}_m \sim_{\mathrm{st}} \operatorname{Spec} k$. □

2.8. Comparaison avec le classifiant étale de Morel–Voevodsky

Dans ce numéro, on indique de quelle façon les objets B_rG se comparent à l'objet $B_{\text{ét}}G \in \mathcal{H}(k) = \mathcal{H}$ défini dans [36, §4].

Rappelons qu'on a un foncteur canonique $\mathbf{Sm} \to \mathcal{H}$, qui rend les morphismes de S^h inversibles. On en déduit un diagramme commutatif de catégories et foncteurs :

$$\begin{tikzcd} (S^h)^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \arrow[r] \arrow[d] & S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \arrow[d, "E_r"'] \\ \mathcal{H} \arrow[r, "D_r"] & S_r^{-1}\mathcal{H} \end{tikzcd} \tag{2.9}$$

pour tout $r > 0$. Étant donné la description de $B_{\text{ét}}G$ dans [36, §4, prop. 2.6 et rem. 2.7], on voit que

Proposition 2.30. *Pour tout groupe algébrique linéaire G, les objets $E_r(B_rG)$ et $D_r(B_{\text{ét}}G)$ de $S_r^{-1}\mathcal{H}$ sont canoniquement et fonctoriellement isomorphes.* □

3. Reformulation en termes de foncteurs homotopiques

3.1. Foncteurs homotopiques

Le foncteur $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \to S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ est le cas universel de la définition suivante :

Définition 3.1. Soit F un foncteur de $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ vers une catégorie $\mathcal{C}$ et soit r un entier > 0. On dit que F est *homotopique et pur en coniveau* $\geqslant r$ s'il vérifie les deux axiomes suivants :

1. **Homotopie :** Si $f : V \to X$ est un fibré vectoriel, alors $F(f) : F(V) \to F(X)$ est un isomorphisme.
2. **Pureté :** $F(U) \xrightarrow{\sim} F(X)$ si U est un ouvert de X tel que $\delta(X,U) \geqslant r$.

Autrement dit, tout foncteur F vérifiant les conditions de la définition 3.1 se factorise à travers $S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$. De la Définition 2.14, du Lemme 2.19 et de la Proposition 2.22, on déduit alors un objet $F(BG)$, bien défini et fonctoriel en G.

Exemple 3.2. Si F est homotopique et pur en coniveau $\geqslant r$, alors

$$Y \mapsto F(X \times Y)$$

l'est aussi.

Définition 3.3. Soit $F : \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ un foncteur homotopique et pur en coniveau $\gg 0$. On note

$$\nu(F) = \inf\{\nu \geqslant 0 \mid F \text{ est pur en coniveau } > \nu\}.$$

C'est le *coniveau* de F.

Remarque 3.4. Dans la définition 3.1, le foncteur F est covariant. Dans la suite, on utilisera le plus souvent des foncteurs contravariants. Mais on passe des uns aux autres en remplaçant $\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ (catégorie opposée). C'est ce que nous faisons dans le théorème suivant, formulation générale d'un théorème de Totaro [46, th. 1.3] :

Théorème 3.5. *Supposons F contravariant, à valeurs dans la catégorie des ensembles, homotopique et pur en coniveau $> r$. Alors $F(BG)$ s'identifie à l'ensemble M des symboles α associant à chaque variété lisse X et à chaque G-torseur $E \to X$ un élément $\alpha(E) \in F(X)$ tel que pour tout morphisme $f : Y \to X$, on ait*

$$\alpha\big(f^*E\big) = f^*\big(\alpha(E)\big).$$

Démonstration. Soit $E \to X$ un G-torseur comme dans l'énoncé. D'après le lemme 2.17 (a), on a un morphisme

$$F(\varphi_E) : F(BG) \to F(X)$$

qui définit une application $F(BG) \to M$ grâce au point (b) du même lemme. Inversement, à $\alpha \in M$ on associe $\alpha(EG) \in F(BG)$ (ce qui est bien défini : prendre un représentant quelconque de $\mathbb{E}_rG$ dans $S_r^{-1}(G - \mathbf{Tors})$). Il est immédiat que ces flèches sont inverses l'une de l'autre. □

En utilisant les points (c) et (d) du Lemme 2.17, on obtient une version covariante de cet énoncé :

Théorème 3.6. *Dans le théorème 3.5, remplaçons « contravariant » par « covariant ». Alors $F(BG)$ s'identifie à l'ensemble des symboles α associant à chaque G-torseur potentiel U, linéaire de coniveau $\geqslant r$, un élément $\alpha(U) \in F(U/G)$ tel que pour tout G-morphisme $f : U \to V$, on ait*

$$\alpha(V) = f_*\big(\alpha(U)\big).$$

Remarque 3.7. Soit (F_n) un système inductif de foncteurs homotopiques et purs en coniveau $\geqslant r_n$ (avec $r_n \to +\infty$) vers une catégorie $\mathcal{C}$ admettant des limites inductives filtrantes dénombrables. Pour $X \in \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$, posons $F(X) = \varinjlim F_n(X)$. Ceci définit un nouveau foncteur $F = \varinjlim F_n$. Alors le Lemme 2.19 donne un sens à $F(BG) := \varinjlim F_n(BG)$, qui est alors fonctoriel en G, même si F n'est pur en aucun coniveau.

On peut procéder de même en remplaçant « limites inductives » par « limites projectives ».

En termes des B_rG, cela reviendrait à introduire la catégorie

$$2 - \varprojlim S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$$

ce qui paraît trop pédant dans le présent contexte...

Définition 3.8. Soit F un foncteur de $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ à valeurs dans une catégorie karoubienne (dont tout endomorphisme idempotent a un noyau). Pour tout k-groupe algébrique linéaire G, on pose

$$\tilde{F}(BG) = \operatorname{Ker}\big(F(B\varepsilon)\big)$$

où ε est l'idempotent $G \to \operatorname{Spec}(k) \to G$ (cf. ex. 2.23 a)).

3.2. Exemples de foncteurs homotopiques

Le corps k est maintenant supposé parfait. On note G_k son groupe de Galois absolu.

Soit $j : U \hookrightarrow V$ une immersion ouverte de coniveau $\delta(j) = r$ (*cf.* déf. 2.1). On va donner ici des conditions sur r pour que $F(j)$ soit un isomorphisme, pour un certain nombre de foncteurs F. D'après le Lemme 1.9 (appliqué avec $G = 1!$), on peut se limiter aux immersions ouvertes $j : U \hookrightarrow V$ telles que le fermé complémentaire $Z \overset{i}{\hookrightarrow} V$ soit lisse, irréductible et de codimension r.

3.2.1. Cohomologie étale

Proposition 3.9. *Soient M un G_k-module de torsion première à* car k *et $q \geqslant 0$. Alors le foncteur $F : X \mapsto H^q_{\text{ét}}(X, M)$ est homotopique et pur en coniveau $> \frac{q+1}{2}$.*

Démonstration. On se ramène au cas où M est d'exposant fini m. L'axiome d'homotopie résulte de l'acyclicité de la cohomologie étale [35, p. 240, cor. 4.20] plus un argument de type Mayer–Vietoris. La pureté résulte de la longue suite exacte dans la preuve de [35, p. 244, cor. 5.3] :

$$\ldots \to H^{q-2r}(Z, M \otimes T_{Z/V}) \to H^q(V, M) \to H^q(U, M) \to H^{q-2r+1}(Z, M \otimes T_{Z/V}) \to \ldots$$

où le faisceau $T_{Z/V}$ est localement isomorphe à $\mathbb{Z}/m$. □

3.2.2. Cohomologie motivique

Dans ce numéro et les suivants, on va utiliser la catégorie triangulée des complexes motiviques de Voevodsky $\mathbf{DM} := \mathbf{DM}^{\text{eff},-}_{\text{Nis}}(k)$, pour laquelle nous renvoyons à [33, Lect. 14]. Rappelons que cette catégorie possède une structure monoïdale, qu'on a un foncteur

$$M : \mathbf{Sm}(k) \to \mathbf{DM},$$

et des « objets de Tate » $\mathbb{Z}(n) := \mathbb{Z}(1)^{\otimes n} \in \mathbf{DM}$ pour tout $n \geqslant 0$, dont nous utiliserons les trois propriétés suivantes (on note $M(n) := M \otimes \mathbb{Z}(n)$) :

Homotopie :

$$M(E) \xrightarrow{\sim} M(X) \tag{3.1}$$

pour tout fibré vectoriel $E \to X$ [33, 14.5].

Triangle exact de Gysin :

$$M(U) \to M(U - Z) \to M(Z)(r)[2r] \to M(U)[1] \tag{3.2}$$

pour tout couple lisse (U, Z) de codimension r [33, 15.15].

Simplification : Le foncteur $M \mapsto M(1)$ est pleinement fidèle [33, 16.25, 16.26].

Pour $X \in \mathbf{Sm}_{\text{fl}}$, notons $H^p(X, \mathbb{Z}(q))$ les groupes de cohomologie motivique de X définis par Suslin–Voevodsky [33, déf. 3.4] : on a aussi

$$H^p\big(X, \mathbb{Z}(q)\big) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{DM}}\big(M(X), \mathbb{Z}(q)[p]\big)$$

[33, prop. 14.16]. De tout ceci on tire la *suite exacte de Gysin*

$$\ldots \to H^{q-2r}\big(Z, \mathbb{Z}(n-r)\big) \to H^q\big(U, \mathbb{Z}(n)\big) \to H^q\big(U - Z, \mathbb{Z}(n)\big) \to H^{q+1-2r}\big(Z, \mathbb{Z}(n-r)\big) \to \ldots \tag{3.3}$$

pour (U, Z) comme en (3.2) [33, thm. 15.15].

Proposition 3.10. *Pour tout $q \in \mathbb{Z}$ et tout $n \geqslant 0$, le foncteur $X \mapsto H^q(X, \mathbb{Z}(n))$ est homotopique et pur en coniveau $> n$.*

Démonstration. La propriété d'homotopie résulte de l'isomorphisme La preuve de la pureté est la même que pour la Proposition 3.9 étant donné (3.3), avec deux différences : on a $\mathbb{Z}(q) = 0$ si $q < 0$, et on ignore si $H^p(X, \mathbb{Z}(q)) = 0$ pour $p < 0$ en général (c'est la conjecture de Beilinson–Soulé). □

Exemple 3.11. Les groupes de cohomologie motivique sont canoniquement isomorphes aux groupes de Chow supérieurs de Bloch [33, Lect. 17]. En particulier, pour $q = 2n$ on a $H^{2n}(X, \mathbb{Z}(n)) = CH^n(X)$: on retrouve le fait que $CH^n(B_rG)$ est bien défini pour $r > n$ [46, déf. 1.2].

3.2.3. Cohomologie motivique étale

Définition 3.12. Soit X une k-variété lisse. Pour $(q, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et pour un groupe abélien A, on pose

$$H^q_{\text{ét}}\big(X, A(n)\big) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{DM}_{\text{ét}}}\big(\alpha^* M(X), A \otimes \mathbb{Z}(n)_{\text{ét}}[q]\big)$$

où $\mathbf{DM}_{\text{ét}} := \mathbf{DM}^{\text{eff},-}_{\text{ét}}(k)$ est la catégorie triangulée analogue à $\mathbf{DM}$, mais construite en termes de la topologie étale [33, déf. 9.2], et

$$\mathbb{Z}(n)_{\text{ét}} = \begin{cases} \alpha^*\mathbb{Z}(n) & \text{si } n \geqslant 0 \\ (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)[-1] & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

où $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n) := \varinjlim_{(m, \operatorname{car} k)=1} \mu_m^{\otimes n}$, cf. [19, déf. 3.1].

Rappelons que pour $A = \mathbb{Z}/m$ ou $A = \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l$ (m, l inversibles dans k), on retrouve la cohomologie étale ordinaire à coefficients dans des racines de l'unité tordues pour tout $n \in \mathbb{Z}$ [33, 10.6].

On a un foncteur évident $\alpha^* : \mathbf{DM} \to \mathbf{DM}_{\text{ét}}$ (changement de topologie).

Proposition 3.13. *Soit $(q, n) \in \mathbb{Z}$. Alors le foncteur*

$$X \mapsto H^q_{\text{ét}}\big(X, \mathbb{Z}(n)\big)$$

est homotopique et pur en coniveau $\geqslant \inf(n, \frac{q+1}{2})$, au sens de la définition 3.1.

Démonstration. C'est la même que pour la Proposition 3.10 : l'axiome d'homotopie est clair d'après (3.1). Pour l'axiome de pureté, soit U une variété lisse et soit Z un fermé lisse purement de codimension r. En utilisant le théorème de simplification de [19, prop. A.4], on trouve :

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{DM}^{\text{eff}}_{\text{ét}}(k)}\big(\alpha^* M(Z)(r)[2r], \mathbb{Z}(n)_{\text{ét}}[q]\big) \simeq H^{q-2r}_{\text{ét}}\big(Z, \mathbb{Z}(n-r)\big).$$

Si $r > n$, ce groupe est la cohomologie étale d'un complexe de faisceaux concentré en degré 1 : il est donc nul dès que $q - 2r - 1 < 0$, soit $q - 2r \leqslant 0$. On conclut à l'aide de la suite exacte de Gysin analogue à (3.3). □

3.2.4. Homologie motivique

Définition 3.14. L'*homologie motivique* est définie par

$$H_i\big(X, \mathbb{Z}(n)\big) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{DM}}\big(\mathbb{Z}(n)[i], M(X)\big).$$

Contrairement aux précédents, ce foncteur est *covariant* en X.

Proposition 3.15. *$H_i(-,\mathbb{Z}(n))$ est homotopique et pur en coniveau $> i-n+1$.*

Démonstration. C'est la même que ci-dessus. L'axiome d'homotopie résulte de (3.1). D'après le triangle exact de Gysin (3.2) et le théorème de simplification, on a une longue suite exacte

$$\ldots \to H_{i+1-2r}\bigl(Z,\mathbb{Z}(n-r)\bigr) \to H_i\bigl(U,\mathbb{Z}(n)\bigr) \to H_i\bigl(V,\mathbb{Z}(n)\bigr) \to H_{i-2r}\bigl(Z,\mathbb{Z}(n-r)\bigr) \to \ldots$$

De plus, pour X lisse, on a $H_i(X,\mathbb{Z}(n)) = 0$ si $i < n$ [26, prop. 6.1]. Donc $H_i(U,\mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{\sim} H_i(V,\mathbb{Z}(n))$ si $r > i-n+1$. □

3.2.5. Le faisceau h_0^{Nis}

Notons HI la catégorie des faisceaux Nisnevich avec transferts invariants par homotopie [33, ch. 13]. Soit $X \in \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$. Le foncteur

$$\mathrm{HI} \ni \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X)$$

est représentable par un objet $h_0^{\mathrm{Nis}}(X) \in \mathrm{HI}$ (*cf.* [47, Lemma 3.2.1]).

Proposition 3.16. *Le foncteur (covariant) $X \mapsto h_0^{\mathrm{Nis}}(X)$ est homotopique et pur en coniveau $\geqslant 2$.*

Démonstration. La propriété d'homotopie se réduit à la $\mathbb{A}^1$-invariance homotopique par un argument de Mayer-Vietoris. Pour la pureté, on observe que si $Z \subset X$ est un fermé de codimension $\geqslant 2$, on a un isomorphisme $\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(X-Z)$ pour tout $\mathcal{F} \in \mathrm{HI}$ en vertu de la résolution de Gersten de [33, 24.11]. □

3.2.6. K-théorie algébrique

Soit $i \geqslant 0$. Le foncteur de Quillen

$$K_i : \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$$

est homotopique, mais pur en aucun coniveau. Pour donner un sens à $K_i(BG)$, on peut utiliser la remarque 3.7 : notons, pour $r \geqslant 0$ et $X \in \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$, $K_i(X)^{(r)}$ le r-ième cran de la filtration par la codimension du support. La suite spectrale de Quillen

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} K_{-p-q}\bigl(k(x)\bigr) \Rightarrow K_{-p-q}(X),$$

aboutissant à cette filtration, montre que le foncteur $K_i/K_i^{(r)}$ est homotopique et pur en coniveau $> (r-1)^2$ (voir le raisonnement de la preuve de la Proposition 8.1 ci-dessous). De plus, $K_i(X)^{(r)} = 0$ pour $r > \dim X$: on a donc un isomorphisme

$$K_i \xrightarrow{\sim} \varprojlim_r K_i/K_i^{(r)}$$

sur $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$, et on est en mesure d'appliquer la remarque indiquée. On notera $\hat{K}_i(BG)$ le groupe obtenu ainsi : pour $i = 0$, on retrouve la définition de $K_0(BG)$ donnée dans [46, §3].

Si l'on utilise par contre la formule

$$K_i(BG) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet}\bigl(\Sigma_s^i(B_{\text{ét}}G_+), (BGL_\infty, *)\bigr)$$

de [36, p. 140, th. 3.13], la Proposition 2.30 fournit des homomorphismes

$$K_i(BG) \to \hat{K}_i(BG)$$

qui ne sont pas *a priori* bijectifs, mais le deviennent après complétion du membre de gauche par rapport à la filtration par la codimension du support (le membre de droite étant complet par construction). Ceci est à comparer à Jacowski et Oliver [20].

3.2.7. Autres exemples

Nous laissons aux lecteurs le plaisir de les explorer (cobordisme algébrique, etc.) Dans la Section 5, on calculera le coniveau des groupes de Chow à coefficients de Rost (Corollary 5.11).

3.3. Le transfert

Soit $G \in \mathbf{Grp}$, et soit $H \subset G$ un sous-groupe fermé d'indice fini. Donnons-nous un foncteur $F : \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$, homotopique et pur en coniveau $> r$, qui soit muni d'une fonctorialité covariante pour les morphismes finis et plats. On peut alors définir un homomorphisme

$$\mathrm{Cor}_H^G : F(BH) \to F(BG) \tag{3.4}$$

de la manière suivante. Soit U un G-torseur linéaire de coniveau $> r$. Alors $U/H \to U/G$ est fini et plat, d'où le morphisme cherché : on vérifie comme d'habitude qu'il ne dépend pas du choix de U.

Lemme 3.17. *Supposons que les transferts de F vérifient l'identité*

$$f_* \circ f^* = \deg(f)$$

pour f fini et plat. Alors, pour tout G fini, on a $|G|\tilde{F}(BG) = 0$.

La condition du Lemme 3.17 est vérifiée dans tous les exemples du §3.2, sauf dans le cas de la K-théorie algébrique.[4] Pour $F = CH^r$, *cf.* [46, §4] où l'utilisation de ces transferts est implicite mais leur construction n'est pas explicitée.

4. Quelques calculs de BG

4.1. Calcul de $B\mathbb{G}_m$

Appliquons la construction de Totaro, décrite dans la remarque 2.6, avec $E_0 = \mathbb{A}^1$, muni de l'action de $\mathbb{G}_m$ par homothéties. Avec les notations de loc. cit., E_0^N s'identifie à $\mathbb{A}^N$ muni de l'action de $\mathbb{G}_m$ par homothéties ; $S_N = \{0\}$ est de codimension N, $U_N = \mathbb{A}^N - \{0\}$ et $B_r\mathbb{G}_m$ est représenté par $\mathbb{P}^{N-1}$ pour $r \leqslant N$.

4.2. Calcul de BGL_n

C'est le même qu'en 4.1. On prend pour E_0 la représentation canonique de GL_n ; pour $N > n$, U_N/GL_N s'identifie à la grassmannienne $\mathrm{Grass}_n(\mathbb{A}^N)$.

D'après l'estimation de la remarque 2.6, on obtient que $\mathrm{Grass}_n(\mathbb{A}^N)$ représente B_rGL_n pour $r \leqslant N-n+1$.

[4] Dans le cas de l'homologie motivique, il faut renverser le sens des flèches. . . .

Pour un groupe G en général, la construction de Totaro part d'un plongement $G \hookrightarrow GL_m$ et réalise naturellement B_rG comme fibré au-dessus de B_rGL_m, soit au-dessus d'une grassmannienne comme ci-dessus. Illustrons ceci par trois exemples :

4.3. Calcul de $B\mu_m$

Soit $\mathcal{O}(1)$ le fibré canonique de $\mathbb{P}^{N-1}$: c'est le quotient du fibré trivial $\mathbb{A}^N \times_k \mathbb{P}^{N-1}$ qui paramètre les quotients de $\mathbb{A}^N$ localement libres de rang 1. Son dual $\mathcal{O}(-1)$ est un sous-fibré de rang 1 du fibré dual $(\mathbb{A}^N)^\vee \times_k \mathbb{P}^{N-1}$. Si R est une k-algèbre, un élément de $\mathcal{O}(-1)(R)$ est un couple $(\varphi, L) \in (R^N)^\vee \times \mathbb{P}^{N-1}(R)$ tel que $\operatorname{Ker}\varphi \supset L$. Soit 0 la section nulle de $\mathcal{O}(-1)$: la description de $\mathcal{O}(-1)(R)$ montre que la projection

$$\mathcal{O}(-1) - 0 \to \left(\mathbb{A}^N\right)^\vee - \{0\}$$

est un isomorphisme, qui est évidemment $\mathbb{G}_m$-équivariant. Considérons maintenant le morphisme

$$\begin{aligned} f_m : \mathcal{O}(-1) - 0 &\to \mathcal{O}(-m) - 0 \\ x &\mapsto x^{\otimes m} \end{aligned}$$

où, comme d'habitude, $\mathcal{O}(-m) = \mathcal{O}(-1)^{\otimes m}$. Alors f_m est fini et plat, et identifie $\mathcal{O}(-1) - 0$ à l'espace total d'un μ_m-torseur de base $\mathcal{O}(-m) - 0$. On a donc montré :

Proposition 4.1. *Pour $r \leqslant N$, le morphisme naturel $B_r\mu_m \to B_r\mathbb{G}_m$ est représenté par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}(-m) - 0 \to \mathbb{P}^{N-1}$.*

Le premier auteur a appris de Fabien Morel cette version algébrique des espaces lenticulaires. Notons que le cas où m est divisible par $\operatorname{car} k$ n'est pas exclu.

4.4. Calcul de BSL_n

On prend la représentation de 4.2. Pour décrire le quotient de U par SL_n, considérons le fibré tautologique $\mathcal{E}_n \to \operatorname{Grass}_n(\mathbb{A}^N)$, quotient du fibré trivial $\mathbb{A}^N \times_k \operatorname{Grass}_n(\mathbb{A}^N)$, qui paramètre les quotients de $\mathbb{A}^N$ localement libres de rang n. Notons $\mathcal{L} = \det(\mathcal{E}_n^\vee)$. L'action naturelle de GL_n sur $\mathcal{E}_n$ en induit une sur $\mathcal{L}$, qui se factorise par $\det : GL_n \to \mathbb{G}_m$. Alors $\mathcal{L} - 0$ est un $\mathbb{G}_m$-torseur de base $\operatorname{Grass}_n(\mathbb{A}^N)$, et on voit que la projection $\mathcal{L} - 0 \to \operatorname{Grass}_n(\mathbb{A}^N)$ représente le morphisme $BSL_n \to BGL_n$ pour $r \leqslant N - n + 1$.

4.5. Description de $BPGL_n$

Partons de la représentation adjointe de GL_n, qui induit une représentation fidèle de PGL_n sur $E_0 = M_n$. Ceci réalise B_rPGL_n comme fibré au-dessus d'une grassmannienne $\operatorname{Grass}_{n^2}(\mathbb{A}^N)$ pour N assez grand. D'après M. Artin [1] et C. Procesi [41, pp. 240–241], son corps des fonctions est le corps des fractions du centre de l'algèbre des matrices génériques : voir aussi [8, 4.2].

5. Modules de cycles de Rost et cohomologie de cycles

5.1. Modules de cycles

Pour tout ce qui concerne les modules de cycles et leur cohomologie, on renvoie à l'article de Rost [42]. Nous nous contentons de résumer les points essentiels de sa théorie :

Soit $\mathcal{F}(k)$ la catégorie des corps de type fini sur k. Pour $F \in \mathcal{F}(k)$, on note $\mathcal{P}(F/k)$ l'ensemble des valuations discrètes divisorielles sur F, centrées en k (l'anneau $\mathcal{O}_v$ de v est une localisation d'une k-algèbre intègre de type fini en un point régulier de codimension 1). Si $v \in \mathcal{P}(F/k)$, on note $\kappa(v)$ son corps résiduel. Notons que l'hypothèse sur v entraîne

$$tr.deg.(F|k) = tr.deg.(\kappa_v|k) + 1.$$

5.1.1. Prémodules de cycles

Un *prémodule de cycles* (sur k) est un foncteur covariant M de $\mathcal{F}(k)$ vers la catégorie des groupes abéliens gradués, muni des structures supplémentaires suivantes :

1. Fonctorialité contravariante pour les extensions finies.
2. Pour chaque $F \in \mathcal{F}(k)$, une structure de $K_*^M F$-module gradué sur $M(F)$, où $K_*^M F$ est l'anneau de Milnor de F. On la note $x \cdot \rho$ où $x \in K_*^M F$ et $\rho \in M(F)$.
3. Pour $F \in \mathcal{F}(k)$ et $v \in \mathcal{P}(F/k)$, un « morphisme résidu » $\partial_v : M(F) \to M(\kappa(v))$, de degré -1.

Ces données sont assujetties à une liste d'axiomes donnée dans [42, déf. 1.1, p. 328].

5.1.2. Modules de cycles

Soit X un k-schéma : on écrit $M(x) = M(k(x))$ pour $x \in X$. Si X est normal intègre, alors l'anneau local de X en $x \in X^{(1)}$ est un anneau de valuation discrète de rang un ; soit $\partial_x : M_n(\xi_X) \to M_{n-1}(x)$ l'homomorphisme résidu associé, où ξ_X est le point générique de X. Pour X quelconque et $x, y \in X$, on en déduit un morphisme $\partial_y^x : M(x) \to M(y)$ [42, p. 337].

Définition 5.1. (Voir [42, déf. 2.1, p. 337].) Un *module de cycles* M sur k est un prémodule de cycles satisfaisant aux conditions (FD) et (C) suivantes :

(FD) : « SUPPORT FINI » . Soient X un k-schéma normal intègre et $\rho \in M(\xi_X)$, alors $\partial_x(\rho) = 0$ pour tout $x \in X^{(1)}$ en dehors d'un ensemble fini.

(C) : « FERMETURE » . Soit X intègre et local de dimension 2, alors

$$0 = \sum_{x \in X^{(1)}} \partial_{x_0}^x \circ \partial_x^\xi : M(\xi_X) \to M(x_0)$$

où ξ_X est le point générique et x_0 est le point fermé de X.

Proposition 5.2. *(Voir [42, prop. 2.2].) Soit M un module de cycles sur k. Alors les propriétés suivantes sont satisfaites pour tout corps F de type fini sur k.*

(H) : *HOMOTOPIE POUR $\mathbb{A}^1$. La suite suivante est exacte :*

$$0 \to M_*(F) \to M_*\big(F(t)\big) \xrightarrow{\partial_x} \bigoplus_{x \in (\mathbb{A}^1_F)_{(0)}} M_{*-1}\big(F(x)\big) \to 0$$

où $F(t)$ est le corps des fonctions de $\mathbb{A}^1_F$.

(RC) : *RÉCIPROCITÉ POUR LES COURBES. Soit X une courbe propre et lisse sur F. Alors la suite*

$$M_*\big(F(X)\big) \xrightarrow{\partial_x} \bigoplus_{x \in X_{(0)}} M_{*-1}\big(F(x)\big) \to M_{*-1}(F)$$

où les flèches $M_{*-1}(F(x)) \to M_{*-1}(F)$ proviennent de la fonctorialité contravariante, est un complexe.

De la propriété (H), on tire :

Lemme 5.3. *Soit K/F une extension unirationnelle dans $\mathcal{F}(k)$. Alors, pour tout module de cycles M sur k, l'application $M_*(F) \to M_*(K)$ est injective.*

Nous aurons besoin de la définition suivante :

Définition 5.4. Un module de cycles M est dit *connectif* s'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $M_n = 0$ pour tout $n < n_0$. On pose alors

$$\delta(M) = \inf\{n \mid M_n \neq 0\} \quad \big(\text{connectivité de } M\big).$$

Si M n'est pas connectif, on pose $\delta(M) = -\infty$.

En utilisant [26, thm. 1.3 et prop. 6.7], on peut montrer que tout module de cycles $\mathbb{Z}[1/p]$-linéaire, où p est l'exposant caractéristique de k, est limite inductive filtrante de modules de cycles connectifs.

5.2. Exemples de modules de cycles

5.2.1. La K-théorie de Milnor et la cohomologie galoisienne définissent des modules de cycles de connectivité 0 [42, rem. 2.4 et 2.5].

5.2.2. D'après [9, 6.2.1], tout foncteur additif contravariant de **DM** vers la catégorie des groupes abéliens fournit des modules de cycles (un pour chaque $n \in \mathbb{Z}$).

Un exemple de tel foncteur est donné par

$$C' \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathbf{DM}}\big(C', C\big)$$

où C est un objet de **DM**. En regardant la formule de [9, 6.2.1], on voit que les modules de cycles associés sont donnés par la formule

$$M_q^{(n)}(F, C) = H^q\big(F, C(n+q)\big)$$

où on pose, pour une k-variété lisse X

$$H^q\big(X, C(n+q)\big) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{DM}}\big(M(X), C(n+q)[q]\big)$$

puis

$$H^q\big(F, C(n+q)\big) = \varinjlim H^q\big(U, C(n+q)\big)$$

où U parcourt les modèles lisses de F/k. En prenant $C = \mathbb{Z}$, on voit que la cohomologie motivique définit des modules de cycles $M_q^{(n)}(F) = H^q(F, \mathbb{Z}(n+q))$, de connectivité $\geqslant -n$.[5]

[5] Sous la conjecture de Beilinson–Soulé, cette minoration s'améliore en : $\geqslant \sup(-n, 0)$.

5.2.3. Si C est un objet de $\mathbf{DM}_{\text{ét}}$, il définit un foncteur comme ci-dessus

$$C' \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathbf{DM}_{\text{ét}}}\big(\alpha^* C', C\big).$$

En prenant $C = \alpha^*\mathbb{Z}$, on voit que la cohomologie motivique étale définit des modules de cycles $M_q^{(n)}(F) = H^q_{\text{ét}}(F, \mathbb{Z}(n+q))$, de connectivité $\geqslant \inf(-n, 1)$ (même raisonnement que dans la preuve de la Proposition 3.13).[6]

5.3. Complexes de cycles et groupes de Chow

Définition 5.5. (Voir [42, 3.2, p. 346].) Soit M un module de cycles sur k, soit X un k-schéma de type fini et soit p un entier. Posons

$$C_p(X, M_n) = \bigoplus_{x \in X_{(p)}} M_{n+p}(x).$$

On définit une différentielle

$$d = d_X : C_p(X, M_n) \to C_{p-1}(X, M_n)$$

dont la composante d_y^x $(x \in X_{(p)}, y \in X_{(p-1)})$ est décrite dans [42, 2.1.0]. Cette définition est bien déterminée par l'axiome (FD). On a $d_X \circ d_X = 0$ [42, lem. 3.3].

Le complexe $C_*(X, M_n) = (C_p(X, M_n), d_X)_{p \geqslant 0}$ est appelé le *complexe de cycles homologique* sur X à coefficients dans M_n.

Si X est équidimensionnel, on pose aussi

$$C^p(X, M_n) = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} M_{n-p}(x)$$

et on définit :

$$d = d_X : C^p(X, M_n) \to C^{p+1}(X, M_n)$$

de la même manière. Le complexe $C^*(X, M_n) = (C^p(X, M_n), d_X)_{p \geqslant 0}$ est appelé le *complexe de cycles cohomologique* sur X à coefficients dans M.

On note $A_p(X, M_n)$ (*resp.* $A^p(X, M_n)$)[7] le p-ième groupe d'homologie (*resp.* de cohomologie) du complexe $C_*(X, M_n)$ (*resp.* $C^*(X, M_n)$). Avec Rost, on l'appelle le groupe de Chow des cycles de dimension p (*resp.* de codimension p) à coefficients dans M.

Exemple 5.6. Si X est intègre de point générique ξ_X, on a

$$A^0(X, M_n) = \operatorname{Ker} d = \bigcap_{x \in X^{(1)}} \operatorname{Ker} \partial_x^{\xi} \subset M_n(\xi_X).$$

On peut voir $A^0(X, M)$ comme le groupe des éléments non ramifiés sur X.

---

[6] Sous la conjecture de Beilinson-Soulé, cette minoration s'améliore en : $\geqslant \sup(\inf(-n, 1), 0)$.

[7] Rost note $A_p(X, M, n)$ et $A^p(X, M, n)$.

Remarque 5.7 *(Groupes de Chow classiques).* On a [42, rem. 5.1] :

$$A_p\bigl(X; K^M_{-p}\bigr) = CH_p(X) \quad \text{et} \quad A^p\bigl(X; K^M_p\bigr) = CH^p(X).$$

Par exemple, on a $CH_0(X) = A_0(X, K^M_0)$.

Remarque 5.8. Si X est équidimensionnel et de dimension d, alors $X^{(p)} = X_{(d-p)}$ et $C^p(X, M_n) = C_{d-p}(X, M_{n-d})$, donc

$$A^p(X, M_n) = A_{d-p}(X, M_{n-d}).$$

Lemme 5.9. *(Voir [42, (3.10), p. 350].) Soient $U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte et Z le fermé complémentaire. Soit p un entier positif. On a une suite exacte de complexes :*

$$0 \to C_*(Z, M_n) \to C_*(X, M_n) \to C_*(U, M_n) \to 0.$$

D'où une suite exacte de localisation [42, §5, p. 356] :

$$\ldots \to A_p(Z, M_n) \to A_p(X, M_n) \to A_p(U, M_n) \to A_{p-1}(Z, M_n) \to \ldots$$

Corollaire 5.10.

1. *Sous l'hypothèse du Lemme 5.9, on a*

$$A_p(X, M_n) \xrightarrow{\sim} A_p(U, M_n) \quad \textit{si } \dim Z < p - 1.$$

2. *De plus, si X est équidimensionnel, alors*

$$A^p(X, M_n) \xrightarrow{\sim} A^p(U, M_n) \quad \textit{si } \operatorname{codim}_X Z > \inf\bigl\{n - \delta(M), p + 1\bigr\}$$

(voir Définition 5.4 pour $\delta(M)$).

Démonstration. 1) résulte de la trivialité

$$A_p(Z, M_n) = 0 \text{ si } Z_{(p)} = \varnothing \quad i.e. \quad \dim Z < p.$$

2) Du Lemme 5.9 et de 1), en supposant que Z soit irréductible lisse de codimension c, on déduit que

$$A^p(X, M_n) \xrightarrow{\sim} A^p(U, M_n) \quad \text{si } c > p + 1.$$

Supposons M connectif. Si $x \in X^{(p)} \cap Z$, alors $x \in Z^{(p-c)}$ donc la suite exacte de localisation prend la forme :

$$\ldots \to A^{p-c}(Z, M_{n-c}) \to A^p(X, M_n) \to A^p(U, M_n) \to A^{p-c+1}(Z, M_{n-c}) \to \ldots$$

Si $n - c < \delta(M)$ *i.e.* $c > n - \delta(M)$, alors $M_{n-c} = 0$, donc on a aussi $A^p(X, M_n) \xrightarrow{\sim} A^p(U, M_n)$. On en déduit (2). $\square$

Corollaire 5.11. *$A^p(-, M_n)$ est un foncteur contravariant sur $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$, homotopique et pur en coniveau $>$* $\inf\{n - \delta(M), p + 1\}$.

Démonstration. D'après [42, §12, p. 382], $A^p(-, M_n)$ est un foncteur contravariant et l'invariance par homotopie est démontrée dans [42, prop. 8.6, p. 370]. L'axiome de pureté résulte du Corollaire 5.10. □

5.4. Le transfert

Soit $G \in \mathbf{Grp}$, et supposons M connectif. Le Corollaire 5.11 donne un sens à $A^p(BG, M_n)$, qui est contravariant en G. En appliquant la covariance des groupes de Chow à coefficients pour les morphismes propres [42, prop. (4.6) (1)], on obtient aussi des transferts (3.4). Ils vérifient la condition du Lemme 3.17 d'après [42, Lemma (4.2) (2)]. On en conclut :

Proposition 5.12. *Si G est fini, on a $|G|\tilde{A}^p(BG, M_n) = 0$ pour tout $p \geqslant 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$.* □

5.5. Cohomologie de cycles et invariants de torseurs

Gardons les hypothèses ci-dessus. L'argument de Totaro [15, Appendix C] démontre (raffinement du Théorème 3.5) :

Théorème 5.13. *Pour tout groupe G algébrique linéaire sur un corps k, on a*

$$A^0(BG, M_n) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Inv}_k(G, M_n)$$

où $\operatorname{Inv}_k(G, M_n)$ est le groupe des invariants de G à valeur dans M_n défini par Serre [15, déf. 1.1], c'est-à-dire l'ensemble des morphismes de foncteurs $A \to M_n$ où

$$A : \mathcal{F}(k) \to Ens, \quad A(F) = H^1(F, G).$$

Cet isomorphisme envoie $\tilde{A}^0(BG, M_n)$ sur le sous-groupe $\widetilde{\operatorname{Inv}}_k(G, M_n)$ des *invariants normalisés* : ceux qui sont triviaux sur le G-torseur neutre.

On peut se convaincre que les transferts du numéro précédent coïncident avec ceux définis par Serre dans [15, §14].

Mise en garde 5.14. Ceci ne couvre pas les invariants à valeurs dans les groupes de Witt de [15, ch. VIII]. Pour y parvenir, il faut généraliser la théorie des modules de cycles [43].

5.6. Représentabilité

Dans [32, §2.2], Merkurjev a aussi introduit le groupe $A^0_{\mathrm{nr}}(K, M_n)$, qu'il note $M_n(K)_{\mathrm{nr}}$. En particulier, il montre [32, th. 2.10] que pour X lisse et propre, le foncteur

$$M \mapsto A^0_{\mathrm{nr}}\big(k(X), M\big) = A^0(X, M)$$

de la catégorie des modules de cycles vers une catégorie abélienne est coreprésentable par K^X où

$$K^X_n(F) = A_0\big(X_F, K^M_n\big)$$

pour tout corps de fonctions F/k et $K^X_0(F) = CH_0(X_F)$.

On a un résultat un peu plus général [26, th. 1.3] : pour X lisse,

$$M \mapsto A^0(X, M)$$

est coreprésentable par H^X où

$$H_n^X(F) = H_{-n}\big(X_F, \mathbb{Z}(-n)\big)$$

pour tout corps de fonctions F/k et $H_0^X(k) = H_0(X, \mathbb{Z}(0)) = H_0^S(X)$ (homologie de Suslin). Si X est projectif, on a $H^X = K^X$.

Lemme 5.15. *Le foncteur $X \mapsto H^X$ est homotopique et pur en coniveau $\geqslant 2$. Donc H^{BG} est bien défini pour $G \in$ **Grp**. De plus, $H^{BG} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ est connectif (cf. déf. 5.4) où p est l'exposant caractéristique de k.*

Démonstration. La première assertion résulte de la Proposition 3.15. D'où H^{BG} en utilisant la définition 2.14. De plus, on a

$$H_n^{BG} = H_n^{U_G/G}$$

où U_G est un G-torseur linéaire de coniveau $\geqslant 2$ (*cf.* déf. 2.7). Comme U_G/G est une variété lisse, $H^{U_G/G} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ et donc $H^{BG} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ est connectif d'après [26, prop. 6.7]. □

Remarque 5.16. Supposons k d'exposant caractéristique p et G fini d'ordre premier à p. On a $H_i(k, \mathbb{Z}(n)) = 0$ si $n > 0$, donc

$$\tilde{H}_i\big(BG, \mathbb{Z}(n)\big) = H_i\big(BG, \mathbb{Z}(n)\big).$$

Ce groupe est annulé par l'ordre de G qui est premier à p. Donc on peut enlever $\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ dans le Lemme 5.15.

Théorème 5.17. *Pour tout groupe algébrique linéaire G et tout module de cycles M, on a*

$$A^0(BG, M_0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{HI}}\big(h_0^{Nis}(BG), \mathcal{M}_0\big)$$

où HI *est la catégorie des faisceaux Nisnevich avec transferts invariants par homotopie et $\mathcal{M}_0(U) = A^0(U, M_0)$.*

(D'après la Proposition 3.16, $h_0^{Nis}(BG)$ est bien défini.)

Cela résulte de [26, th. 1.3, th. 1.4] et du Lemme 5.15 en remarquant que le foncteur

$$\mathrm{HI} \to \mathrm{PST}$$

est pleinement fidèle, où PST est la catégorie des préfaisceaux Nisnevich avec transferts.

6. Classes non ramifiées

Le but de cette section est de donner un sens aux groupes $A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n)$ pour un module de cycles M et un groupe algébrique linéaire $G \in$ **Grp**. Nous commençons par un retour systématique sur la définition des classes non ramifiées sur un module de cycles, dans le style de Colliot-Thélène–Ojanguren [7].

6.1. Définitions

Définition 6.1.

1. Pour tout corps de fonctions K sur un corps k, on définit :
$$A^0_{\mathrm{nr}}(K/k, M_n) = \bigcap_{A\in\mathcal{P}(K/k)} \mathrm{Ker}\big(M_n(K) \xrightarrow{\partial_A} M_{n-1}(\kappa_A)\big),$$
où $\mathcal{P}(K/k)$ est l'ensemble des anneaux de valuation discrète A de rang un de type géométrique de K sur k tels que $K = \mathrm{Frac}(A)$.
2. Si X/k est un schéma lisse de corps des fonctions K, on note :
$$A^0_{\mathrm{nr}}(X/k, M_n) = A^0_{\mathrm{nr}}(K/k, M_n).$$

Remarque 6.2.

1. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on note simplement
$$A^0_{\mathrm{nr}}(K, M_n) = A^0_{\mathrm{nr}}(K/k, M_n).$$
2. De plus, on a
$$A^0_{\mathrm{nr}}(K, M_n) = A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n) \subset A^0(X, M_n).$$
3. Si $M_n(K) = H^n(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n+i))$, $A^0_{\mathrm{nr}}(K, M_n)$ est le groupe de cohomologie non ramifiée de K défini par Colliot-Thélène et Ojanguren [7, déf. 1.1.1, p. 143].

Lemme 6.3. *Soit $f : K \hookrightarrow L$ une extension de corps. Alors $f_* : M_n(K) \to M_n(L)$ envoie $A^0_{\mathrm{nr}}(K, M_n)$ dans $A^0_{\mathrm{nr}}(L, M_n)$.*

Démonstration. Nous allons utiliser les axiomes (R3a) et (R3c) des (pré)modules de cycles, pour lesquels nous renvoyons à [42, déf. 1.1, p. 328] (ils sont explicités ci-dessous).

Soit $B \in \mathcal{P}(L/k)$. Si B est trivial sur K, alors d'après (R3c), on a $\partial_B \circ f_* = 0$. Si B est au dessus $A \in \mathcal{P}(K/k)$ avec l'indice de ramification e, alors d'après (R3a), le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} M_n(L) \arrow[r, "\partial_B"] & M_{n-1}(\kappa_B) \\ M_n(K) \arrow[u, "f_*"] \arrow[r, "\partial_A"] & M_{n-1}(\kappa_A). \arrow[u, "e\cdot\bar{f}_*"'] \end{tikzcd}$$

Soit $x \in A^0_{\mathrm{nr}}(K, M_n)$. Alors $\partial_A(x) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{P}(K/k)$ et donc $\partial_B(f_*(x)) = 0$ pour tout $B \in \mathcal{P}(L/k)$ *i.e.* $f_*(x) \in A^0_{\mathrm{nr}}(L, M_n)$. Donc $A^0_{\mathrm{nr}}(K, M_n)$ est bien envoyé dans $A^0_{\mathrm{nr}}(L, M_n)$. □

Le Lemme 6.3 fait de $A^0_{\mathrm{nr}}(-, M_n)$ un *sous-foncteur* de $A^0(-, M_n)$ sur $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$.

6.2. Pureté

Proposition 6.4. *Le foncteur $X \mapsto A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n)$ est homotopique et pur en coniveau $\geqslant 1$ sur $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$.*

Démonstration. Il nous faut vérifier deux propriétés :

Pureté : Soit $U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte. D'après la définition de $A^0_{\mathrm{nr}}(-, M_n)$ on a tout de suite :

$$A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n) \xrightarrow{\sim} A^0_{\mathrm{nr}}(U, M_n)$$

car $k(X) = k(U)$. C'est vrai pour tout ouvert dense de X, donc $A^0_{\mathrm{nr}}(-, M_n)$ est pur en coniveau $\geqslant 1$.
Homotopie : on utilise la même méthode que Colliot-Thélène et Ojanguren [7, prop. 1.2].
Soit $p : V \to X$ un fibré vectoriel. Soit U un ouvert de X. En appliquant la pureté, on a :

$$\begin{tikzcd} A^0_{\mathrm{nr}}(V, M_n) \arrow[r, "\sim"] & A^0_{\mathrm{nr}}(p^{-1}(U), M_n) \\ A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n) \arrow[u, "p^*"] \arrow[r, "\sim"] & A^0_{\mathrm{nr}}(U, M_n). \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Quand U est assez petit, on a $p^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{A}^m$. Donc pour montrer que p^* est un isomorphisme, on peut se limiter au cas $V = X \times \mathbb{A}^1$.
D'après le Lemme 6.3, on a :

$$A^0_{\mathrm{nr}}(X/k, M_n) \to A^0_{\mathrm{nr}}(V/k, M_n).$$

D'après la propriété (H) (*cf.* Proposition 5.2), on a :

$$A^0_{\mathrm{nr}}\big(k(V)/k(X), M_n\big) \xleftarrow{\sim} M_n\big(k(X)\big).$$

Et donc grâce au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} A^0_{\mathrm{nr}}(V/k, M_n) \arrow[r, hook] \arrow[dr, dashed] & A^0_{\mathrm{nr}}(V/k(X), M_n) \\ A^0_{\mathrm{nr}}(X/k, M_n) \arrow[u] \arrow[r, hook] & M_n(k(X)) \arrow[u, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

on a une injection

$$A^0_{\mathrm{nr}}(X/k, M_n) \hookrightarrow A^0_{\mathrm{nr}}(V/k, M_n).$$

Réciproquement, soit $\zeta \in A^0_{\mathrm{nr}}(V/k, M_n)$. Si $B \in \mathcal{P}(k(V)/k)$ est trivial sur $k(X)$, alors d'après l'axiome (R3c) des prémodules de cycles, le morphisme composé suivant est trivial :

$$M_n\big(k(X)\big) \to M_n\big(k(V)\big) \xrightarrow{\partial_B} M_{n-1}(\kappa_B).$$

Donc, en utilisant (H), on obtient que ζ vient d'un élément bien déterminé, que nous noterons encore ζ, de $M_n(k(X))$. Soit $A \in \mathcal{P}(k(X)/k)$. Il existe $B \in \mathcal{P}(k(V)/k)$ au dessus de A tel que $\kappa_B = \kappa_A(t)$ [4, prop. 2, p. 157]. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \zeta \in M_n(k(X)) \arrow[r, "\partial_A"] \arrow[d, "p^*"'] & M_{n-1}(\kappa_A) \arrow[d, "\bar{p}^*"'] \\ M_n(k(V)) \arrow[r, "\partial_B"] & M_{n-1}(\kappa_B) \end{tikzcd}$$

parce que dans ce cas, l'indice de ramification de B sur A est égal à 1 (axiome (R3a) de [42]).

De plus, toujours d'après la propriété (H), $\bar{p}^*$ est injectif. D'où on a $\partial_A(\zeta) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{P}(k(X)/k)$ et donc $\zeta \in A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n)$. Ainsi,

$$A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n) \xrightarrow{\sim} A^0_{\mathrm{nr}}(V, M_n). \qquad \square$$

Corollaire 6.5. *Si $X \sim_{\mathrm{st}} Y$, on a un isomorphisme canonique et fonctoriel en M :*

$$A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n) \simeq A^0_{\mathrm{nr}}(Y, M_n)$$

(voir Définition 2.26 pour $\sim_{\mathrm{st}}$). $\square$

6.3. Cas d'une variété propre et lisse

Si X/k est propre et lisse, Rost a montré que $A^0(X, M_n)$ est un invariant birationnel (*cf.* [42, cor. 12.10]). On a un résultat plus précis :

Proposition 6.6. *Si X/k est lisse et propre, alors*

$$A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n) = A^0(X, M_n).$$

Démonstration. On utilise [6, prop. 2.1.8 e)] que nous rappelons :

Soient F un foncteur de la catégorie des k-algèbres vers une catégorie abélienne et X/k une variété intègre, propre et lisse, de corps des fonctions $k(X)$. Posons :

$$F_1(X) = \{\alpha \in F(k(X)) \mid \forall P \in X^{(1)},\ \alpha \in \operatorname{Im} F(\mathcal{O}_{X,P})\}$$
$$F_{\mathrm{nr}}(k(X)/k) = \{\alpha \in F(k(X)) \mid \forall A \in \mathcal{P}(k(X)/k),\ \alpha \in \operatorname{Im} F(A)\}.$$

Si F satisfait la condition de la pureté en codimension un pour les anneaux locaux réguliers A de corps des fractions K i.e.

$$\operatorname{Im}(F(A) \to F(K)) = \bigcap_{p,\ ht(p)=1} \operatorname{Im}(F(A_p) \to F(K)) \tag{6.1}$$

où p est de hauteur 1 dans A, alors

$$F_1(X) = F_{\mathrm{nr}}(k(X)/k).$$

Considérons $F = A^0(-, M_n)$, on a :

$$\begin{aligned} F_1(X) &= \bigcap_{x \in X^{(1)}} \operatorname{Im}(A^0(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}, M_n) \to A^0(k(X), M_n)) \\ &= A^0(X, M_n) \\ F_{\mathrm{nr}}(k(X)/k) &= \bigcap_{A \in \mathcal{P}(k(X)/k)} \operatorname{Im}(A^0(\operatorname{Spec} A, M_n) \to A^0(k(X), M_n)) \\ &= A^0_{\mathrm{nr}}(k(X), M_n) \end{aligned}$$

grâce à la Définition 5.6 et $A^0(k(X), M_n) = M_n(k(X))$.

Donc il nous faut vérifier (6.1) pour $F = A^0(-, M_n)$ *i.e.*

$$\operatorname{Im}\bigl(A^0(\operatorname{Spec} A, M_n) \to A^0(K, M_n)\bigr) = \bigcap_{p,\ ht(p)=1} \operatorname{Im}\bigl(A^0(\operatorname{Spec} A_p, M_n) \to A^0(K, M_n)\bigr) \tag{6.2}$$

D'après la définition de $A^0(-, M_n)$ (*cf.* déf. 5.6), on a $A^0(K, M_n) = M_n(K)$ et

$$A^0(\operatorname{Spec} A, M_n) = \bigcap_{p,\ ht(p)=1} \operatorname{Ker}\bigl(M_n(K) \to M_{n-1}(\kappa_p)\bigr),$$
$$A^0(\operatorname{Spec} A_p, M_n) = \operatorname{Ker}\bigl(M_n(K) \to M_{n-1}(\kappa_p)\bigr).$$

D'où on déduit (6.2). □

6.4. Invariants non ramifiés

La Proposition 6.4 fournit un sous-foncteur $\mathbf{Grp} \ni G \mapsto A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n)$ de $G \mapsto A^0(BG, M_n)$. L'isomorphisme du Théorème 5.13 induit alors un isomorphisme

$$A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Inv}^{\mathrm{nr}}_k(G, M_n)$$

où le second membre est le groupe défini par Serre dans [15, 33.9].

7. Cohomologie motivique étale de BG

Soit $G \in \mathbf{Grp}$, et soit $(q, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. D'après la Proposition 3.13, les groupes $H^q_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(n))$ sont définis et fonctoriels en G. On va les calculer quand G est un groupe fini (constant).

Si A est un groupe abélien, notons A' son sous-groupe de torsion première à $\operatorname{car} k$ et, pour $n \in \mathbb{Z}$, $A'(n) = A' \otimes \mu_m^{\otimes n}$ si A' est d'exposant fini m. Le résultat principal est :

Théorème 7.1. *Supposons G fini constant et k séparablement clos. Pour tout $(n, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, on a un isomorphisme canonique*

$$\tilde{H}^q_{\text{ét}}\bigl(BG, \mathbb{Z}(n)\bigr) \simeq H^q(G, \mathbb{Z})'(n)$$

où $H^*(G, \mathbb{Z})$ désigne la cohomologie ordinaire du groupe discret G [44, ch. VII].

Ceci précise un résultat de Peyre [39, prop. 4.2.1] : ici, la conjecture de Bloch–Kato n'intervient pas.

Voir §7.4 pour la démonstration ; elle donne aussi un isomorphisme à coefficients finis

$$H^q_{\text{ét}}\bigl(BG, \mathbb{Z}/m(n)\bigr) \simeq H^q(G, \mathbb{Z}/m)(n)$$

pour m premier à $\operatorname{car} k$.

7.1. Heuristique

Le raisonnement approximatif est le suivant. Soit EG l'espace total du G-torseur universel de base BG. Alors $EG \to BG$ est un revêtement étale ; la suite spectrale de Hochschild–Serre associée (à coefficients $\mathbb{Z}(n)_{\text{ét}}$) peut se décrire comme la suite spectrale d'hypercohomologie associée au complexe de G-modules

$$R\Gamma_{\text{ét}}\bigl(EG, \mathbb{Z}(n)\bigr).$$

Comme EG est contractile, la projection $EG \to \operatorname{Spec} k$ induit un quasi-isomorphisme G-équivariant

$$R\Gamma_{\text{ét}}\big(\operatorname{Spec} k, \mathbb{Z}(n)\big) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\text{ét}}\big(EG, \mathbb{Z}(n)\big)$$

qui montre que $H^*_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(n))$ s'identifie à l'hypercohomologie (*à coefficients G-triviaux*)

$$\mathbb{H}^*\big(G, R\Gamma_{\text{ét}}\big(\operatorname{Spec} k, \mathbb{Z}(n)\big)\big).$$

Il est bien connu que, dans la catégorie dérivée des groupes abéliens, tout complexe est isomorphe à la somme directe de ses groupes de cohomologie décalés. La suite spectrale correspondante

$$E_2^{p,q} = H^p\big(G, H^q_{\text{ét}}\big(k, \mathbb{Z}(n)\big)\big) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}\big(BG, \mathbb{Z}(n)\big) \tag{7.1}$$

dégénère donc en E_2 (quoique pas canoniquement).

Pour rendre le raisonnement ci-dessus rigoureux, il faut le faire à des niveaux « finis », c'est-à-dire en remplaçant $EG \to BG$ par $U \to U/G$ où U est l'espace total d'un G-torseur linéaire de coniveau tendant vers l'infini. En effet, on vérifie facilement que la Proposition 3.13 est optimale, c'est-à-dire que pour n fixé, le coniveau de $H^q_{\text{ét}}(-, \mathbb{Z}(n))$ tend vers l'infini avec q. Ceci force à appliquer une version de la remarque 3.7 : c'est l'objet du numéro suivant.

7.2. BG et suite spectrale de descente

Théorème 7.2. *Sous les hypothèses du Théorème 7.1, la cohomologie $H^*_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(n))$ est l'aboutissement d'une suite spectrale de la forme (7.1) (action triviale sur les coefficients), qui dégénère en E_2.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout $s \in \mathbb{Z}$, considérons le foncteur

$$\mathbf{Sm}_{\text{fl}} \ni X \mapsto \tau_{\leqslant s} R\Gamma_{\text{ét}}\big(X, \mathbb{Z}(n)\big) \tag{7.2}$$

à valeurs dans la catégorie dérivée des groupes abéliens. La Proposition 3.13 implique qu'il est homotopique et pur en coniveau $\geqslant \inf(n, \frac{s+1}{2})$.

À tout G-torseur $\pi : U \to U/G$, associons maintenant la suite spectrale

$${}_{(s)}E_2^{p,q}(\pi) = H^p\big(G, H^q\big(\tau_{\leqslant s} R\Gamma_{\text{ét}}\big(U, \mathbb{Z}(n)\big)\big)\big) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}\big(G, \tau_{\leqslant s} R\Gamma_{\text{ét}}\big(U, \mathbb{Z}(n)\big)\big).$$

Ceci définit un foncteur contravariant de la catégorie des G-torseurs vers celle des suites spectrales, qui est homotopique et pur en coniveau $\geqslant \inf(n, \frac{s+1}{2})$, au sens qui généralise celui de la définition 3.1 (axiomes relatifs à la base du G-torseur). De plus, les ${}_{(s)}E$ forment un système inductif, de limite la suite spectrale de Hochschild–Serre habituelle.

La construction 2.13, restreinte aux G-torseurs, fournit alors que ${}_{(s)}E$ prend un sens sur le « G-torseur universel » $\mathbb{E}_r G$ de la définition 2.14 pour $r \geqslant \inf(n, \frac{s+1}{2})$, est indépendante d'un tel r, et que la limite inductive (filtrante !) de ces suites spectrales définit une suite spectrale de Hochschild–Serre pour le torseur universel $\mathbb{E}G$.[8] Enfin, la propriété d'homotopie pour les (7.2) justifie la forme (7.1) de cette suite spectrale, et donc sa dégénérescence par l'argument du §7.1. $\square$

[8] Qui existe dans une catégorie $2 - \varinjlim S_r^{-1}(G - \mathbf{Tors})$, cf. Remarque 3.7.

7.3. Rappels sur la cohomologie motivique étale d'un corps

Si p est un nombre premier, un groupe abélien A est dit *p'-divisible* (resp. *uniquement p'-divisible*) si, pour tout entier m premier à p, la multiplication par m sur A est surjective (resp. bijective).

Rappelons que la conjecture de Bloch–Kato en degré n

$$K_n^M(F)/m \xrightarrow{\sim} H^n_{\text{ét}}\big(F, \mu_m^{\otimes n}\big)$$

est triviale pour $n \leqslant 0$, se réduit au théorème 90 de Hilbert pour $n = 1$, est un théorème classique de Merkurjev et Suslin pour $n = 2$ [34] et que sa démonstration complète résulte de travaux récents de Voevodsky, Rost et al.

Lemme 7.3. *Soit p l'exposant caractéristique de k.*

1) *Supposons k séparablement clos. Pour $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $H^q_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(n))$ est nul pour $q > n$ et uniquement p'-divisible pour $q \leqslant n$, sauf pour $q = 1$. Le groupe $H^1_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(n))$ est p'-divisible, de torsion isomorphe à $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)$.*
2) *Supposons k quelconque, et $n \neq 0$.*
a) *$H^q_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(n))$ est uniquement divisible pour $q \leqslant 0$.*
b) *Pour $q \geqslant n + 2$, l'homomorphisme*

$$H^{q-1}_{\text{ét}}\big(k, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)\big) \to H^q_{\text{ét}}\big(k, \mathbb{Z}(n)\big)$$

est bijectif.
c) *Sous la conjecture de Bloch–Kato en degré n, on a*

$$H^q\big(k, \mathbb{Z}(n)\big) \xrightarrow{\sim} H^q_{\text{ét}}\big(k, \mathbb{Z}(n)\big) \text{ pour } q \leqslant n$$
$$H^n_{\text{ét}}\big(k, \mathbb{Z}(n)\big) \simeq K_n^M(k)$$
$$H^{n+1}_{\text{ét}}\big(k, \mathbb{Z}(n)\big) = 0.$$

Démonstration. Il suffit de démontrer 2) : 1) en est un cas particulier.

On a un triangle exact dans la catégorie $\mathbf{DM}_{\text{ét}}$ de la définition 3.12 :

$$\mathbb{Z}(n)_{\text{ét}} \to \mathbb{Q}(n)_{\text{ét}} \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n) \xrightarrow{+1}$$

avec $\mathbb{Q}(n)_{\text{ét}} = 0$ pour $n < 0$ (*loc. cit.*).[9] Comme $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)$ est un faisceau concentré en degré 0, cela démontre a) sauf pour $q = 0$, où on n'a a priori qu'une suite exacte

$$H^0_{\text{ét}}\big(k, \mathbb{Q}(n)\big) \to H^0_{\text{ét}}\big(k, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)\big) \to H^1_{\text{ét}}\big(k, \mathbb{Z}(n)\big).$$

Pour prouver la nullité de la première flèche, on peut raisonner comme suit (cf. preuve de [23, th. 3.1]). Il suffit de montrer que, pour tout corps $k_0 \subset k$, de type fini sur le corps premier, l'homomorphisme

$$H^0_{\text{ét}}\big(k_0, \mathbb{Q}(n)\big) \to H^0_{\text{ét}}\big(k_0, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)\big)$$

est nul. Mais c'est évident, puisque le terme de gauche est divisible et le terme de droite est fini. (Ici on utilise que la cohomologie motivique étale à coefficients rationnels et de torsion commute aux limites inductives

[9] Pour $n \geqslant 0$, ceci utlise le fait que $\mathbb{Z}/m(n) \simeq \mu_m^{\otimes n}$ pour $(m, p) = 1$ et $\mathbb{Z}/p^r(n) = 0$, cf. [33, Th. 10.3] et [47, Prop. 3.3.3 2)].

de corps : pour la seconde c'est standard, et pour la première cela résulte du théorème de comparaison avec la cohomologie Nisnevich [33, 14.24].)

b) provient du fait que le complexe (de faisceaux Nisnevich) $\mathbb{Z}(n)$ n'a pas de cohomologie en degré $> n$. Quant à c), le premier isomorphisme est l'énoncé « Bloch–Kato ⇒ Beilinson–Lichtenbaum » [45,16], le second résulte du premier et de l'isomorphisme canonique $K_n^M(k) \simeq H^n(k, \mathbb{Z}(n))$ [33, 5.1] et le dernier est « Hilbert 90 en poids n ». □

Remarque 7.4. Pour référence ultérieure, donnons une reformulation triangulée de la conjecture de Beilinson–Lichtenbaum (qui est maintenant un théorème) utilisée dans le lemme ci-dessus : pour $n \geqslant 0$, la conjecture de Beilinson–Lichtenbaum est vraie en poids n si et seulement si le triangle

$$\mathbb{Z}(n) \to R\alpha_*\mathbb{Z}(n)_{\text{ét}} \to \tau_{\geqslant n+2} R\alpha_*\mathbb{Z}(n)_{\text{ét}} \xrightarrow{+1}$$

est exact dans **DM**.

7.4. Démonstration du Théorème 7.1

L'énoncé est évident pour $n = 0$ en utilisant le Théorème 7.2 ; on peut donc supposer $n \neq 0$. Appliquons le point 1 du Lemme 7.3 : dans la suite spectrale (7.1), les seuls termes $E_2^{p,q}$ non nuls sont pour $p = 0$ ou $q = 1$. On obtient donc

$$\tilde{H}^q_{\text{ét}}\big(BG, \mathbb{Z}(n)\big) \simeq \begin{cases} H^{q-1}(G, H^1(k, \mathbb{Z}(n))) & \text{si } q \neq 1 \\ 0 & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

En réappliquant le Lemme 7.3, on obtient un homomorphisme

$$H^{q-1}\big(G, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)\big) \to H^{q-1}\big(G, H^1\big(k, \mathbb{Z}(n)\big)\big)$$

qui est bijectif pour $q \neq 1$. Toujours pour $q \neq 1$, on peut écrire

$$H^{q-1}\big(G, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)\big) \simeq H^{q-1}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n) \xrightarrow{\sim} H^q(G, \mathbb{Z})'(n).$$

On conclut en observant que $H^1(G, \mathbb{Z}) = 0$ et que $H^0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ est sans torsion.

7.5. Cas d'un corps k parfait quelconque

Dans les numéros suivants, on décrit le groupe $H^{n+2}_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(n))$ pour $n \leqslant 2$.

7.5.1. $n < 0$

Par définition, $\mathbb{Z}(n)_{\text{ét}} = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)[-1]$. On en déduit :

$$\tilde{H}^{n+2}_{\text{ét}}\big(BG, \mathbb{Z}(n)\big) = 0. \tag{7.3}$$

7.5.2. $n = 0$

On a $\mathbb{Z}(0)_{\text{ét}} = \mathbb{Z}$, d'où

$$\tilde{H}^2_{\text{ét}}\big(BG, \mathbb{Z}(0)\big) = H^2(G, \mathbb{Z}). \tag{7.4}$$

(Rappelons que $H^1_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}) = 0$.)

7.5.3. $n = 1$

On a $\mathbb{Z}(1)_{\text{ét}} = \mathbb{G}_m[-1]$, d'où

$$\tilde{H}^3_{\text{ét}}\big(BG, \mathbb{Z}(1)\big) = \widetilde{\mathrm{Br}}(BG) = H^2\big(G, k^*\big). \tag{7.5}$$

(Rappelons que $H^1_{\text{ét}}(k, \mathbb{G}_m) = 0$: Théorème 90 de Hilbert.)

7.5.4. $n = 2$

Dans ce cas, grâce au Lemme 7.3 a) on obtient une suite exacte (scindée)

$$0 \to H^2\big(G, H^2_{\text{ét}}\big(k, \mathbb{Z}(2)\big)\big) \to \tilde{H}^4_{\text{ét}}\big(BG, \mathbb{Z}(2)\big) \to H^3\big(G, H^1_{\text{ét}}\big(k, \mathbb{Z}(2)\big)\big) \to 0.$$

D'après le Lemme 7.3 c), on a $H^2_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(2)) \simeq K_2^M(k) = K_2(k)$. Il reste un groupe à décrire :

Lemme 7.5. *On a un isomorphisme*

$$H^1_{\text{ét}}\big(k, \mathbb{Z}(2)\big) \simeq K_3(k)_{\text{ind}}$$

où $K_3(k)_{\text{ind}} := \mathrm{Coker}(K_3^M(k) \to K_3(k))$.

Démonstration. Cela résulte de [5, th. (7.2)], du Lemme 7.3 2) c) et du théorème de Voevodsky comparant cohomologie motivique et groupes de Chow supérieurs [33, Lect. 19]. Une autre manière de conclure est d'utiliser la suite spectrale de Bloch–Lichtenbaum

$$E_2^{p,q} = H^{p-q}\big(k, \mathbb{Z}(-q)\big) \Rightarrow K_{-p-q}(k)$$

[5,31]. Comme $E_2^{p,q} = 0$ pour $p < 0$ et $q = 0, -1$, cette suite spectrale donne une suite exacte

$$H^3\big(k, \mathbb{Z}(3)\big) \to K_3(k) \to H^1\big(k, \mathbb{Z}(2)\big) \to 0$$

c'est-à-dire un isomorphisme $K_3(k)_{\text{ind}} \xrightarrow{\sim} H^1(k, \mathbb{Z}(2))$. On utilise alors l'isomorphisme $H^1(k, \mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(2))$ du Lemme 7.3. □

Soit k_0 le sous-corps des constantes de k, c'est-à-dire la fermeture algébrique du sous-corps premier. Alors $K_3(k_0)_{\text{ind}} \to K_3(k)_{\text{ind}}$ est injectif, de conoyau uniquement divisible (cf. [21, (1.4)]). Comme dans [21, th. 2.1], on en déduit :

Proposition 7.6. *On a une suite exacte scindée :*

$$0 \to H^2\big(G, K_2(k)\big) \to \tilde{H}^4_{\text{ét}}\big(BG, \mathbb{Z}(2)\big) \to H^3\big(G, K_3(k_0)_{\text{ind}}\big) \to 0 \tag{7.6}$$

où k_0 est le sous-corps des constantes de k. □

7.5.5. $n > 2$

La situation est plus compliquée. Pour $n = 3$, le groupe $\tilde{H}^5_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(3))$ admet une filtration à trois crans, commençant par $H^3(G, K_3^M(k))$.

8. Suites spectrales de coniveau pour BG

Notons **Spct** la catégorie des suites spectrales convergentes. Supposons donné un foncteur

$$E_2^{p,q} \Rightarrow H^{p+q} : \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Spct}. \tag{8.1}$$

Supposons que les foncteurs $E_2^{p,q}$ et H^n, pris individuellement, soient homotopiques et purs en coniveau $\gg 0$. Quand peut-on en déduire une suite spectrale convergente

$$E_2^{p,q}(BG) \quad \Rightarrow \quad H^{p+q}(BG)$$

pour $G \in \mathbf{Grp}$?

Cette question rappelle celle étudiée par Atiyah dans [2, §5], mais elle est plus élémentaire. Nous allons donner des conditions suffisantes pour une réponse positive.

8.1. *Cohérence de foncteurs spectraux*

Un premier cas facile est celui où les $\nu(E_2^{p,q})$ (voir définition 3.3) sont uniformément bornés par un entier n. Le lemme des 5 montre alors immédiatement que n borne le coniveau des $E_r^{p,q}$ pour tout $r \in [2, \infty]$, puis celui de H^i pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Le foncteur spectral (8.1) est alors globalement pur en coniveau $> n$, et est donc défini sur $B_{n+1}G$.

Voici un second cas un peu plus compliqué :

Proposition 8.1. *Supposons que les foncteurs $E_2^{p,q}$ soient homotopiques et purs en coniveau $\gg 0$ (non nécessairement borné) et que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des couples (p,q) avec $p + q \leqslant n$ tels que $E_2^{p,q} \neq 0$ soit fini. Alors $(E_r^{p,q}, H^n)$ induit un foncteur*

$$G \mapsto \big(E_r^{p,q}(BG), H^n(BG)\big)$$

de **Grp** *vers la catégorie des suites spectrales convergentes.*

Démonstration. Elle est dans l'esprit de la remarque 3.7, à laquelle on n'arrive pas tout à fait à se ramener.

Montrons qu'il existe deux fonctions $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ telles que, pour $p + q \leqslant n$ et $r \geqslant 2$, on ait $E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ pour $r \geqslant f(n)$ et $\nu(E_r^{p,q}) \leqslant g(n)$ pour tout r. La première affirmation est évidente, puisque l'hypothèse implique que $E_2^{p-r,q+r-1} = E_2^{p+r,q-r+1} = 0$ pour r assez grand et que $E_2^{p,q} = 0$ pour $p + q$ assez petit. La seconde affirmation est vraie pour $r = 2$ pour la même raison, avec une fonction $g_2(n)$; elle en découle par récurrence pour tout $r \geqslant 2$, avec une fonction $g_r(n)$, en utilisant le lemme des 5. La première affirmation entraîne alors que $g(n) := \sup_r g_r(n) < \infty$.

En réutilisant le lemme des 5, on voit aussi que $\nu(H^n) \leqslant g(n)$.

Étant donné $G \in \mathbf{Grp}$, posons alors

$$E_r^{p,q}(BG) = E_r^{p,q}(B_{g(n)+1}G), \qquad H^n(G) = H^n(B_{g(n)+1}G).$$

On voit immédiatement que ceci définit une suite spectrale convergente, contravariante en G. □

8.2. *Suites spectrales de coniveau et* **DM**

Un article récent de Déglise [10] permet d'amplifier la construction de modules de cycles expliquée dans 5.2.2 en une construction de suites spectrales.

Soit $C \in \mathbf{DM}$. En appliquant [10, (2.3.b)] au foncteur de 5.2.2, il donne naissance à des suites spectrales de coniveau ($n \in \mathbb{Z}$)

$$E_1^{p,q}(X) = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} H^{q-p}\big(k(x), C(n-p)\big) \Rightarrow H^{p+q}\big(X, C(n)\big)$$

pour tout $X \in \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$, où on note

$$H^i\big(X, C(n)\big) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}\big(M(X), C(n)[i]\big)$$
$$H^i\big(F, C(n)\big) = \varinjlim_{A \subset F} H^i\big(\operatorname{Spec} A, C(n)\big).$$

Le fait que ces suites spectrales soient contravariantes pour les morphismes plats n'est pas explicitement écrit dans [10], mais résulte immédiatement de la définition de la filtration par le coniveau.

Même conclusion pour $C \in \mathbf{DM}_{\text{ét}}$ et le foncteur de 5.2.3, avec

$$E_1^{p,q}(X) = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} H_{\text{ét}}^{q-p}\big(k(x), C(n-p)\big) \Rightarrow H_{\text{ét}}^{p+q}\big(X, C(n)\big)$$

En particulier, on obtient des suites spectrales convergentes, pour X lisse :

$$E_1^{p,q}(X,n) = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} H^{q-p}\big(k(x), \mathbb{Z}(n-p)\big) \Rightarrow H^{p+q}\big(X, \mathbb{Z}(n)\big) \tag{8.2}$$

$$E_1^{p,q}(X,n)_{\text{ét}} = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} H_{\text{ét}}^{q-p}\big(k(x), \mathbb{Z}(n-p)\big) \Rightarrow H_{\text{ét}}^{p+q}\big(X, \mathbb{Z}(n)\big) \tag{8.3}$$

qui sont contravariantes pour les morphismes plats. D'après [10, prop. 2.7], leurs termes E_1 sont les complexes de cycles associés aux modules de cycles attachés à la cohomologie motivique (*resp.* à la cohomologie motivique étale), d'où

$$E_2^{p,q}(X,n) = A^p\big(X, H^q\big(\mathbb{Z}(n)\big)\big), \tag{8.4}$$

$$E_2^{p,q}(X,n)_{\text{ét}} = A^p\big(X, H_{\text{ét}}^q\big(\mathbb{Z}(n)\big)\big). \tag{8.5}$$

En remplaçant $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/m$, on obtient des versions à coefficients finis ; avec ces coefficients, (8.3) devient la suite spectrale de coniveau classique pour la cohomologie étale [3].

8.3. Localisation de la cohomologie motivique étale

Soit X une k-variété lisse. On va étudier l'homomorphisme « edge » de (8.3)

$$H_{\text{ét}}^{n+2}\big(X, \mathbb{Z}(n)\big) \to A^0\big(X, H_{\text{ét}}^{n+2}\big(\mathbb{Z}(n)\big)\big) \tag{8.6}$$

pour de petites valeurs de n. Notons que, d'après le Lemme 7.3 2) b), le second membre peut aussi s'écrire $A^0(X, H_{\text{ét}}^{n+1}((\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)))$.

Nous aurons besoin des propriétés suivantes des termes $E_1^{p,q}(X,n)_{\text{ét}}$, que nous recopions de [25, prop. 2.7 b)] (en y ajoutant un cas trivial).

Lemme 8.2. *On a $E_1^{p,q}(X,n)_{\text{ét}} = 0$ pour*

(i) $p < 0$.

(ii) *$p \geqslant q$ et $p \geqslant n-1$, sauf $p = q = n$.*
(iii) *$q = n+1$ sous la conjecture de Bloch–Kato en degré $n-p$.*

De plus, $E_1^{p,q}(X,n)_{\text{ét}}$ est uniquement divisible pour $p \geqslant q$ et $p < n-1$.

Enfin, pour $q = n$, la flèche naturelle $A^p(X, K_n^M)[1/p] \to E_2^{p,n}(X,n)_{\text{ét}}$ est surjective sous la conjecture de Bloch–Kato en degré $\leqslant n-p$, et bijective sous cette conjecture en degré $\leqslant n-p+1$. En particulier, on a un isomorphisme canonique

$$E_2^{n,n}(X,n)_{\text{ét}} \simeq CH^n(X)$$

cf. Remarque 5.7.

Étant donné le Lemme 8.2, la démonstration du théorème suivant est un exercice facile. Il repose sur la conjecture de Bloch–Kato en degré 2 pour b), en degré 3 pour c).

Théorème 8.3.

a) Pour $n \leqslant 1$, (8.6) est un isomorphisme.
b) (cf. [22, th. 1.1, (9)] et [27, prop. 2.9]). On a une suite exacte courte

$$0 \to CH^2(X) \to H^4_{\text{ét}}\big(X, \mathbb{Z}(2)\big) \to A^0\big(X, H^4_{\text{ét}}\big(\mathbb{Z}(2)\big)\big) \to 0.$$

c) (cf. [24, rem. 4.10]). On a une suite exacte

$$0 \to A^2\big(X, K_3^M\big) \to H^5_{\text{ét}}\big(X, \mathbb{Z}(3)\big) \to A^0\big(X, H^5_{\text{ét}}\big(\mathbb{Z}(3)\big)\big) \to CH^3(X) \to H^6_{\text{ét}}\big(X, \mathbb{Z}(3)\big).$$

Remarque 8.4. La suite spectrale (8.2) donne un isomorphisme

$$A^2\big(X, K_3^M\big) \xrightarrow{\sim} H^5\big(X, \mathbb{Z}(3)\big).$$

8.4. Suites spectrales de coniveau pour BG

Théorème 8.5. *Le foncteur spectral (8.3), pris à partir de son terme E_2, est homotopique et pur en coniveau $> n$.*

Démonstration. Pour le terme E_2 (et donc E_r pour $2 \leqslant r \leqslant \infty$), cela résulte de l'exemple 5.2.2 et du Corollaire 5.11. Plus précisément, ces références appliquées au module de cycles $M_*^{(n-q)}$ donnent l'estimation

$$\nu\big(E_2^{p,q}(-,n)\big) \leqslant \inf\big(q - \delta\big(M_*^{(n-q)}\big), p+1\big) \leqslant \inf(n, p+1) \leqslant n.$$

Pour l'aboutissement, cela résulte de la Proposition 3.10. □

Le Théorème 8.5 donne un sens aux suites spectrales convergentes

$$A^p\big(BG, H^q\big(\mathbb{Z}(n)\big)\big) \quad \Rightarrow \quad H^{p+q}\big(BG, \mathbb{Z}(n)\big)$$

pour $G \in \mathbf{Grp}$. Nous allons voir que la situation est plus délicate pour la cohomologie motivique étale.

Théorème 8.6. *Les foncteurs spectraux (8.3), pris à partir de leur terme E_2, vérifient les hypothèses de la Proposition 8.1.*

Démonstration. En utilisant l'exemple 5.2.3 et le Corollaire 5.11, on trouve

$$\nu\big(E_2^{p,q}(-,n)_{\text{ét}}\big) \leqslant \inf\big(\sup(n,q-1),p+1\big) < \infty.$$

D'autre part, la condition de finitude de la Proposition 8.1 résulte du Lemme 8.2. □

Le Théorème 8.6 donne un sens aux suites spectrales convergentes

$$A^p\big(BG, H^q_{\text{ét}}\big(\mathbb{Z}(n)\big)\big) \quad \Rightarrow \quad H^{p+q}_{\text{ét}}\big(BG,\mathbb{Z}(n)\big)$$

pour $G \in \mathbf{Grp}$. Par fonctorialité, on en déduit des suites spectrales convergentes « réduites » :

$$\tilde{A}^p\big(BG, H^q_{\text{ét}}\big(\mathbb{Z}(n)\big)\big) \quad \Rightarrow \quad \tilde{H}^{p+q}_{\text{ét}}\big(BG,\mathbb{Z}(n)\big) \tag{8.7}$$

cf. Définition 3.8.

8.5. Cas d'un schéma en groupes fini

Supposons G fini. On a alors un raffinement utile du Lemme 8.2 :

Lemme 8.7. *Si G est fini, on a $\tilde{E}_2^{p,q}(BG,n)_{\text{ét}} = 0$ pour*

(i) $p < 0$.
(ii) $p \geqslant q$, *sauf* $p = q = n$.

Démonstration. D'après le Lemme 8.2, il suffit de traiter le cas $p \geqslant q$ et $p < n-1$. Alors $\tilde{E}_2^{p,q}(BG,n)_{\text{ét}}$ est uniquement divisible et annulé par l'ordre de G (Proposition 5.12), donc nul. □

8.6. Cas d'un groupe fini

Supposons k algébriquement clos de caractéristique 0 et G fini. Pour simplifier, négligeons les twists à la Tate. Alors (8.7) et le Théorème 7.1 fournissent une famille de suites spectrales

$$\tilde{E}_2^{p,q}(BG,n)_{\text{ét}} = \tilde{A}^p\big(BG, H^q_{\text{ét}}\big(\mathbb{Z}(n)\big)\big) \Rightarrow \begin{cases} H^{p+q}(G,\mathbb{Z}) & p+q \neq 0 \\ 0 & p+q = 0 \end{cases} \tag{8.8}$$

aboutissant à la cohomologie entière de G.

On peut alors s'amuser à faire varier n et étudier quelle information on obtient sur $H^*(G,\mathbb{Z})$. Commençons par examiner le cas où $n \leqslant 0$.

8.6.1. Le cas $n \leqslant 0$

En tenant compte des isomorphismes

$$H^{i-1}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^i(G,\mathbb{Z}) \quad (i \neq 0,1)$$

on peut considérer une suite spectrale concurrente

$$E_2^{p,q}(BG,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{\text{ét}} = A^p\big(BG, H^q_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\big) \Rightarrow H^{p+q}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \tag{8.9}$$

dont l'existence et la convergence se démontrent comme pour le Théorème 8.6. Pour $n < 0$, la définition de $\mathbb{Z}(n)_{\text{ét}}$ (Définition 3.12) montre que $(8.8)_n$ est essentiellement équivalente à (8.9) ; un petit calcul montre que c'est encore le cas pour $n = 0$.

On établit facilement un isomorphisme

$$A^p\big(X, H^p_{\text{ét}}\big(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(p)\big)\big) \simeq CH^p(X) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

pour tout $X \in \mathbf{Sm}_{\text{fl}}$. En utilisant le Lemme 3.17, on en déduit que $E_2^{p,p}(BG, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{\text{ét}} = 0$ pour tout $p > 0$. Ceci justifie qu'en petits degrés, (8.9) fournisse les isomorphismes et suites exactes suivantes :

$$H^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} A^0\big(BG, H^1_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\big)$$
$$H^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} A^0\big(BG, H^2_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\big) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Br}(BG) \quad \text{(Bogomolov)}$$
$$0 \to A^1\big(BG, H^2_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\big) \to H^3(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to A^0\big(BG, H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\big) \to 0$$

et

$$0 \to A^1\big(BG, H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\big) \to H^4(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to A^0\big(BG, H^4_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\big) \to A^2\big(BG, H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\big) \to H^5(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Supposons maintenant $n > 0$. Le Lemme 7.3 2) b) fournit alors des isomorphismes

$$E_2^{p,q-1}(BG, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{\text{ét}} \xrightarrow{\sim} E_2^{p,q}(BG, n)_{\text{ét}}$$

pour $q \geqslant n + 2$, ce qui montre que les suites spectrales donnent la même information dans cette zone. Par contre, on obtient en bas degré d'autres suites exactes et isomorphismes, certains connus, d'autres non (*cf.* Théorème 8.3) :

8.6.2. $H^2(G, \mathbb{Z})$

$$CH^1(BG) \xrightarrow{\sim} H^2(G, \mathbb{Z}) \quad \big(n = 1; \text{[39, ex. 3.1.1]}\big)$$
$$H^2(G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \tilde{A}^0\big(BG, K_2^M\big) \quad (n = 2)$$

8.6.3. $H^3(G, \mathbb{Z})$

$$A^1\big(BG, K_2^M\big) \xrightarrow{\sim} H^3(G, \mathbb{Z}) \quad (n = 2)$$
$$0 \to A^1\big(BG, H^2_{\text{ét}}\big(\mathbb{Z}(3)\big)\big) \to H^3(G, \mathbb{Z}) \to \tilde{A}^0\big(BG, K_3^M\big) \to 0 \quad (n = 3)$$

8.6.4. $H^4(G, \mathbb{Z})$

$$0 \to CH^2(BG) \to H^4(G, \mathbb{Z}) \to A^0\big(BG, H^3_{\text{ét}}\big(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)\big)\big) \to 0 \quad \big(n = 2; \text{[40, prop. 1]}\big)$$
$$A^1\big(BG, K_3^M\big) \xrightarrow{\sim} H^4(G, \mathbb{Z}) \quad (n = 3)$$

8.6.5. $H^5(G, \mathbb{Z}), H^6(G, \mathbb{Z}), H^7(G, \mathbb{Z})$

$$0 \to A^2\big(BG, K_3^M\big) \to H^5(G, \mathbb{Z}) \to A^0\big(BG, H^4_{\text{ét}}\big(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(3)\big)\big) \to CH^3(BG) \to H^6(G, \mathbb{Z}) \quad (n = 3),$$
$$0 \to A^2\big(BG, H^3\big(\mathbb{Z}(4)\big)\big) \to H^5(G, \mathbb{Z}) \to A^1\big(BG, K_4^M\big) \to 0 \quad (n = 4),$$
$$0 \to A^2\big(BG, K_4^M\big) \to H^6(G, \mathbb{Z}) \to A^0\big(BG, H^5_{\text{ét}}\big(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(4)\big)\big) \to A^3\big(BG, K_4^M\big) \to H^7(G, \mathbb{Z}) \quad (n = 4).$$

Enfin, parmi les termes $\tilde{E}_r^{0,q}(BG,n)$ on retrouve des invariants connus :

– D'après le Théorème 5.13, $\tilde{E}_2^{0,q}(BG,n)_{\text{ét}}$ est la partie réduite du groupe $\operatorname{Inv}_k(G, M_q^{(n-q)})$ (invariants cohomologiques de Serre), où $M_q^{(r)}$ est le module de cycles $F \mapsto H^q_{\text{ét}}(F, \mathbb{Z}(r+q))$.
– $\tilde{E}_\infty^{0,q}(BG,n)_{\text{ét}}$ est l'image de $H^q(G,\mathbb{Z})$ dans le groupe précédent : pour $n \leqslant q-2$, c'est la cohomologie stable $H^q_{\text{st}}(G,\mathbb{Z})$ de G au sens de Bogomolov.

On voit donc qu'entre $H^q_{\text{st}}(G,\mathbb{Z})$ et $\operatorname{Inv}_k(G, M_q^{(2)})$ il existe une suite finie d'invariants plus fins, à savoir les $\tilde{E}_r^{0,q}(BG,q-2)_{\text{ét}}$ pour $2 \leqslant r \leqslant \infty$. Le premier cas où on a un invariant nouveau est pour $q = 6$.

Enfin on obtient des filtrations sur la cohomologie entière de G, dont le premier cran est formé des classes géométriquement négligeables, le second des classes « négligeables en codimension $\geqslant 2$ » , etc.

Références

[1] M. Artin, On Azumaya algebras and finite dimensional representations of rings, J. Algebra 11 (1969) 532–563.
[2] M. Atiyah, Characters and cohomology of finite groups, Publ. Math. IHÉS 9 (1961) 23–64.
[3] S. Bloch, A. Ogus, Gersten's conjecture and the homology of schemes, Ann. Sci. Éc. Norm. Super. 7 (1974) 181–201.
[4] N. Bourbaki, Algèbre commutative, Chapitres 5 à 7, Hermann.
[5] S. Bloch, S. Lichtenbaum, A spectral sequence for motivic cohomology, K-theory preprint archives # 62, 1995.
[6] J.-L. Colliot-Thélène, Birational invariants, purity and the Gersten conjecture, in : K-theory and Algebraic Geometry : Connections with Quadratic Forms and Division Algebras, Santa Barbara, 1992, in : Proc. Symp. Pure Math., vol. 58, Amer. Math. Soc., Providence, 1995, pp. 1–64.
[7] J.-L. Colliot-Thélène, M. Ojanguren, Variétés unirationnelles non rationnelles : au delà de l'exemple d'Artin et Mumford, Invent. Math. 97 (1989) 141–158.
[8] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups (with special regards to the Brauer group), in : V. Mehta (Ed.), Proceedings of the International Colloquium on Algebraic Groups and Homogeneous Spaces, TIFR Mumbai, Mumbai, 2004, Narosa Publishing House, 2007, pp. 113–186.
[9] F. Déglise, Motifs génériques, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova 119 (2008) 173–244.
[10] F. Déglise, Coniveau filtration and mixed motives, in : Regulators, in : Contemp. Math., vol. 571, 2012, pp. 51–76.
[11] M. Demazure, P. Gabriel, Groupes Algébriques, Masson–North Holland, 1970.
[12] D. Edidin, W. Graham, Equivariant intersection theory, Invent. Math. 131 (1998) 595–634.
[13] E. Fischer, Die Isomorphie der Invariantenkorper der endlichen Abel'schen Gruppen linearen Transformationen, Nachr. Konigl. Ges. Wiss. Gottingen (1915) 77–80.
[14] W. Fulton, Intersection Theory, second edition, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
[15] S. Garibaldi, A. Merkurjev, J.-P. Serre, Cohomological Invariants in Galois Cohomology, Am. Mat. Soc. University Lecture Series, vol. 28, 2003.
[16] T. Geisser, M. Levine, The Bloch–Kato conjecture and a theorem of Suslin–Voevodsky, J. Reine Angew. Math. 530 (2001) 55–103.
[17] P. Gabriel, M. Zisman, Calculus of Fractions and Homotopy Theory, Springer-Verlag, 1967.
[18] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Grad. Texts Math., vol. 52, Springer-Verlag, 1977.
[19] A. Huber-Klawitter, B. Kahn, The slice filtration and mixed Tate motives, Compos. Math. 142 (2006) 907–936.
[20] S. Jackowski, B. Oliver, Vector bundles over classifying spaces of compact Lie groups, Acta Math. 176 (1996) 109–143.
[21] B. Kahn, Descente galoisienne et K_2 des corps de nombres, K-theory 7 (1993) 55–100.
[22] B. Kahn, Applications of weight-two motivic cohomology, Doc. Math. 1 (17) (1996) 395–416.
[23] B. Kahn, The Quillen–Lichtenbaum conjecture at the prime 2, K-theory preprint archives # 208, 1997.
[24] B. Kahn, Équivalences rationnelle et numérique sur certaines variétés de type abélien sur un corps fini, Ann. Sci. Éc. Norm. Super. 36 (2003) 977–1002.
[25] B. Kahn, Cohomological approaches to SK_1 and SK_2 of central simple algebras, Doc. Math. Extra Volume : Andrei A. Suslin's Sixtieth Birthday, 2010, pp. 317–369.
[26] B. Kahn, Relatively unramified elements in cycle modules, J. K-theory 7 (2011) 409–427.
[27] B. Kahn, Classes de cycles motiviques étales, Algebra Number Theory 6–7 (2012).
[28] B. Kahn, N.T.K. Ngan, Modules de cycles et classes non ramifiées sur un espace classifiant, 2013, prépublication.
[29] B. Kahn, R. Sujatha, A few localisation theorems, Homol. Homotopy Appl. 9 (2) (2007) 137–161.
[30] B. Kahn, R. Sujatha, Birational geometry and localisation of categories, arXiv:0805.3753.
[31] M. Levine, The homotopy coniveau tower, J. Topology 1 (2008) 217–267.
[32] A.S. Merkurjev, Unramified elements in cycle modules, J. Lond. Math. Soc. 78 (2008) 51–64.
[33] C. Mazza, V. Voevodsky, C. Weibel, Lectures Notes on Motivic Cohomology, Clay Mathematics Monographs, vol. 2, Amer. Math. Soc., 2006.
[34] A.S. Merkurjev, A.A. Suslin, K-cohomologie des variétés de Severi–Brauer et homomorphisme de reste normique (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 46 (1982) 1011–1046, pp. 1135–1136, Trad. anglaise : Math. USSR-Izv. 21 (1983) 307–340.
[35] J.S. Milne, Etale Cohomology, Princeton University Press, 1980.

[36] F. Morel, V. Voevodsky, $\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes, Publ. Math. IHÉS 90 (1999) 45–143.
[37] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan, Geometric Invariant Theory, 3rd ed., Springer, Berlin, 1994.
[38] N.T.K. Ngan, Modules de cycles et classes non ramifiées sur un espace classifiant, thèse de doctorat, Université Paris Diderot, 2010.
[39] E. Peyre, Application of motivic complexes to negligible classes, in: W. Raskind, C. Weibel (Eds.), Algebraic K-theory, Seattle, 1998, in: Proc. Symp. Pure Math., vol. 67, AMS, Providence, 1999, pp. 181–211.
[40] E. Peyre, Unramified cohomology of degree 3 and Noether's problem, Invent. Math. 171 (2008) 191–225.
[41] C. Procesi, Non-commutative affine rings, Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Sez. I (8) 8 (1967) 237–255.
[42] M. Rost, Chow groups with coefficients, Doc. Math. 1 (1996) 319–393.
[43] M. Schmidt, Wittringhomologie, thèse, Regensburg, 1997 (non publié).
[44] J.-P. Serre, Corps Locaux, Actual. Sci. Ind., vol. 1296, Hermann, Paris, 1968.
[45] A. Suslin, V. Voevodsky, Bloch–Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients, in: The Arithmetic and Geometry of Algebraic Cycles, Banff, AB, 1998, in: NATO Adv. Stud. Inst. Ser., Ser. C, Math. Phys. Sci., vol. 548, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, pp. 117–189.
[46] B. Totaro, The Chow ring of a classifying space, in: W. Raskind, C. Weibel (Eds.), Algebraic K-Theory, in: Proc. Symp. Pure Math., vol. 67, American Mathematical Society, 1999, pp. 249–281.
[47] V. Voevodsky, Triangulated categories of motives over a field, in: Cycles, Transfers and Motivic Cohomology Theories, in: Ann. Math. Stud., vol. 143, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000, pp. 188–238.
[48] A. Grothendieck, J. Dieudonné, Éléments de géométrie algébrique, Ch. I : Le langage des schémas, Springer, 1971.
[49] A. Grothendieck, J. Dieudonné, Éléments de géométrie algébrique, Ch. IV : Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Publ. Math. IHÉS 20, 24, 28, 32, 1964–1967.
[50] A. Grothendieck, et al., Revêtements étales et groupe fondamental, in: Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois–Marie 1960–1961 (SGA 1), in: Lect. Notes Math., vol. 224, Springer, Berlin, 1971.