Vol. 69, No. 1 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © January 1993

DEUX THÉORÈMES DE COMPARAISON EN COHOMOLOGIE ÉTALE; APPLICATIONS

BRUNO KAHN

Introduction.

(0.1). *Description du résultat principal.* Soit X un schéma (supposé connexe pour simplifier), et soit p un nombre premier inversible dans O_X. Pour tout entier $r \geqslant 1$, on note $\mathbf{Z}/p^r(1)$ le faisceau (constant tordu) des racines p^r-ièmes de l'unité pour la topologie étale sur X, et, pour $i \in \mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/p^r(i)$ le faisceau $\mathbf{Z}/p^r(1)^{\otimes i}$. On note $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(i)$ le faisceau $\varinjlim \mathbf{Z}/p^r(i)$. Le but de cet article est d'étudier les groupes de cohomologie étale $H^n(X_{ét}, \mathbf{Z}/p^r(i))$ et $H^n(X_{ét}, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(i))$.

Si $i = n$ et si X est le spectre d'une anneau semi-local, la conjecture de Kato généralisée (définition 2) propose une description du premier groupe en termes d'unités de l'anneau. Le résultat principal de cet article (théorème 1 (2)) est un théorème de "montée cyclotomique" qui étend une telle description au cas général, et même à $H^n(X_{ét}, A)$, pour certains faisceaux constants tordus A, sous l'hypothèse

Reçu le 26 janvier 1992. Révision reçue le 6 août 1992.

que cette conjecture est vérifiée. On peut donc l'appliquer dans tous les cas où elle est connue (0.6).

(Dans tout cet article, si $X = \operatorname{Spec} R$ pour un anneau commutatif R et $\mathscr{F}$ est un faisceau abélien sur $X_{\acute{e}t}$, on convient d'abréger la notation $H^*(X_{\acute{e}t}, \mathscr{F})$ en $H^*(R_{\acute{e}t}, \mathscr{F})$, voire en $H^*(R, \mathscr{F})$ si aucune ambiguïté n'en résulte.)

(0.2). Le théorème 1(2) a de nombreuses applications, en ce qu'il permet de se ramener à une situation kummérienne. La plus importante, aux faisceaux zariskiens de K-théorie algébrique, a été donnée ailleurs [K2], [K5]. J'en rappelle seulement deux conséquences:

(a) Si R et ses extensions p-cyclotomiques vérifient la conjecture de Kato généralisée en degré $n - 1$, il existe un homomorphisme canonique $H^{n-1}(R_{\acute{e}t}, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(n))$ vers la p-torsion de $K_n^M(R)$ (n-ième groupe de K-théorie de Milnor de R), que l'on espère surjectif [K2, exemple avant prop. 3.1 et remarque 4.1]. Lorsque $n = 2$, la conjecture de Kato généralisée se réduit à la théorie de Kummer (0.6.1) et cet homomorphisme généralise celui obtenu par Tate [T] et Suslin [Su1] (de façon non élémentaire) dans le cas d'un corps [T, p. 253, remark]. Si $p = 2$, la construction exige que R ne soit pas "exceptionnel" (0.4); elle ne redonne donc pas l'homomorphisme de Tate et Suslin dans ce dernier cas. Toutefois, l'homomorphisme $H^{n-1}(R_{\acute{e}t}, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(n)) \to K_n^M(R)\{p\}$ doit exister même lorsque R est exceptionnel.

(b) Si R et ses extensions p-cyclotomiques vérifient la conjecture de Kato généralisée en degrés $\leqslant n$, l'homomorphisme naturel $K_n^M(R)/p^r \to K_n(R)/p^r$ est une injection scindée pour tout $r \geqslant 1$, pourvu que R ne soit pas exceptionnel ([K2, th. 3] pour R un corps, $p = 2$ et $n = 3$ ou 4, complété par [K5]). Dans le cas présent, cette dernière hypothèse est indispensable, le cas $R = \mathbf{Q}$, $p = 2$, $r = 1$, $n = 3$ étant un contre-exemple bien connu. Ceci raffine modulo p^r les résultats de Suslin et Guin, qui obtiennent un tel scindage entier, mais seulement à $(n - 1)!$ près [Su3], [G].

Dans cet article, je donne trois autres applications du théorème 1, une globale et deux locales:

(c) Si l'ensemble des points fermés de X est de dimension d, le cup-produit de $d + 2$ éléments de $H^*(X_{\acute{e}t}, \mathbf{Z})$ est *nul*, pourvu que la conjecture de Kato généralisée soit vérifiée par les anneaux locaux de X et toutes leurs extensions "cyclotomiques" (corollaire au théorème 2: en caractéristique zéro, il faut faire une hypothèse mineure supplémentaire, par exemple que $\mu_4 \subset \Gamma(X, \mathbf{G}_m)$). En fait, le théorème 2 donne un résultat de ce type pour des coefficients plus généraux (voir l'énoncé). Si X est le spectre d'un corps ou d'un anneau semi-local, on a $d = 0$, et le résultat est utilisé dans [K4] pour démontrer la nullité des classes de Chern d'une représentation galoisienne complexe (à l'exception de la première, et sous la même hypothèse de non exceptionnalité). En général, il donne un renseignement sur la "cohomologie motivique" de X (remarque 5.1).

(d) Soient F un corps commutatif et χ un caractère d'ordre n de son groupe de Galois absolu. Supposons n impair et inversible dans F. Si $x \in H^2(F, \mu_n^{\otimes 2})$ est tel que $\chi \cdot x = 0$, alors il existe $y \in H^2(E, \mu_n^{\otimes 2})$ tel que $x = \operatorname{Cor}_{E/F} y$, où E est l'extension cyclique de F déterminée par χ (th. 7.1). Ceci généralise le cas, dû à Merkurjev et Suslin [MS1], où F contient suffisamment de racines de l'unité.

(e) soit R un anneau semi-local dans lequel le nombre premier impair p est inversible. Soient $k_1, \dots, k_r$ les corps résiduels de R. Supposons que les k_j vérifient la conjecture de Kato en degré n, ainsi que leurs extensions p-cyclotomiques. Alors, pour tout faisceau constant tordu A sur $(\mathrm{Spec}\ R)_{ét}$, de fibre géométrique $\mathbf{Z}/p^r$, l'application naturelle $H^n(R_{ét}, A) \to \oplus H^n(k_j, A)$ est surjective (th. 8.1).

(0.3). *Préliminaires techniques.* Ils consistent en deux définitions et une hypothèse sur les coefficients.

Définition 1. Soient $f\colon Y \to X$ un revêtement étale galoisien de groupe Γ, avec Y connexe, et λ un homomorphisme injectif de Γ dans $(\mathbf{Z}/p^r)^*$. On dit que (f, λ) est *exceptionnel* si $p = 2$ et *si* $-1 \in \lambda(\Gamma)$.

On notera qu'un revêtement comme dans la définition 1 est *cyclique*, sauf peut-être si $p = 2$. La définition 1 s'applique dans le cas suivant:

Soit A un faisceau constant tordu sur $X_{ét}$, de fibre géométrique $\mathbf{Z}/p^r$: un tel faisceau correspond à une action continue du groupe fondamental Π de X sur $\mathbf{Z}/p^r$, c'est-à-dire à un élément λ de $H^1(\Pi, (\mathbf{Z}/p^r)^*) = H^1(X_{ét}, (\mathbf{Z}/p^r)^*)$ ($(\mathbf{Z}/p^r)^*$ étant vu comme Π-module trivial, ou comme faisceau constant). Le noyau de λ définit un revêtement $f\colon Y \to X$ tel que le couple (f, λ) vérifie les hypothèses de la définition 1. On notera parfois $Y = X(A)$; si aucune ambiguïté n'en résulte, on dira que $Y \to X$ est exceptionnel pour dire que (f, λ) est exceptionnel. Si l'on prend $A = \mathbf{Z}/p^r(i)$, on a $\lambda = \kappa^i$, où κ désigne le *caractère cyclotomique* (réduit modulo p^r). Si $\mu_{2p} \subset \Gamma(X, \mathbf{G}_m)$, on a $X(\mathbf{Z}/p^r(i)) = X(\mathbf{Z}/p^r(1))$, à moins que $i \equiv 0 \pmod p$. Le revêtement $X(\mathbf{Z}/p^r(i)) \to X$ est exceptionnel si et seulement si $p = 2$ et si:

soit Γ n'est pas cyclique;

soit $\mu_4 \not\subset \Gamma(X, \mathbf{G}_m)$, $\Gamma \cong \mathbf{Z}/2$ et i est impair.

On aura besoin de l'hypothèse suivante sur A:

HYPOTHÈSE (R). *L'homomorphisme λ se relève en un élément de* $H^1(X_{ét}, (\mathbf{Z}/p^{2r})^*)$.

Cette hypothèse est toujours vérifiée si $r = 1$, et aussi si $r = 2$ lorsque $p = 2$. En voici deux autres formulations équivalentes:

(R′) Il existe une suite exacte courte de faisceaux constants tordus $0 \to A \to \tilde{A} \to A \to 0$, où la fibre géométrique de $\tilde{A}$ est cyclique d'ordre p^{2r}.

(R″) Si $p > 2$ et $r \geqslant 2$ (resp. $p = 2$ et $r \geqslant 3$), le caractère d'ordre p^{r-1} (resp. 2^{r-2}) défini par la composante de λ sur $(1 + p\mathbf{Z})/p^r\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}/p^{r-1}$ (resp. sur $(1 + 4\mathbf{Z})/2^r\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}/2^{r-2}$) se relève en un caractère d'ordre p^{2r-1} (resp. d'ordre 2^{2r-2}).

L'hypothèse (R) est vérifiée lorsque $A = \mathbf{Z}/p^r(i)$. Elle l'est également par exemple si λ provient de l'action galoisienne sur les points de torsion d'une courbe elliptique à multiplication complexe. Si X est le spectre d'un anneau semi-local R, la théorie de Kummer montre que l'hypothèse (R″) (et donc (R)) est vérifiée pour tout A si $p > 2$ et $\mu_{p^{2r-1}} \subset R$ (resp. si $p = 2$ et $\mu_{2^{2r-2}} \subset R$). Finalement, si A et B vérifient l'hypothèse (R), il en est de même de $A \otimes B$.

Supposons enfin $X = \mathrm{Spec}\ R$, où R est un anneau semi-local sans idempotents; on notera alors en général $H^n(R, -)$ les groupes $H^n(X_{ét}, -)$. On $X(A) = \mathrm{Spec}\ R(A)$ où $R(A)$ est encore semi-local (sans idempotents). Pour $n \in \mathbf{N}$, notons $K_n^M(R)$ la

K-théorie de Milnor de R (définie, comme dans [G], par les mêmes générateurs et relations que pour un corps). De la théorie de Kummer et du cup-produit, on déduit un "symbole cohomologique " ([Kτ] dans le cas d'un corps):

$$u_n(\mathrm{R})\colon \mathrm{K}_n^{\mathrm{M}}(\mathrm{R})/p^r \to \mathrm{H}^n(\mathrm{R}, \mathbf{Z}/p^r(n))$$

pour tous $n, r \geqslant 0$.

Définition 2. On dit que R vérifie la conjecture de Kato généralisée (modulo p) en degré n si $u_n(\mathrm{R})$ est bijectif pour tout $r \geqslant 1$.

(Le terme "généralisée" provient du fait que la conjecture originelle [Kτ] ne concerne que les corps).

Dans cet article, on n'aura besoin que de la *surjectivité* de $u_n(\mathrm{R})$. Si $u_n(\mathrm{R})$ est surjectif pour $r = 1$, un raisonnement formel implique qu'il est surjectif pour tout $r \geqslant 1$ ([T, diagramme (3.3)]). En (0.6), on donne une liste de cas où la conjecture de Kato (généralisée) est démontrée.

(0.4). Soient R un anneau semi-local (sans idempotents), et A un faisceau comme ci-dessus. Pour tout $i \in \mathbf{Z}$, notons $\mathrm{A}(i)$ le faisceau $\mathrm{A} \otimes \mathbf{Z}/p^r(i)$. On a alors le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soit* A *comme ci-dessus, et supposons que* A *vérifie l'hypothèse* (R). *Soit* $\mathrm{S} = \mathrm{R}(\mathrm{A}(-n))$; *supposons que* S/R *soit non exceptionnelle, et que* $u_n(\mathrm{S})$ *soit surjectif. Alors on a des isomorphismes*:

$$\mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{R}, \mathrm{A}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}^0(\Gamma, \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{S}, \mathrm{A})), \tag{1}$$

$$\mathrm{H}_0(\Gamma, \mathrm{H}^n(\mathrm{S}, \mathrm{A})) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}^n(\mathrm{R}, A), \tag{2}$$

induits respectivement par la restriction et par la corestriction en cohomologie.

Le cas particulier le plus important de ce théorème est celui où $\mathrm{A} = \mathbf{Z}/p^r(i)$. Dans ce cas, il semble suggestif de baptiser (1) (resp. (2)) *descente* (resp. *montée*) *cyclotomique*. La généralisation à un A quelconque m'a été suggérée par Markus Rost. Il serait très utile de trouver un analogue au th. 1 dans le cas exceptionnel, mais cette question ne semble pas facile ([Me2], p. 152).

Notons le corollaire suivant au théorème 1:

COROLLAIRE. *L'énoncé du théorème 1 reste vrai si on remplace* S/R *par une sous-extension* S′/R.

En effet, on applique (1) et (2) aux extensions S/R et S/S′. □

La démonstration du théorème 1 est donnée au chapitre I. En voici une description rapide. Pour démontrer (1), on utilise la suite spectrale de Hochschild-Serre associée à l'extension S/R. Les hypothèses impliquent que la suite spectrale *dégénère en* E_3: ceci est général et n'utilise pas la conjecture de Kato généralisée, qui intervient en revanche pour démontrer que certaines différentielles d_2 sont nulles ou injectives; (1) résulte alors de ce dernier fait.

Pour démontrer (2), on procède exactement de la même manière en utilisant une suite spectrale "de Tate", analogue homologique de la suite spectrale de Hochschild-Serre. Cette suite spectrale n'est *a priori* pas convergente, mais dans ce cas particulier elle converge et dégénère en E_3 exactement comme la précédente. De même que pour (1), on démontre alors (2) en utilisant la conjecture de Kato généralisée pour prouver que certaines différentielles d_2 sont nulles our surjectives.

Question. Est-ce que l'hypothèse (R) est nécessaire pour la validité du théorème 1?

(0.5). Pour tout schéma X où p est inversible, notons, pour $n \geqslant 1$ et $i \in \mathbf{Z}$, $H^n(X, i)$ le groupe $H^{n-1}(X_{ét}, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(i))$ (l'indice *ét* et le nombre premier p étant sous-entendus); on définit $H^0(X, i)$ comme 0 si $i \neq 0$, et $\mathbf{Z}$ si $i = 0$. Au §5, on munit $H^*(X, *)$ d'une produit bigradué, généralisant le cup-produit $H^n(X, \mathbf{Z}) \times H^m(X, \mathbf{Z}) \to H^{n+m}(X, \mathbf{Z})$. Par ailleurs, soient $Z^k H^n(X, i)$ la filtration induite sur le groupe $H^n(X, i)$ par la suite spectrale "de Bloch-Ogus" associée au morphisme de sites $X_{ét} \to Z_{Zar}$, et $gr^k H^n(X, i)$ le gradué associé à cette filtration. On dit que X est *non exceptionne* si aucun revêtement 2-cyclotomique de X n'est exceptionnel [K2].

THÉORÈME 2. *Supposons* X *non exceptionnel si $p = 2$. Supposons u_n*(S) *surjectif en degré $\leqslant N$ pour toute extension p-cyclotomique* S *d'un anneau local de* X. *Alors, pour tous $m, n \leqslant \mathrm{N} + 1$ et tous k, k', le produit*

$$gr^k H^m(X, i) \times gr^{k'} H^n(X, j) \to gr^{k+k'} H^{m+n}(X, i+j)$$

est identiquement nul, sauf peut-être si $i + j = m - k + n - k' - 2$ pour un couple (k, k').

Supposons que l'ensemble des points fermés de X soit de dimension d. Comme la longueur de la filtration Z^k est évidemment $\leqslant d$, on en déduit:

COROLLAIRE. *Sous les hypothèses du théorème* 2, *soient $x_1, \ldots, x_{d+2}$ des éléments de $H^*(X, *)$, de bidegrés $(n_1, i_1), \ldots, (n_{d+2}, i_{d+2})$. Supposons $i_1 \geqslant n_1, \ldots, i_{d+2} \geqslant n_{d+2}$ ou $i_1 \leqslant 0, \ldots, i_{d+2} \leqslant 0$, et $n_i \leqslant \mathrm{N} + 1$ pour tout i. Alors on a $x_1 \cdot \ldots \cdot x_{d+2} = 0$.*

La démonstration du théorème 2 est donnée au chapitre 2. On se réduit d'abord au cas local (th. 5.1), puis, par montée cyclotomique, au cas où il y a suffisamment de racines de l'unité. L'essence de l'argument utilisé pour prouver la nullité d'une produit $x \cdot y$ consiste alors à montrer que x et y d'une part commutent et d'autre part anticommutent (l'argument ne procède pas littéralement de cette manière).

(0.6). On conjecture que tout anneau semi-local suffisamment lisse vérifie la conjecture de Kato généralisée en tout degré (voir Appendice 1). Voici en tout cas une liste d'exemples où cette conjecture est vérifiée (et donc où les théorèmes 1 et 2 s'appliquent):

1. Pour $n = 1$, le symbole galoisien est par définition l'homomorphisme $R^*/R^{*p^r} \to H^1(R, \mathbf{Z}/p^r(1))$ obtenu à partir de la suite exacte de Kummer $1 \to \mu_{p^r} \to \mathbf{G}_m \xrightarrow{p^r} \mathbf{G}_m \to 1$; d'après le théorème 90 de Hilbert pour un anneau semi-local $(H^1(R, \mathbf{G}_m) = \mathrm{Pic}\ R = 0)$, il est bijectif.

2. Pour $n = 2$, le symbole galoisien est bijectif si R est un corps (théorème de Merkurjev-Suslin [MS1]), ou plus généralement régulier, vérifiant la conjecture de Gersten [Q, §5] ainsi que le théorème de Bloch-Ogus [BO]: ce résultat est démontré par Lichtenbaum [Li,th. 9.1.i)] mais peut déjà être extrait de [Su 1, cor. 4.4]. (Lichtenbaum l'énonce pour R localisée d'une algèbre régulière de type fini sur un corps, mais sa démonstration n'utilise que les hypothèses ci-dessus.)

3. Pour $n = 3$ et $p = 2$, le symbole galoisien est bijectif si R est un corps (Rost [R], Merkurjev-Suslin [MS2]); même énoncé pour $n = 4$ (Rost, annoncé).

4. Si R est un "corps local supérieur" au sens de Kato, le symbole galoisien est bijectif en tout degré (et pour tout $p \neq \operatorname{car} R$) ([BK$\tau$, th. 5.12]).

5. Supposons R "très propre modulo p" (définition A1) et $p \geqslant n$. Si la conjecture de Kato modulo p est vérifiée en degré n par son corps des fractions et en degré $n - 1$ par les corps résiduels en ses idéaux premiers de hauteur 1, la conjecture de Kato généralisée vaut en degré n pour R; inversement, si celle-ci est vérifiée en degré n (resp. $n - 1$, $n - 2$) par R (resp. par les corps résiduels de R en ses idéaux premiers de hauteur 1, 2), elle vaut pour le corps des fractions de R (appendice 1, théorème A1.1).

6. Supposons R local hensélien, de corps résiduel k. On montre facilement que la conjecture de Kato (généralisée) vaut pour R si et seulement si elle vaut pour k (appendice 1, théorème A1.2).

7. Supposons que R soit l'anneau local d'une courbe (non nécessairement lisse) sur un corps de caractéristique $\neq p$. Alors la conjecture de Kato généralisée vaut pour R en degré 2 [PW, cor. 5.2].

8. Soit F un corps de p-dimension cohomologique $\leqslant n$, où $p \neq$ car F. Supposons que le symbole galoisien soit surjectif en degré n pour toutes les extensions finies de F. Soit X une courbe irréductible sur F. Alors le symbole galoisien est surjectif en degré $n + 1$ pour le corps des fonctions de X ([Kτ, prop. 1.2]; [B1, th. 5.7] pour le cas où F est un corps de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos). En particulier, si F est un corps de type fini sur $\mathbf{Q}$, $\mathbf{F}_l$ ou un corps algébriquement clos, le symbole galoisien est surjectif en degré $cd_p(\mathrm{F})$.

(0.7). Outre le théorème 1 et ses applications, cet article comporte 3 appendices. Le premier étudie les liens entre la conjecture de Kato (généralisée) pour un anneau semi-local et la même pour ses corps résiduels. Le deuxième montre sous cette conjecture que la cohomologie étale à coefficients constants tordus d'un anneau semi-local coïncide avec la cohomologie correspondante de son groupe fondamental. Le dernier, enfin, établit un calcul de bords qui intervient dans la démonstration du théorème 1 comme dans celle du théorème 2.

(0.8). *Historique.* Le cas $n = 0$ du théorème 1 traduit la trivialité cohomologique des racines de l'unité (ou d'un twist à la Tate de celles-ci) par rapport au plus petit groupe de Galois qui opère sur elles; ce résultat est essentiellement bien connu. Lorsque $n \geqslant 1$, seul l'énoncé (2), dans le cas des corps, est traité dans la littérature publiée. Pour $(n, i) = (1, 0)$ (cas des caractères du groupe de Galois absolu), il a son origine dans les généralisations du théorème de Grunwald-Wang par Miki; il a été démontré (et utilisé) par Suegoshi [Sue, lemmes 1 et 2] et Saltman [Sa, th. 2.3(b)]. Pour $n = 1$ et i, $i - 1$ premiers à p (donc $p \neq 2$), les énoncés (1) et (2) sont démontrés dans un manuscrit de Merkurjev; la version publiée [Me1] ne contient plus que l'énoncé (2) pour $i = 2$ (et $p \neq 2$), que Merkurjev applique à l'étude de la torsion dans K_2. La surjectivité dans l'énoncé (2) a également été démontrée pour $n = 1$ et $i - 1$ premier à p par O. Hyodo (non publié). Dans le cas $n = 1$, i quelconque, (2) a été démontré dans [Kθ]. L'énoncé (2) dans le cas $(n, i) = (2, 1)$ (cas du groupe de Brauer) est démontré par Merkurjev dans [Me2].

(0.9). *Remarque.* La démonstration du théorème 1 n'utilise que la surjectivité du cup-produit $H^1(S, \mathbf{Z}/p^r(1))^{\otimes n} \to H^n(S, \mathbf{Z}/p^r(n))$, voire celle de l'homomorphisme $H^n(S, \mathbf{Z}/p^{2r}(n)) \to H^n(S, \mathbf{Z}/p^r(n))$. La référence constante à la "conjecture de Kato généralisée" semble donc obscurcir le fait que les énoncés sont de nature purement cohomologique, et en particulier ne font pas intervenir de K-théorie. Je pense que cette observation est illusoire et trompeuse, pour les raisons suivantes:

(a) On ne connait pas d'exemple où la surjectivité, soit du cup-produit $H^1(S, \mathbf{Z}/p^r(1))^{\otimes n} \to H^n(S, \mathbf{Z}/p^r(n))$, soit de l'homomorphisme $H^n(S, \mathbf{Z}/p^{2r}(n)) \to H^n(S, \mathbf{Z}/p^r(n))$, ait été prouvée sans avoir recours à la K-théorie algébrique (à l'exception de (0.6.8); dans ce cas, le théorème 1 est trivialement vrai).

(b) Il est probable que la surjectivité de $H^n(-, \mathbf{Z}/p^2(n)) \to H^n(-, \mathbf{Z}/p(n))$ suffit à impliquer la conjecture de Kato généralisée. C'est en tout cas ce que démontre Merkurjev (non publié) lorsque $p = 2$, pour les corps contenant une racine carrée de -1.

(0.10). Les résultats de cet article, à l'exception de la partie 7, ont été obtenus en juillet 1989. Ils ont fait l'object d'une communication au Congrès International des Mathématiciens en août 1990. L'auteur s'excuse du long délai de rédaction.

(0.11). *Notations.* Pour tout groupe abélien A et tout entier $m \geqslant 1$, on note ${}_mA$ (resp. A/m) le noyau (resp. le conoyau) de la multiplication par m dans A. Si p est un nombre premier, on note $A\{p\}$ le sous-groupe de A réunion des ${}_{p^r}A$ pour $r \geqslant 1$.

I. Démonstration du théorème 1.

1. *La suite spectrale de Hochschild-Serre.*

(1.1). Soient G un groupe topologique (par exemple profini) et H un sous-groupe distingué fermé de G; notons Γ le quotient G/H. Un G-module A est dit *topologique* (discret) si, pour tout $a \in A$, le stabilisateur de a est ouvert dans G. Pour un G-module topologique A, on note $H^i(G, A)$ les groupes de cohomologie de G à valeurs dans A: ce sont les foncteurs dérivés du foncteur "points fixes" $A \mapsto A^G$. On a une suite spectrale "de Hochschild-Serre" E(A):

$$E_2^{pq}(A) = H^p(\Gamma, H^q(H, A)) \Rightarrow H^{p+q}(G, A),$$

qu'on peut obtenir par la méthode de Grothendieck comme suite spectrale de foncteurs composés [Gr]. Elle est fonctorielle en A en un sens évident; plus généralement, soit $C^\bullet$ un complexe de G-modules topologiques borné inférieurement: on lui associe ses groupes d'hypercohomologie $\mathbb{H}^i(G, C^\bullet)$ et une suite spectrale "de Hochschild-Serre":

$$E_2^{pq}(C^\bullet) = H^p(\Gamma, \mathbb{H}^q(H, C^\bullet)) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(G, C^\bullet),$$

fonctorielle en $C^\bullet$: elle se construit exactement comme la précédente. En particulier, considérons une suite exacte $0 \to A \to A' \to A'' \to 0$ de G-modules topologiques; notons $C^\bullet$ (resp. $C'^\bullet$) le complexe $0 \to A \to A' \to 0 \to \cdots$ (resp. $0 \to A \to 0 \to \cdots$) (A étant en degré 0). L'hypercohomologie de $C^\bullet$ en degré i s'identifie à celle de A'' en degré $i-1$; on a un morphisme de projection $C^\bullet \to C'^\bullet$ et le morphisme correspondant en cohomologie s'identifie au bord associé à la suite exacte $0 \to A \to A' \to A'' \to 0$. En appliquant à cette situation la fonctorialité des suites spectrales, on en déduit:

LEMME 1.1.1. *Soit* (S): $0 \to A \to A' \to A'' \to 0$ *une suite exacte de* G-*modules topologiques. Alors, les morphismes* $E_2^{p,q}(A'') \to E_2^{p,q+1}(A)$ *déduits des bords de la suite exacte de cohomologie associée à* (S) *anticommutent aux différentielles* d_2 *des suites spectrales.* □

Soient A, A′ deux G-modules topologiques: alors on a un accouplement de suites spectrales (cup-produit):

$$E_r^{p,q}(A) \otimes E_r^{p',q'}(A') \to E_r^{p+p',q+q'}(A \otimes A'),$$

pour lequel les différentielles sont des dérivations. En particulier, tout élément de $H^p(\Gamma, \mathbf{Z}) = E_2^{p,0}(\mathbf{Z})$ définit sur E(A) un opérateur de degré $(p, 0)$, commutant aux différentielles. Dans le cas où Γ est fini cyclique, on en déduit:

LEMME 1.1.2. *Supposons* Γ *fini et cyclique, et soit* λ *un générateur de* $H^2(\Gamma, \mathbf{Z})$. *Alors, pour tout* G-*module topologique* A, *le cup-produit par* λ *induit des morphismes* $E_2^{p,q}(A) \to E_2^{p+2,q}(A)$, *commutant aux différentielles* d_2, *surjectifs pour* $p = 0$ *et bijectifs pour* $p > 0$.

Cela résulte de la périodicité de la cohomologie d'un groupe cyclique [CL, ch. VIII§4, p. 141, remarque] □

Le lemme suivant est élémentaire mais fondamental.

LEMME 1.1.3. *Supposons* Γ *fini cyclique; soit m un entier* $\geqslant 1$, *et supposons que le morphisme de "transgression"* d_2: $E_2^{0,1}(\mathbf{Z}/m) \to E_2^{2,0}(\mathbf{Z}/m)$ *soit surjectif. Alors, pour tout* G-*module topologique* A *annulé par m, la suite spectrale* E(A) *dégénère en* E_3 *au sens suivant: on a* $E_3^{p,q}(A) = 0$ *pour* $p \geqslant 2$, *et des suites exactes*

$$0 \to NH^1(\Gamma, H^n(H, A)) \to H^{n+1}(G, A) \to NH^0(\Gamma, H^{n+1}(H, A)) \to 0,$$

où NH^0 *et* NH^1 *désignent les noyaux des différentielles* d_2 *correspondantes.*

Démonstration. Soit $\theta \in E_2^{0,1}(\mathbf{Z}/m)$ tel que $\lambda = d_2\theta$ engendre $E_2^{2,0}(\mathbf{Z}/m)$. Si $x \in E_2(A)$, on calcule:

$$d_2(\theta \cdot x) = (d_2\theta)\cdot x - \theta\cdot(d_2 x),$$

ou encore:

$$d_2(\theta \cdot x) + \theta\cdot(d_2 x) = \lambda\cdot x.$$

En d'autres termes, le cup-produit par θ induit une *homotopie* de 0 au cup-produit par λ dans la suite spectrale. L'énoncé résulte alors du lemme 1.1.2 (noter que l'homomorphisme $H^2(\Gamma, \mathbf{Z}) \to H^2(\Gamma, \mathbf{Z}/m)$ envoie un générateur de $H^2(\Gamma, \mathbf{Z})$ sur un générateur de $H^2(\Gamma, \mathbf{Z}/m)$). $\square$

Remarque 1.1.1. L'hypothèse du lemme 1.1.3 équivaut à la suivante: *il existe un sous-groupe distingué fermé* H_1 *de* G, *contenu dans* H, *tel que* $(H: H_1) = m'$ *et que* G/H_1 *soit cyclique, où* m' *est le plus grand diviseur de* m *dont tous les facteurs premiers divisent* $|\Gamma|$. Cela résulte de la suite exacte à cinq termes

$$0 \to H^1(\Gamma, \mathbf{Z}/m) \to H^1(G, \mathbf{Z}/m) \to H^1(H, \mathbf{Z}/m)^\Gamma \xrightarrow{d_2} H^2(\Gamma, \mathbf{Z}/m) \to H^2(G, \mathbf{Z}/m)$$

déduite de la suite spectrale $E(\mathbf{Z}/m)$. En effet, $H^2(\Gamma, \mathbf{Z}/m)$ est engendré par $\bar\beta\chi$, où χ est un générateur de $H^1(\Gamma, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ et $\bar\beta$ est le bord associé à la suite exacte $0 \to \mathbf{Z}/m \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{m} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0$. La surjectivité de d_2 équivaut donc à l'égalité $\bar\beta\tilde\chi = 0$, où $\tilde\chi$ est l'image de χ dans $H^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, c'est-à-dire au fait que $\tilde\chi$ soit divisible par m dans $H^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Comme $\tilde\chi$ est d'ordre $|\Gamma|$, l'affirmation en résulte.

(1.2). Soit $Y \to X$ un revêtement étale galoisien de schémas, de groupe Γ. Pour tout faisceau $\mathscr{F}$ sur $X_{ét}$, on a une suite spectrale "de Hochschild-Serre" $E(\mathscr{F})$, fonctorielle en $\mathscr{F}$:

$$E_2^{pq}(\mathscr{F}) = H^p(\Gamma, H^q(Y_{ét}, \mathscr{F})) \Rightarrow H^{p+q}(X_{ét}, \mathscr{F}),$$

qu'on peut obtenir par la méthode de Grothendieck comme suite spectrale de foncteurs composés. Elle possède les mêmes propriétés formelles que dans le cas (1.1). Plus précisément, par les mêmes arguments, on obtient les énoncés suivants, analogues des précédents:

LEMMA 1.2.1. *Soit* (S): $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F}'' \to 0$ *une suite exacte de faisceaux sur* $X_{ét}$. *Alors, les morphismes* $E_2^{p,q}(\mathscr{F}'') \to E_2^{p,q+1}(\mathscr{F})$ *déduits des bords de la suite exacte de cohomologie associée à* (S) *anticommutent aux différentielles* d_2 *des suites spectrales.* $\square$

LEMME 1.2.2. *Supposons* Γ *fini et cyclique, et soit* λ *un générateur de* $H^2(\Gamma, \mathbf{Z})$. *Alors, pour tout faisceau* $\mathscr{F}$ *sur* $X_{ét}$, *le cup-produit par* λ *induit des morphismes* $E_2^{p,q}(\mathscr{F}) \to E_2^{p+2,q}(\mathscr{F})$, *commutant aux différentielles* d_2, *surjectifs pour* $p = 0$ *et bijectifs pour* $p > 0$. $\square$

LEMME 1.2.3. *Supposons* Γ *fini cyclique; soit* m *un entier* $\geqslant 1$, *et supposons que le morphisme de "transgression"* $d_2\colon \mathrm{E}_2^{0,1}(\mathbf{Z}/m) \to \mathrm{E}_2^{2,0}(\mathbf{Z}/m)$ *soit surjectif. Alors, pour tout faisceau* $\mathscr{F}$ *sur* $\mathrm{X}_{\acute{e}t}$ *annulé par* m, *la suite spectrale* $\mathrm{E}(\mathscr{F})$ *dégénère en* E_3 *au sens suivant: on a* $\mathrm{E}_3^{p,q}(\mathscr{F}) = 0$ *pour* $p \geqslant 2$, *et des suites exactes*

$$0 \to \mathrm{NH}^1(\Gamma, \mathrm{H}^n(\mathrm{Y}_{\acute{e}t}, \mathscr{F})) \to \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}_{\acute{e}t}, \mathscr{F}) \to \mathrm{NH}^0(\Gamma, \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{Y}_{\acute{e}t}, \mathscr{F})) \to 0,$$

où NH^0 *et* NH^1 *désignent les noyaux des différentielles* d_2 *correspondantes.* □

Remarque 1.2.1. De même que dans la remarque 1.1.1, on voit que l'hypothèse du lemme 1.2.3 équivaut à la suivante: *il existe un revêtement étale* $\mathrm{Y}_1 \to \mathrm{Y}$ *de degré* m' *tel que* $\mathrm{Y}_1 \to \mathrm{X}$ *soit cyclique.* En particulier, on en déduit:

PROPOSITION 1.2.1. *Soit* A *un faisceau constant tordu sur* $\mathrm{X}_{\acute{e}t}$, *de fibre géométrique* $\mathbf{Z}/p^r$, *vérifiant l'hypothèse* (*R*). *Si le revêtement* $\mathrm{X(A)} \to \mathrm{X}$ *est non exceptionnel, l'hypothèse du lemme* 1.2.3 *est vérifiée pour* $m = p^r$. □

Remarque 1.2.2. Si de plus $\mathrm{A} = \mathbf{Z}/p^r(i)$, l'hypothèse du lemme 1.2.3 est vérifiée pour $m = p^n$, n quelconque.

2. *Démonstration de* (1). Vu le lemme 1.2.3 et la proposition 1.2.1, on doit démontrer que $\mathrm{NH}^1(\Gamma, \mathrm{H}^n(\mathrm{Y}_{\acute{e}t}, \mathrm{A})) = 0$ et que $\mathrm{NH}^0(\Gamma, \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{Y}_{\acute{e}t}, \mathrm{A})) = \mathrm{H}^0(\Gamma, \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{Y}_{\acute{e}t}, \mathrm{A}))$, c'est-à-dire que $d_2^{1,n}$ est injectif et que $d_2^{0,n+1}$ est nul. Cela résulte de la

PROPOSITION 2.1.1. *Supposons que* $u_n(\mathrm{S})$ *soit surjectif. Alors, pour tout* $k \geqslant 1$, *la différentielle* $d_2^{k,n}$ *de la suite spectrale* $\mathrm{E(A)}$ *est injective.*

(En effet, l'injectivité de $d_2^{2,n}$ entraîne la nullité de $d_2^{0,n+1}$.)

Démonstration. Si Γ est d'ordre premier à p, la suite spectrale dégénère en E_2 et il n'y a rien à démontrer; dans la suite, on suppose que l'ordre de Γ est divisible par p. Notons $\bar{\beta}^{(n)}$ (resp. ∂) le bord associé à la suite exacte $0 \to \mathbf{Z}/p^r(n) \to \mathbf{Z}/p^{2r}(n) \to \mathbf{Z}/p^r(n) \to 0$ (resp. $0 \to \mathrm{A} \to \tilde{\mathrm{A}} \to \mathrm{A} \to 0$, *cf* hypothèse (R')), et δ l'opérateur

$$\bar{\beta}^{(n)} \otimes 1\colon \mathrm{H}^*(\mathrm{S}, \mathrm{A}) = \mathrm{H}^*(\mathrm{S}, \mathbf{Z}/p^r(n)) \otimes \mathrm{A}(-n) \to \mathrm{H}^{*+1}(\mathrm{S}, \mathbf{Z}/p^r(n)) \otimes \mathrm{A}(-n)$$
$$= \mathrm{H}^{*+1}(\mathrm{S}, \mathrm{A}).$$

D'après la proposition A3.1, on a, pour tout $x \in \mathrm{H}^*(\mathrm{S}, \mathrm{A})$:

$$\delta(x) = \partial x + \theta \cdot x,$$

où $\theta \in \mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathbf{Z}/p^r)^\Gamma$ est le caractère représentant la différence des deux faisceaux $\tilde{\mathrm{A}}$ et $\mathbf{Z}/p^{2r}(n)$. Par définition de S, θ est d'ordre p^r, donc $d_2\theta = \lambda$ engendre $\mathrm{H}^2(\Gamma, \mathbf{Z}/p^r)$. Les opérateurs δ, ∂ et $x \mapsto \theta \cdot x$ sont Γ-équivariants, donc induisent des opérateurs de degré (0, 1) sur $\mathrm{E}_2(\mathrm{A})$; d'après le lemme 1.2.1, ∂ anticommute aux différentielles

d_2 (ce n'est pas le cas de δ, qui n'est pas "défini sur R"). On a donc, pour tout $x \in E_2(A)$ (dém. du lemme 1.1.3):

$$d_2\delta(x) + \delta(d_2 x) = \lambda \cdot x.$$

Mais, pour $x \in H^n(S, A)$, on a $\delta(x) = 0$: en effet, la surjectivité de $u_n(S)$ entraîne que $H^n(S, \mathbf{Z}/p^{2r}(n)) \to H^n(S, \mathbf{Z}/p^r(n))$ est surjectif. Pour $x \in E_2^{k,n}$, on a donc $\delta(d_2 x) = \lambda \cdot x$. Comme le cup-produit par λ est bijectif pour $k \geqslant 1$, cela prouve que d_2 est alors injectif. □

3. *La suite spectrale de Tate.*

(3.1). Gardons les notations de (1.1), et supposons de plus Γ *fini*. Dans le cas où G est profini et de dimension cohomologique finie, Tate ([CG, p. I–83, th. 1]) a construit une suite spectrale convergeant vers la cohomologie de G, et dont le terme E_2 est *l'homologie* de Γ à valeurs dans la cohomologie de H. Je vais reproduire sa construction dans le cas général, en modifiant son indexation—toutefois, la suite spectrale obtenue n'a pas de raison *a priori* d'être convergente.

Soit A un G-module topologique; comme en *loc. cit.* on note $cd(G, A) \leqslant d$ si $H^n(H, A) = 0$ pour tout $n > d$ et tout sous-groupe fermé H de G.

PROPOSITION 3.1.1. *Pour tout G-module topologique* A, *il existe une suite spectrale* ${}_{T}E(A)$, *fonctorielle en* A, *telle que* (*en notations* "cohomologiques"):

(i) *Pour* $p, q \in \mathbf{Z}$, ${}_{T}E_2^{pq}(A) = H_{-p}(\Gamma, H^q(H, A))$ *si* $p \leqslant 0$, $q \geqslant 0$,
0 *sinon*;

(ii) *Supposons* $cd(G, A) < \infty$. *Alors* ${}_{T}E(A)$ *converge vers*
$H^n(G, A)$ *si* $n \geqslant 0$,
0 *sinon.*

De plus, l'edge-homomorphism ${}_{T}E_2^{0,q}(A) = H_0(\Gamma, H^q(H, A)) \to H^q(G, A)$ *est induit par la corestriction.*

(De manière imagée, on peut écrire $H_p(\Gamma, H^q(H, A)) \Rightarrow H^{q-p}(G, A)$.)

Démonstration. On décalque la démonstration de *op. cit.*. Soit $0 \to \mathscr{I}^0 \to \mathscr{I}^1 \to \cdots$ une G-résolution injective de A; posons $I^q = H^0(H, \mathscr{I}^q)$; le complexe $I^\cdot$: $0 \to I^0 \to I^1 \to \cdots$ a donc pour cohomologie $H^q(I^\cdot) = H^q(H, A)$ pour $q \geqslant 0$, 0 pour $q < 0$. De plus, les I^q sont Γ-acycliques. En prenant les chaînes par rapport à Γ, on obtient un double complexe $C^{\cdot\cdot}$ tel que $C^{pq} = C_{-p}(\Gamma, I^q)$ si $p \leqslant 0$, 0 sinon. A ce double complexe sont associées les deux suites spectrales habituelles, notées ici ${}_{T}E$ et ${}_{T}'E$. On va décrire leurs termes E_2:

(1) En prenant la cohomologie en direction de q, on obtient $C_{-p}(\Gamma, H^q(H, A))$ puisque $C_{-p}(\Gamma, -)$ est un foncteur exact. Prenant ensuite la cohomologie en direction de p, on obtient le terme ${}_{T}E_2^{pq} = H_{-p}(\Gamma, H^q(H, A))$ désiré pour la première suite spectrale.

(2) En prenant d'abord la cohomologie en direction de p, on trouve $H_{-p}(\Gamma, I^q)$. Par acyclicité des I^q, on a $H_{-p}(\Gamma, I^q) = 0$ si $p \neq 0$. De plus, I^q est acyclique par rapport à tout sous-groupe de Γ, en particulier par rapport à ses sous-groupes de

Sylow; en appliquant [CL, p. 152, th. 8], on en déduit que $\hat{H}^{-1}(\Gamma, I^q) = \hat{H}^0(\Gamma, I^q) = 0$, c'est-à-dire que la norme induit un *isomorphisme* $H_0(\Gamma, I^q) \xrightarrow{\cong} H^0(\Gamma, I^q)$. Mais $H^0(\Gamma, I^q) = H^0(\Gamma, H^0(H, \mathscr{I}^q)) = H^0(G, \mathscr{I}^q)$; en prenant la cohomologie en direction de q, on trouve donc ${}_T'E_2^{pq} = 0$ si $p \neq 0$, et ${}_T'E_2^{pq} = H^q(G, A)$ si $p = 0$, $q \geqslant 0$.

Plutôt qu'une résolution injective de A, on peut utiliser une résolution par des G-modules $\mathscr{J}$ tels que $cd(G, \mathscr{J}) = 0$. Par l'argument habituel, une telle résolution s'envoie vers $\mathscr{I}^\cdot$, de manière unique à homotopie près; le calcul précédent montre que les suites spectrales obtenues à l'aide de cette nouvelle résolution sont canoniquement isomorphes aux précédentes (plus exactement, leurs termes E_r sont isomorphes à partir de $r = 2$). On peut donc les noter ${}_TE(A)$ et ${}_T'E(A)$; elles dépendent fonctoriellement de A.

Supposons maintenant $cd(G, A) = d < \infty$. Alors on peut "tronquer" la résolution de A en degrés $> d$, en remplaçant $\mathscr{I}^d$ par $Im(\mathscr{I}^{d-1} \to \mathscr{I}^d)$, qui est de dimension cohomologique 0. Cette nouvelle résolution est de longueur d; l'argument de dimension habituel montre alors que ${}_TE(A)$ et ${}_T'E(A)$ convergent vers le même objet. Le calcul de ${}_T'E_2(A)$ montre que cet objet est $H^*(G, A)$; cela démontre (ii). Finalement, la description du *edge-homomorphism* provient de celle du terme E_1 de ${}_T'E$. □

Lorsque $cd(G, A) = \infty$, la suite spectrale ${}_TE(A)$ n'est pas convergente en général, et si elle l'est, ne converge pas nécessairement vers $H^*(G, A)$. Cela se produit néanmoins dans des cas importants. Ainsi on a le lemme trivial suivant, dont on utilisera ci-dessous un cas particulier trivial:

LEMME 3.1.0. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie abélienne, et soient $({}_iE_r)_{i\in I}$, $(M_i)_{i\in I}$ un système inductif de suites spectrales (à valeurs dans $\mathscr{C}$), notées cohomologiquement, et un système inductif d'objets de $\mathscr{C}$; posons $E_r = \varinjlim {}_iE_r$ et $M = \varinjlim M_i$. Supposons que, pour tout i, ${}_iE_r$ converge vers M_i et qu'il existe des entiers $n \geqslant 2$ et $m \in \mathbf{Z}$ tels que, pour tout i, on ait ${}_iE_n = {}_iE_\infty$ et ${}_iE_n^{pq} = 0$ pour $p < m$. Alors E_r converge vers M.* □

De même qu'en (1.1), on démontre (sans hypothèses de finitude ou de convergence):

LEMME 3.1.1. *Soit (S): $0 \to A \to A' \to A'' \to 0$ une suite exacte de G-modules topologiques. Alors, les morphismes ${}_TE_2^{p,q}(A'') \to {}_TE_2^{p,q+1}(A)$ déduits des bords de la suite exacte de cohomologie associée à (S) anticommutent aux différentielles d_2 des suites spectrales.* □

De même qu'on a des cup-produits pour les suites spectrales de Hochschild-Serre, on a des *cap-produits* pour les suites spectrales de Tate. Plus précisément, soient A et B deux G-modules topologiques: on a alors des accouplements:

$$ {}_TE_r^{p,q}(A) \otimes E_r^{p',q'}(B) \to {}_TE_r^{p+p',q+q'}(A \otimes B), $$

"commutant" aux différentielles et compatibles aux cup-produits $H^n(G, A) \otimes H^m(G, B) \to H^{n+m}(G, A \otimes B)$. En effet, soient $(\mathscr{I}^q)$ et $(\mathscr{J}^q)$ des G-résolutions injectives de A et B, et $I^q = H^0(H, \mathscr{I}^q)$, $J^q = H^0(H, \mathscr{J}^q)$: alors le complexe total associé au double complexe $\mathscr{I}^\cdot \otimes \mathscr{J}^\cdot$ est un résolution injective de $A \otimes B$, et les accouplements en question sont induits par les homomorphismes d'évaluation:

$$C_p(\Gamma, I^q) \otimes C^{p'}(\Gamma, J^{q'}) \to C^{p'-p}(\Gamma, I^q \otimes J^{q'})(p' \geqslant p).$$

De même qu'en (1.1), on en déduit:

LEMME 3.1.2. *Supposons* Γ *fini et cyclique, et soit* λ *un générateur de* $H^2(\Gamma, \mathbf{Z})$. *Alors, pour tout G-module topologique* A, *le cap-produit par* λ *induit des morphismes* ${}_{\mathrm{T}}E_2^{p,q}(A) \to {}_{\mathrm{T}}E_2^{p+2,q}(A)$, *commutant aux différentielles* d_2, *injectifs pour* $p = -2$ *et bijectifs pour* $p < -2$. □

LEMME 3.1.3. *Sous l'hypothèse du lemme* 1.1.3, *on a* ${}_{\mathrm{T}}E_3^{p,q}(A) = 0$ *pour* $p \leqslant -2$; *si* $cd(G, A) < \infty$ *on a des suites exactes*

$$0 \to CH_0(\Gamma, H^n(H, A)) \to H^n(G, A) \to CH_1(\Gamma, H^{n+1}(H, A)) \to 0,$$

où CH_0 *et* CH_1 *désignent les conoyaux des différentielles* d_2 *correspondantes.* □

Soit p un nombre premier. Disons que le groupe profini G est *p-uniforme* si $G = \varprojlim G_i$, où les G_i sont des groupes profinis tels que $cd_p(G_i) < \infty$. Tout G-module topologique A est alors de la forme $\varinjlim A_\alpha$, où, pour tout α, A_α provient d'un G_i-module pour i "assez grand". En appliquant le lemme 3.1.0, on obtient donc la généralisation suivante du lemme 3.1.3:

LEMME 3.1.4. *Supposons* G *p-uniforme. Alors le lemme* 3.1.3 *est valable pour tout* G-*module de torsion p-primaire* A, *sans l'hypothèse* $cd(G, A) < \infty$. □

(En fait, le lemme 3.1.3 est valable pour la partie p-primaire de la cohomologie d'un G-module A quelconque, puisque $H^n(H, A)$ est de torsion pour tout $n > 0$ et tout sous-groupe fermé H de G.)

(3.2). Gardons les notations de (1.2). De même qu'en (3.1), on construit pour tout faisceau abélien $\mathscr{F}$ sur $X_{ét}$ une suite spectrale "de Tate", de terme $E_2^{-p,q} = H_p(\Gamma, H^q(Y_{ét}, \mathscr{F}))$, convergeant vers $H^*(X_{ét}, \mathscr{F})$ si $cd(X_{ét}, \mathscr{F}) < \infty$. On a les analogues évidents des lemmes 3.1.1 à 3.1.3. Pour exprimer un analogue du lemme 3.1.4, on dit que le schéma X est *p-uniforme* si $X = \varprojlim X_i$, où les morphismes de transition sont affines et les X_i sont tels que $cd_p(X_{i,ét}) < \infty$. Du lemme 3.1.0 on déduit alors:

LEMME 3.2.1. *Soit* X *un schéma p-uniforme. Sous l'hypothèse du lemme* 1.2.3, *pour tout faisceau* $\mathscr{F}$ *de m-torsion, on a* ${}_{\mathrm{T}}E_3^{p,q}(\mathscr{F}) = 0$ *pour* $p \leqslant -2$, *et des suites exactes*

$$0 \to CH_0(\Gamma, H^n(Y, \mathscr{F})) \to H^n(X, \mathscr{F}) \to CH_1(\Gamma, H^{n+1}(Y, \mathscr{F})) \to 0,$$

où CH_0 *et* CH_1 *désignent les conoyaux des différentielles* d_2 *correspondantes.* □

Il reste à donner des exemples de schémas p-uniformes. Pour simplifier, disons qu'un schéma X *n'est pas ordonnable* si aucun de ses corps résiduels n'est ordonnable. On a alors:

PROPOSITION 3.2.1. *Si $p > 2$, tout schéma X de type fini sur un schéma affine S est p-uniforme. Si $p = 2$, c'est encore vrai si et seulement si X n'est pas ordonnable.*

Démonstration. Soit $S = \operatorname{Spec} B$: il existe un sous-anneau B_0 de B, de type fini sur **Z**, tel que X provienne par changement de base d'un schéma X_0 de type fini sur $S_0 = \operatorname{Spec} B_0$. On peut donc écrire $X = \varprojlim X_i$, où les X_i sont de type fini sur des schémas affines de type fini S_i (avec $S = \varprojlim S_i$); en particulier, les X_i sont eux-mêmes de type fini sur Spec **Z**. Si $p > 2$, on a $cd_p(X_{i,\acute{e}t}) < \infty$ pour tout i d'après [SGA4, X, 6.2]. Supposons que $p = 2$. Si X est ordonnable, c'est le cas de tout Y tel qu'il existe un morphisme $X \to Y$: on a alors $cd_2(Y) = \infty$, donc il est clair que X n'est pas 2-uniforme. Supposons X non ordonnable. Soient $(U_0^{(j)})$ un recouvrement ouvert fini de X_0 par des ouverts affines $U_0^{(j)} = \operatorname{Spec} R_0^{(j)}$, et $U^{(j)} = \operatorname{Spec} R^{(j)}$ (resp. $U_i^{(j)} = \operatorname{Spec} R_i^{(j)}$) le recouvrement de X (resp. de X_i) qui s'en déduit par changement de base. Par hypothèse, aucun des corps résiduels des $R^{(j)}$ n'est ordonnable. D'après [CT, lemme 1], -1 est somme de carrés dans chacun des $R^{(j)}$. Il existe donc i_0 tel que -1 soit somme de carrés dans $R_i^{(j)}$ pour tout $i \geqslant i_0$. Pour $i \geqslant i_0$, les X_i ne sont donc pas ordonnables, d'où $cd_2(X_{i,\acute{e}t}) < \infty$ d'après [SGA4 X 6.2]. □

N.B. Je remercie Jean-Louis Colliot-Thélène de m'avoir indiqué la référence [CT].

4. *Démonstration de* (2). Elle procède exactement comme celle de (1). On doit montrer que ${}_{T}d_2^{-2,n+1}$ est nulle et que ${}_{T}d_2^{-3,n+2}$ est surjective; comme un schéma affine est p-uniforme (prop. 3.2.1), le lemme 3.2.1 réduit à montrer que ${}_{T}d_2^{-3,n+2}$ et ${}_{T}d_2^{-4,n+2}$ sont surjectives. Cela se démontre comme au §2, en utilisant la nullité du bord $\delta = d^{(n)} \otimes 1$ en degré n.

Remarque 4.1. Contrairement à la démonstration de (1), la démonstration de (2) donnée ci-dessus repose sur un argument de finitude qui fait implicitement intervenir des propriétés arithmétiques profondes (corps de classes). Les démonstrations "élémentaires" (i.e. sans suites spectrales) de (2) dans des cas particuliers ([Sue], [Sa], [Me1], [Me2], [Kθ]) ne procèdent pas du tout de cette manière. Existe-t-il une façon d'éviter l'argument de finitude en général?

II. Démonstration du théorème 2.

5. *Définition des produits.*

(5.1). Pour $i \in \mathbf{Z}$, notons (p, i) le complexe de faisceaux $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(i)[-1]$ sur $X_{\acute{e}t}$, c'est-à-dire $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(i)$ placé en degré 1. Pour $n \in \mathbf{Z}$, le groupe $H^n(X_{\acute{e}t}, (p, i))$ s'identifie donc à $H^{n-1}(X_{\acute{e}t}, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(i))$; ce groupe sera simplement noté $H^n(X, i)$. *Exception*: on convient que $H^0(X, 0) = \mathbf{Z}$ (et non pas 0).

Supposons $i = 0$: la suite exacte $0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0$ induit des bords $H^n(X, 0) \to H^n(X, \mathbf{Z})\{p\}$. Si X est *normal*, on a $H^n(X, \mathbf{Q}) = 0$ pour tout $n > 0$ [De, (2.1)]; les bords ci-dessus sont donc des isomorphismes pour $n > 1$ (ainsi que pour $n = 0$ par convention, mais pas pour $n = 1$). Plus généralement, posons $\mathbf{Z}(1) = \mathbf{G}_m[-1]$ et, pour $i \geqslant 1$, $\check{\mathbf{Z}}(i) = \mathbf{Z}(1)^{\overset{L}{\otimes} i}$, *cf* [K3]; alors on a un morphisme naturel $(p, i) \to \check{\mathbf{Z}}(i)$, donc des homomorphismes naturels $H^n(X, i) \to H^n(X, \check{\mathbf{Z}}(i))$.

Pour $i, j \in \mathbf{Z}$, on a un isomorphisme (dans la catégorie dérivée):

$$(p, i) \overset{\mathrm{L}}{\otimes} (p, j) \cong (p, i + j),$$

donné par la relation $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(i) \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(j) = 0$ et l'identification canonique $\mathbf{Tor}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(i), \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(j)) \cong \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(i + j)$. D'où des cup-produits:

$$\mathrm{H}^m(\mathrm{X}, i) \otimes \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, j) \to \mathrm{H}^{m+n}(\mathrm{X}, i + j), (m, i), (n, j) \neq (0, 0),$$

que l'on étend trivialement au cas $(m, i) = (0, 0)$ ou $(n, j) = (0, 0)$. Ces cup-produits sont associatifs, commutatifs en i et j, anticommutatifs en m et n. En voici une description concrète, en termes des groupes $\mathrm{H}^{m-1}(\mathrm{X}_{\acute{e}t}, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(i))$ et $\mathrm{H}^{n-1}(\mathrm{X}_{\acute{e}t}, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(j))$. Convenons de noter $\beta^{(i)}$ les isomorphismes $\mathrm{H}^{m-1}(\mathrm{X}_{\acute{e}t}, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(i)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}^m(\mathrm{X}, i)$ $(m \geqslant 1)$ et les composés $\mathrm{H}^{m-1}(\mathrm{X}_{\acute{e}t}, \mathbf{Z}/p^r(i)) \to \mathrm{H}^{m-1}(\mathrm{X}_{\acute{e}t}, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(i)) \to \mathrm{H}^m(\mathrm{X}, i)$, et de même pour j.

Soient $x \in \mathrm{H}^m(\mathrm{X}, i)$, $y \in \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, j)$, et x', y' leurs préimages par $\beta^{(i)}$ et $\beta^{(j)}$. Il existe $r \geqslant 1$ et $(x_r, y_r) \in \mathrm{H}^{m-1}(\mathrm{X}_{\acute{e}t}, \mathbf{Z}/p^r(i)) \times \mathrm{H}^{n-1}(\mathrm{X}_{\acute{e}t}, \mathbf{Z}/p^r(j))$ tel que $x' = \imath_* x_r$, $y' = \imath_* y_r$, où $\imath_*$ est induit par les plongements $\mathbf{Z}/p^r(i) \hookrightarrow \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(i)$ et $\mathbf{Z}/p^r(j) \hookrightarrow \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(j)$. Soit $\bar{\beta}^{(j)}$ le bord associé à la suite exacte $0 \to \mathbf{Z}/p^r(j) \to \mathbf{Z}/p^{2r}(j) \to \mathbf{Z}/p^r(j) \to 0$. Alors on a:

$$x \cdot y = \beta^{(i+j)}(x_r \cdot \bar{\beta}^{(j)} y_r).$$

Cette formule montre que, pour $i = j = 0$, ce produit est compatible au cup-produit à coefficients entiers (plus généralement, il est compatible au cup-produit à coefficients $\mathbf{Z}(i)$ et $\mathbf{Z}(j)$, puisque le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (p, i) \overset{\mathrm{L}}{\otimes} (p, j) & \longrightarrow & (p, i + j) \\ \big\downarrow{\scriptstyle\beta} & & \big\downarrow{\scriptstyle\beta} \\ \check{\mathbf{Z}}(i) \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \check{\mathbf{Z}}(j) & \longrightarrow & \check{\mathbf{Z}}(i + j) \end{array}$$

est évidemment commutatif).

(5.2). Il est clair que le théorème 2 est conséquence de l'énoncé suivant, plus précis:

THÉORÈME 5.2. *Soit* R *un anneau semi-local connexe, non exceptionnel si* $p = 2$, *et tel que* $u_{n-1}(\mathrm{S})$ *et* $u_{m-1}(\mathrm{S})$ *soient surjectifs pour toute extension p-cyclotomique* S *de* R. *Alors, pour* $(i, j) \in \mathbf{Z}$, *le cup-produit*

$$\mathrm{H}^m(\mathrm{R}, i) \otimes \mathrm{H}^n(\mathrm{R}, j) \to \mathrm{H}^{m+n}(\mathrm{R}, i + j)$$

est identiquement nul, sauf peut-être si $m + n = i + j + 2$.

Remarque 5.2. Notons $\Gamma(i)$ le i-ème complexe "motivique" conjectural de Beilinson-Lichtenbaum ([Be], [Li]), vu dans le site étale. Une conséquences des "axiomes" que doivent vérifier ces complexes est l'existence d'un triangle (dans la catégorie dérivée)

$$(p, i) \to \Gamma(i) \to \Gamma(i) \otimes \mathbf{Z}[1/p] \to (p, i)[-1].$$

Dans ce triangle, le morphisme $(p, i) \to \Gamma(i)$ doit s'obtenir comme le composé du morphisme $(p, i) \to \check{\mathbf{Z}}(i)$ ci-dessus et d'un morphisme $\check{\mathbf{Z}}(i) \to \Gamma(i)$ provenant du produit conjecturé $\Gamma(i) \otimes \Gamma(j) \to \Gamma(i+j)$. Les théorèmes 2 et 5.2 donnent donc des renseignements sur la torsion de la cohomologie motivique (on notera que les "axiomes" auxquels sont subordonnés les $\Gamma(i)$ entraînent en particulier la conjecture de Kato).

6. *Démonstration du théorème* 5.2.

(6.1). Supposons d'abord $\mu_{p^\infty} \subset \mathrm{R}$. La surjectivité de u_{n-1} et u_{m-1} entraîne alors que $\mathrm{H}^m(\mathrm{R}, i)$ et $\mathrm{H}^n(\mathrm{R}, j)$ sont divisibles, et le théorème est trivial. Dans toute la suite de la démonstration, on suppose $\mu_{p^\infty} \not\subset \mathrm{R}$, et on note v le plus grand entier tel que $\mu_{p^v} \subset \mathrm{R}$.

(6.2) *Préliminaires cyclotomiques.* Soit $\eta = \operatorname{Spec} \mathrm{F}$ un point générique de $\mathrm{X} = \operatorname{Spec} \mathrm{R}$, et soit $\bar{\eta}$ un point géométrique de X au-dessus de η. On note $\mathrm{G_R}$ le groupe fondamental $\pi_1(\mathrm{X}, \bar{\eta})$. Soit $\mathrm{R}' = \mathrm{R}[\mu_{p^\infty}]$: c'est une extension étale, galoisienne de R. L'action de $\mathrm{G_R}$ sur μ_{p^∞} fournit un homomorphisme $\kappa_p\colon \mathrm{G_R} \to \operatorname{Aut}(\mu_{p^\infty}) = \mathbf{Z}_p^*$: c'est le *caractère cyclotomique*.

Supposons $v \geqslant 1$, et $v \geqslant 2$ si $p = 2$. On a donc $\kappa_p(\mathrm{G_R}) = 1 + p^v\mathbf{Z}_p$ et, pour $r \geqslant v$, $\kappa_p(\mathrm{G_R})^{p^{r-v}} = 1 + p^r\mathbf{Z}_p$. Pour $r \geqslant v$, on définit une fonction $\theta_r\colon \mathrm{G_R} \to \mathbf{Z}/p^r$ par

$$\theta_r(s) = \frac{\kappa_p(s)^{p^{r-v}} - 1}{p^r} (mod\ p^r).$$

Pour $r \leqslant v$, on pose $\theta_r(s) = ((\kappa_p(s) - 1)/p^v)\ (mod\ p^r)$.

LEMME 6.2.1. (a) *θ_r est un caractère de $\mathrm{G_R}$, d'ordre p^r; il définit donc un élément de $\mathrm{H}^1(\mathrm{R}, \mathbf{Z}/p^r)$, d'ordre p^r.*

(b) *Si $r \geqslant r'$, le composé $\mathrm{G_R} \xrightarrow{\theta_r} \mathbf{Z}/p^r \to \mathbf{Z}/p^{r'}$ est égal à $\theta_{r'}$.*

(c) *Pour $a \in \mathbf{Z}$, on a $(\kappa_p(s)^{ap^{r-v}} - 1)/p^r = a\theta_r(s)\ (mod\ p^r)$.*

(d) *Soit S une extension p-cyclotomique finie de R. Alors, pour tout $r \geqslant 1$, on a $\theta_{r,\mathrm{R}} = f_*(\theta_{r,\mathrm{S}})$, où f_* est l'image directe ("corestriction") en cohomologie correspondant au revêtement $f\colon \operatorname{Spec} \mathrm{S} \to \operatorname{Spec} \mathrm{R}$.*

Démonstration. (a) Supposons d'abord $r \geqslant v$. Pour $s, t \in \mathrm{G_R}$, on a:

$$\theta_r(st) - \theta_r(s) - \theta_r(t) = \frac{\kappa_p(s)^{p^{r-v}}\kappa_p(t)^{p^{r-v}} - \kappa_p(s)^{p^{r-v}} - \kappa_p(t)^{p^{r-v}} + 1}{p^r}$$

$$\equiv p^r \frac{\kappa_p(s)^{p^{r-v}} - 1}{p^r} \cdot \frac{\kappa_p(t)^{p^{r-v}}}{p^r} \equiv 0\ (mod\ p^r);$$

ceci montre que θ_r est un homomorphisme, et il est évidemment continu. Choisissons s tel que $\kappa_p(s) = exp(p^\nu)$: c'est possible puisque $exp(p^\nu) \in 1 + p^\nu \mathbf{Z}_p$. On a alors:

$$\theta_r(s) \equiv \frac{exp(p^r) - 1}{p^r} \equiv 1 \ (mod\ p),$$

ce qui montre que θ_r est d'ordre p^r. Le cas $r \leqslant \nu$ résulte du cas $r = \nu$ et d'une réduction modulo p^r.

(b) Si $r \leqslant \nu$, c'est évident. Supposons $r > \nu$ et $r' = r - 1$: il suffit de démontrer que, si $\beta \in 1 + p^{r-1}\mathbf{Z}_p$, on a $\beta^p - 1 \equiv p(\beta - 1)\ (mod\ p^{2r-1})$ (on applique ensuite ceci à $\beta = \kappa_p(s)^{p^{r-\nu-1}}$ pour $s \in \mathrm{G_R}$). Cela résulte de la formule du binôme (et de l'hypothèse $\nu \geqslant 2$ si $p = 2$). Le cas général s'ensuit.

(c) Cela résulte de la formule $(u^a - 1)/p^r = (u - 1)/p^r \cdot (1 + u + \cdots + u^{a-1})$ pour $u = \kappa_p(s)^{p^{r-\nu}}$, et du fait que $u \equiv 1\ (mod\ p^r)$.

(d) Soit ν' le plus grand entier tel que $\mu_{p^{\nu'}} \subset \mathrm{S}$ (les hypothèses entraînent que $\nu' < \infty$). Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{G_S} & \xrightarrow{\kappa_p} & 1 + p^{\nu'}\mathbf{Z}_p \\ {\scriptstyle \mathrm{Ver}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Ver}} \\ \mathrm{G_R} & \xrightarrow{\kappa_p} & 1 + p^{\nu}\mathbf{Z}_p \end{array}$$

est commutatif, où Ver désigne le transfert en théorie des groupes. Soit $\bar\theta_r$: $1 + p^\nu \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}/p^r$ l'homomorphisme par lequel se factorise θ_r: comme $f_*(\theta_{r,\mathrm{S}})(s) = \theta_{r,\mathrm{S}}(\mathrm{Ver}\ s)$, il suffit de voir que $\bar\theta_{r,\mathrm{R}}(u) = \bar\theta_{r,\mathrm{S}}(\mathrm{Ver}\ u)$ pour tout $u \in 1 + p^\nu \mathbf{Z}_p$. Mais c'est évident, puisque l'on a $\mathrm{Ver}\ u = u^{p^{\nu'-\nu}}$ (en utilisant au besoin (b) et (c)). □

LEMME 6.2.2. *Supposons le faisceau* $\mathbf{Z}/p^r(j - n + 1)$ *constant sur* Spec R. *Alors pour tout* $y \in \mathrm{H}^{n-1}(\mathrm{R}, \mathbf{Z}/p^r(j))$, *on a* $\bar\beta^{(j)}y = ((j - n + 1)/p^{r-\nu})\theta_r \cdot y$.

(Si $r \leqslant \nu$, l'expression $(j - n + 1)/p^{r-\nu}$ signifie $p^{\nu-r}(j - n + 1)$.)

En effet, la surjectivité de u_{n-1} entraîne que le bord $\bar\beta^{(n-1)}$ est nul en degré $n - 1$. D'après la proposition A3.1, on a donc $\bar\beta^{(j)}y = \bar\beta^{(j)}y - \bar\beta^{(n-1)}y = \theta \cdot y$, où θ est l'image dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{R}, \mathbf{Z}/p^r)$ de l'élément de $\mathbf{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\mathbf{Z}/p^r(j), \mathbf{Z}/p^r(j))$ correspondant à la différence des classes des deux extensions $\mathbf{Z}/p^r(j) \to \mathbf{Z}/p^{2r}(j) \to \mathbf{Z}/p^r(j)$ et $\mathbf{Z}/p^r(j) \to \mathbf{Z}/p^{2r}(n - 1) \to \mathbf{Z}/p^r(j)$. Or cet élément se calcule ainsi: si $s \in \mathrm{G_R}$ et $a \in \mathbf{Z}/p^r(j)$, $\theta(s)a = p^{-r}(\alpha'(s)^{-1}\alpha(s)(\tilde a) - \tilde a)$, où $\tilde a$ est un représentant de a dans $\mathbf{Z}/p^{2r}$ et α, α' sont les actions de $\mathrm{G_R}$ sur $\mathbf{Z}/p^{2r}$ données par les twists par j et $n - 1$ respectivement. On a:

$$\alpha(s)(\tilde a) = \kappa_p(s)^j \tilde a, \qquad \alpha'(s)(\tilde a) = \kappa_p(s)^{n-1}\tilde a,$$

d'où

$$\alpha'(s)^{-1}\alpha(s)(\tilde a) - \tilde a = (\kappa_p(s)^{j-n+1} - 1)\tilde a.$$

Supposons $r \geqslant v$. L'hypothèse du lemme implique que p^{r-v} divise $j-n+1$. Vu le lemme 6.2.1(c), on a:

$$\theta(s)a = p^{-r}(\alpha'(s)^{-1}\alpha(s)(\tilde{a}) - \tilde{a}) = \frac{j-n+1}{p^{r-v}}\theta_r(s)\tilde{a} = \frac{j-n+1}{p^{r-v}}\theta_r(s)a.$$

En faisant $a = 1$, on trouve bien $\theta = ((j-n+1)/p^{r-v})\theta_r$. Le cas $r \leqslant v$ se traite de même. □

(6.3). Soit $(x, y) \in \mathrm{H}^m(\mathrm{R}, i) \times \mathrm{H}^m(\mathrm{R}, i)$: on veut montrer que $x \cdot y = 0$. Comme en (5.1), on peut trouver $r \geqslant 1$ et $(x_r, y_r) \in \mathrm{H}^{m-1}(\mathrm{R}, \mathbf{Z}/p^r(i)) \times \mathrm{H}^{n-1}(\mathrm{R}, \mathbf{Z}/p^r(j))$ tel que $x = \beta^{(i)}x_r$, $y = \beta^{(j)}y_r$; on a alors $x \cdot y = \beta^{(i+j)}(x_r \cdot \bar{\beta}^{(j)}y_r)$. Pour montrer que cette expression est nulle, on va procéder en deux étapes.

(6.3a). *Cas où* $\mathbf{Z}/p^r(j-n+1)$ *et* $\mathbf{Z}/p^r(i-m+1)$ *sont constants sur* Spec R. En appliquant le lemme 6.2.1, on trouve:

$$x \cdot y = \frac{j-n+1}{p^{r-v}}\beta^{(i+j)}(x_r \cdot \theta_r \cdot y_r).$$

Si l'on applique le même lemme en échangeant x et y, on obtient:

$$y \cdot x = \frac{i-m+1}{p^{r-v}}\beta^{(i+j)}(y_r \cdot \theta_r \cdot x_r).$$

Or on a $y \cdot x = (-1)^{mn} x \cdot y$ et

$$\begin{aligned} y_r \cdot \theta_r \cdot x_r &= (-1)^{n-1}\theta_r \cdot y_r \cdot x_r = (-1)^{n-1+(n-1)(m-1)}\theta_r \cdot x_r \cdot y_r \\ &= (-1)^{n-1+(n-1)(m-1)+(m-1)} x_r \cdot \theta_r \cdot y_r = (-1)^{nm-1} x_r \cdot \theta_r \cdot y_r. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a:

(F)
$$\left(\frac{i-m+1}{p^{r-v}} + \frac{j-n+1}{p^{r-v}}\right)\beta^{(i+j)}(x_r \cdot \theta_r \cdot y_r) = \frac{i+j-m-n+2}{p^{r-v}}\beta^{(i+j)}(x_r \cdot \theta_r \cdot y_r) = 0.$$

Supposons maintenant que $m + n \neq i + j + 2$, et soit $w = v_p(i + j + 2 - m - n)$. D'après (F), on a $p^w \beta^{(i+j)}(x_r \cdot \theta_r \cdot y_r) = 0$. Soit $\mathrm{S} = \mathrm{R}(\mu_{p^{r+w}})$; notons $f\colon \mathrm{Spec}\,\mathrm{S} \to \mathrm{Spec}\,\mathrm{R}$ le revêtement correspondant et π_* l'homomorphisme induit en cohomologie par la projection $\mathbf{Z}/p^{r+w} \to \mathbf{Z}/p^r$. D'après le lemme 6.2.1(b) et (d), on a $\theta_{r,\mathrm{R}} = f_*(\pi_* \theta_{r+w,\mathrm{S}})$, donc:

$$\beta^{(i+j)}(x_r \cdot \theta_{r,\mathrm{R}} \cdot y_r) = f_*(\beta^{(i+j)}(f^* x_r \cdot \pi_* \theta_{r+w,\mathrm{S}} \cdot f^* y_r)).$$

Mais il résulte de la surjectivité de u_{n-1} et de u_{m-1}, et du fait que $\mu_{p^{r+w}} \subset$ S, que l'on peut trouver $(x', y') \in H^{m-1}(S, \mathbf{Z}/p^{r+w}(i)) \times H^{n-1}(S, \mathbf{Z}/p^{r+w}(j))$ tel que $f^*x_r = \pi_* x'$, $f^*y_r = \pi_* y'$. On en déduit:

$$\beta^{(i+j)}(x_r \cdot \theta_{r,R} \cdot y_r) = f_*(\beta^{(i+j)}(\pi_*(x' \cdot \theta_{r+w,S} \cdot y'))) = f_*(p^w \beta^{(i+j)}(x' \cdot \theta_{r+w,S} \cdot y')),$$

puisque $\beta^{(i+j)} \circ \pi_* = p^w \beta^{(i+j)}$. En appliquant (F) à S, x' et y', on trouve donc $\beta^{(i+j)}(x_r \cdot \theta_r \cdot y_r) = 0$, d'où $x \cdot y = 0$.

(6.3b) *Cas général.* On peut supposer que $m + n \neq i + j + 2$. Par l'argument de transfert standard, on se ramène au cas où $v \geqslant 1$. Les extensions $R(\mathbf{Z}/p^r(j - n + 1))$ et $R(\mathbf{Z}/p^r(i - m + 1))$ sont alors emboîtées; appelons S la plus grande, que l'on peut supposer sans perte de généralité être $R(\mathbf{Z}/p^r(j - n + 1))$. Si S = R, il n'y a rien à démontrer. Supposons S $\neq$ R: le théorème 1, (2) implique qu'il existe $y' \in H^{n-1}(S, \mathbf{Z}/p^{r+w}(j))$ tel que $y_r = \mathrm{Cor}_{S/R} y'$; si $p = 2$, quitte à augmenter r, on peut même supposer que $\mu_4 \subset$ S (cela résulte de la non exceptionalité de R et du fait que $S \neq R \Rightarrow j - n + 1 \neq 0$). On a alors:

$$x \cdot y = \beta^{(i+j)}(x_r \cdot \bar{\beta}^{(j)} y_r) = \mathrm{Cor}_{S/R} \beta^{(i+j)}(x' \cdot \bar{\beta}^{(j)} y'),$$

où $x' = \mathrm{Res}_{S/R} x_r$. D'après (6.3a), on a $\beta^{(i+j)}(x' \cdot \bar{\beta}^{(j)} y') = 0$, donc $x \cdot y = 0$. □

III. Deux autres applications.

7. *Une suite exacte en cohomologie galoisienne.*

THÉORÈME 7.1. *Soient* F *un corps commutatif, n un entier inversible dans* F *et* E/F *une extension cyclique de degré n. Si n est divisible par* 4, *supposons que* F *ne soit pas exceptionnel. Alors on a une suite exacte*:

$$H^2(E, \mu_n^{\otimes 2}) \xrightarrow{\mathrm{Cor}} H^2(F, \mu_n^{\otimes 2}) \xrightarrow{\chi} H^3(F, \mu_n^{\otimes 2}),$$

où χ *est un caractère de* G_F *de noyau* G_E.

Ce théorème est démontré dans [MS1] lorsque n est sans facteurs carrés ou $\mu_n \subset$ F (cor. 15.3). On va l'étendre ici au cas général. D'après *loc. cit.*, la suite

$$H^2(F, \mu_n^{\otimes 2}) \oplus H^1(F, \mu_n^{\otimes 2}) \xrightarrow{(\chi, \bar{\beta}\chi)} H^3(F, \mu_n^{\otimes 2}) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^3(E, \mu_n^{\otimes 2})$$

est exacte. Le théorème 7.1 résulte donc immédiatement du lemme suivant.

LEMME 7.1. *Pour tout* $x \in H^1(F, \mu_n^{\otimes 2})$, *il existe* $y \in H^2(F, \mu_n^{\otimes 2})$ *tel que* $\bar{\beta}\chi \cdot x = \chi \cdot y$.

En effet, on se ramène d'abord au cas où n est une puissance p^r d'un mombre premier p. D'après le théorème 1, (2) (appliqué avec $n = 1$, $A = \mathbf{Z}/p^r$), on peut écrire $\chi = \mathrm{Cor}_{K/F} \psi$, où $K = F(\mu_{p^r})$ et $\psi \in H^1(K, \mathbf{Z}/p^r)$. D'après le lemme 6.2.2, on a

$\bar{\beta}\psi = \psi\cdot\theta$ pour un caractère θ convenable de G_K, invariant par $Gal(K/F)$. On a donc:

$$\bar{\beta}\chi\cdot x = (\mathrm{Cor}_{K/F}\bar{\beta}\psi)\cdot x = \mathrm{Cor}_{K/F}(\bar{\beta}\psi\cdot \mathrm{Res}_{K/F}x) = \mathrm{Cor}_{K/F}(\psi\cdot\theta\cdot\mathrm{Res}_{K/F}x).$$

L'élément $\theta\cdot\mathrm{Res}_{K/F}x$ de $H^2(K, \mu_{p^r}^{\otimes 2})$ est invariant sous l'action de $Gal(K/F)$: en appliquant le théorème 1, (1) (avec $n = 1$, $A = \mu_{p^r}^{\otimes 2}$), on voit qu'il existe $y \in H^2(F, \mu_{p^r}^{\otimes 2})$ tel que $\theta\cdot\mathrm{Res}_{K/F}x = \mathrm{Res}_{K/F}y$. On a alors:

$$\mathrm{Cor}_{K/F}(\psi\cdot\theta\cdot\mathrm{Res}_{K/F}x) = \mathrm{Cor}_{K/F}(\psi\cdot\mathrm{Res}_{K/F}y) = (\mathrm{Cor}_{K/F}\psi)\cdot y = \chi\cdot y. \quad \square$$

Remarque 7.1. Contrairement à ce qui est affirmé en *loc. cit.*, il n'est pas vrai en général que $\bar{\beta}\chi$ lui-même soit divisible par χ.

8. *Un lemme chinois en cohomologie étale.*

THÉORÈME 8.1. *Soit* R *un anneau semi-local dans lequel le nombre premier p est inversible. Si $p = 2$, on suppose que* R *n'est pas exceptionnel. Soient $k_1, \ldots, k_r$ les corps résiduels de* R. *Soit $n \geqslant 1$; supposons que le symbole galoisien u_n soit surjectif pour les k_j et leurs extensions finies. Alors, pour tout faisceau constant tordu* A *sur* $(\mathrm{Spec}\ R)_{ét}$, *de fibre géométrique $\mathbf{Z}/p^r$, l'application naturelle* $H^n(R_{ét}, A) \to \bigoplus H^n(k_j, A)$ *est surjective.*

Démonstration. Supposons d'abord $n = 1$, et $A = \mu_{p^r}$. Par la théorie de Kummer, l'application du théorème n'est autre que $R^*/R^{*p^r} \to \bigoplus k_j^*/k_j^{*p^r}$, qui est surjective d'après le lemme chinois classique. Si n est quelconque et que u_n est surjectif pour les k_j, on en déduit que l'énoncé du théorème est vrai pour $A = \mathbf{Z}/p^r(n)$. Le cas général résulte de ce cas particulier appliqué à $S = R(A(-n))$ et du théorème 1 (2).

APPENDICES

A1. La conjecture de Kato généralisée. Pour la validité de la conjecture de Kato généralisée, il est peut-être nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires sur R (toutefois (0.6.1), (0.6.7), et remarque A1.1). M'inspirant de la terminologie de Sherman [Sh], je propose la définition suivante.

Définition A1. Un anneau semi-local R est très propre modulo p s'il vérifie la conjecture de Gersten pour la K-théorie à coefficients $\mathbf{Z}/p^r$ ($r \geqslant 1$) [Q, §5] et le théorème de Bloch-Ogus [BO] pour la cohomologie étale à coefficients p-primaires.

Par exemple, un semi-localisé d'une algèbre régulière de type fini sur un corps est très propre modulo p pour chaque p inversible, d'après [Q, th. 5.11] et [BO] (la démonstration de [Q, th. 5.11] s'applique *mutatis mutandis* à la K-théorie à coefficients). Un semi-localisé d'un anneau régulier lisse sur un anneau de valuation discrète est très propre modulo p dans les mêmes conditions que ci-dessus (Gillet-

Levine [GL] pour la conjecture de Gersten, Gillet [non publié] pour le théorème de Bloch-Ogus). On conjecture que tout anneau semi-local régulier est très propre (au sens de [Sh]); c'est partiellement démontré dans un certain nombre de cas particuliers. On a l'extension suivante de la conjecture de Kato ([K2, conj. 2]).

CONJECTURE A1. *La conjecture de Kato généralisée vaut pour tout anneau semi-local très propre modulo p.*

Remarque A1.1. Marc Levine [Le] conjecture que la conjecture de Kato généralisée vaut pour tout anneau semi-local contenant un corps infini. On peut être encore plus optimiste et conjecturer qu'elle vaut pour tout anneau semi-local dont les corps résiduels sont assez gros (par exemple infinis). En fait, il est probable qu'il faut modifier légèrement la définition de la K-théorie de Milnor d'un anneau semi-local dont un corps résiduel est "trop petit" (remarque A1.4).

Dans cet appendice, on donne un argument déduisant dans certains cas la conjecture de Kato généralisée pour un anneau semi-local de la même pour certains de ses corps résiduels, pourvu que p soit assez grand. On considère deux cas: celui d'un anneau très propre modulo p et celui d'un anneau hensélien.

(a). *Cas d'un anneau semi-local très propre modulo p.*

THÉORÈME A1.1. *Soit* R *un anneau semi-local très propre modulo p au sens de la définition* A1 (*où p est un nombre premier inversible dans* R), *vérifiant la condition* H1 *de Guin* [G], *et soit n un entier* $\leqslant p$.

(a) *Supposons la conjecture de Kato* (*modulo p*) *vérifiée en degré n par le corps des fractions de* R *et en degré* $n-1$ *par les corps résiduels en ses idéaux premiers de hauteur* 1. *Alors la conjecture de Kato généralisée* (*modulo p*) *vaut pour* R *en degré n.*

(b) *Supposons la conjecture de Kato généralisée* (*modulo p*) *vérifiée en degré n par* R, *en degré* $n-1$ *par les corps résiduels de* R *en ses idéaux premiers de hauteur* 1, *et en degré* $n-2$ *par ses corps résiduels en ses idéaux premiers de hauteur* 2. *Alors la conjecture de Kato* (*modulo p*) *vaut en degré n pour le corps des fractions de* R.

La condition H1 de [G] est en particulier vérifiée lorsque tous les corps résiduels de R sont infinis. La démonstration montrera en fait que pour p quelconque (inversible dans R), le noyau et le conoyau du symbole galoisien sont annulés par $(n-1)!$

Notons E le corps des fractions de R, $\mathrm{X} = \operatorname{Spec} \mathrm{R}$ et, pour tout $i \geqslant 0$, X_i l'ensemble des points de X de codimension i. Si x est un point de X, on note $k(x)$ le corps résiduel de R en x. La conjecture de Gerstein implique qu'on a pour tout $n \geqslant 0$ et tout $r \geqslant 1$ une suite exacte

$$0 \to \mathrm{K}_n(\mathrm{R}, \mathbf{Z}/p^r) \to \mathrm{K}_n(\mathrm{E}, \mathbf{Z}/p^r) \to \bigoplus_{x \in \mathrm{X}_1} \mathrm{K}_{n-1}(k(x), \mathbf{Z}/p^r) \to \cdots$$

$$\to \bigoplus_{x \in \mathrm{X}_i} \mathrm{K}_{n-i}(k(x), \mathbf{Z}/p^r) \to \cdots .$$

PROPOSITION A1.1. *Il existe un homomorphisme* ϕ: $K_n(R, Z/p^r) \to K_n^M(R)/p^r$, *naturel en* R, *tel que le composé* $K_n^M(R)/p^r \to K_n(R)/p^r \to K_n(R, Z/p^r) \xrightarrow{\phi} K_n^M(R)/p^r$ *soit la multiplication par* $(-1)^{n-1}(n-1)!$

Pour tout groupe G, notons $H_*(G)$ l'homologie entière de G. D'après *loc. cit.*, théorème 2, l'homomorphisme de stabilisation $H_n(GL_n(R)) \to H_n(GL(R))$ est bijectif, et le quotient *coker* $(H_n(GL_{n-1}(R)) \to H_n(GL_n(R)))$ (noté abusivement $H_n(GL_n(R))/H_n(GL_{n-1}(R))$) est canoniquement isomorphe à $K_n^M(R)$; de plus, si l'on note ϕ l'homomorphisme

$$K_n(R) \xrightarrow{Hu} H_n(GL(R))(\xleftarrow{\cong})^{-1} H_n(GL_n(R)) \to$$

$$H_n(GL_n(R))/H_n(GL_{n-1}(R))(\xleftarrow{\cong})^{-1} K_n^M(R)$$

(où *Hu* est l'homomorphisme de Hurewicz), le composé $K_n^M(R) \to K_n(R) \xrightarrow{\phi} K_n^M(R)$ est la multiplication par $(-1)^{n-1}(n-1)!$ Finalement, on voit sur la définition de ϕ qu'il est naturel en R.

LEMME A1.1. (a) $H_n(GL_n(R), Z/p^r) \xrightarrow{\cong} H_n(GL(R), Z/p^r)$.

(b) *Le compose'*

$$K_n^M(R) \xrightarrow{\cong} H_n(GL_n(R))/H_n(GL_{n-1}(R)) \to H_n(GL_n(R), Z/p^r)/H_n(GL_{n-1}(R), Z/p^r)$$

induit un isomorphisme $K_n^M(R)/p^r \xrightarrow{\cong} H_n(GL_n(R), Z/p^r)/H_n(GL_{n-1}(R), Z/p^r)$.

Démonstration. (a) (resp. (b)) résulte du diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(GL_n(R))/p^r & \longrightarrow & H_n(GL_n(R), Z/p^r) & \longrightarrow & {}_{p^r}H_{n-1}(GL_n(R)) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\cong} & & \downarrow & & \downarrow{\cong} & & \\ 0 & \longrightarrow & H_n(GL(R))/p^r & \longrightarrow & H_n(GL(R), Z/p^r) & \longrightarrow & {}_{p^r}H_{n-1}(GL(R)) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(resp.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(GL_{n-1}(R))/p^r & \longrightarrow & H_n(GL_{n-1}(R), Z/p^r) & \longrightarrow & {}_{p^r}H_{n-1}(GL_{n-1}(R)) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\cong} & & \\ 0 & \longrightarrow & H_n(GL_n(R))/p^r & \longrightarrow & H_n(GL_n(R), Z/p^r) & \longrightarrow & {}_{p^r}H_{n-1}(GL_n(R)) & \longrightarrow & 0). \end{array}$$

La proposition A1.1 est maintenant claire en utilisant l'homomorphisme de Hurewicz "à coefficients Z/p^r":

$$K_n(R, Z/p^r) \xrightarrow{Hu} H_n(GL(R), Z/p^r).$$

PROPOSITION A1.2. *Soit* A *un anneau de valuation discrète, de corps des fractions* E *et de corps résiduel k. Soit p un nombre premier inversible dans* A. *Alors, pour tout* $n \geqslant 1$ *et tout* $r \geqslant 1$, *le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} K_n(E, \mathbf{Z}/p^r) & \xrightarrow{\partial} & K_{n-1}(k, \mathbf{Z}/p^r) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle (1-n)\phi} \\ K_n^M(E)/p^r & \xrightarrow{\partial} & K_{n-1}^M(k)/p^r \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. Quitte à remplacer A et E par leurs complétés, on peut les supposer complets. D'après Suslin [Su2, dém. du cor. 3.11], $K_*(E, \mathbf{Z}/p^r)$ est engendré additivement par $K_*(A, \mathbf{Z}/p^r)$ et par $\{\pi\} \cdot K_*(A, \mathbf{Z}/p^r)$, où π est une uniformisante de A et $\{\pi\}$ désigne sa classe dans $K_1(E, \mathbf{Z}/p^r)$ *via* l'homomorphisme $E^* = K_1(E) \to K_1(E, \mathbf{Z}/p^r)$. Il suffit donc de vérifier la commutativité du diagramme sur les éléments de la forme u et $\{\pi\} \cdot u$, où $u \in K_{n-1}(A, \mathbf{Z}/p^r)$. Pour le premier, on a d'une part $\partial u = 0$, donc $\phi(\partial u) = 0$, et d'autre part, par naturalité de ϕ, $\phi(u) \in Im(K_{n-1}^M(A)/p^r \to K_{n-1}^M(E)/p^r)$, donc $\partial\phi(u) = 0$. Pour le deuxième, on a d'une part $\partial(\{\pi\} \cdot u) = \bar{u}$, où $\bar{u}$ est l'image de u dans $K_{n-1}(k, \mathbf{Z}/p^r)$, donc $\phi(\partial(\{\pi\} \cdot u)) = \phi(\bar{u}) = \overline{\phi(u)}$. D'autre part,

$$\phi(\{\pi\} \cdot u) = (1 - n)\{\pi\}\phi(u)$$

(cela se démontre comme dans [Su3, §4]). Par conséquent, $\partial\phi(\{\pi\} \cdot u) = (1 - n)\partial(\{\pi\}\phi(u)) = (1 - n)\overline{\phi(u)}$. □

Remarque A1.2. Le même argument montre que, si A est d'égale caractéristique, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K_n(E) & \xrightarrow{\partial} & K_{n-1}(k) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle (1-n)\phi} \\ K_n^M(E) & \xrightarrow{\partial} & K_{n-1}^M(k) \end{array}$$

est commutatif. Je remercie A. Suslin de m'avoir expliqué l'argument dans ce cas.

LEMME A1.3. *La suite*

$$0 \to K_n^M(R)/p^r \to K_n^M(E)/p^r \to \bigoplus_{x \in X_1} K_{n-1}^M(k(x))/p^r \to \bigoplus_{x \in X_2} K_{n-2}^M(k(x))/p^r$$

est exacte pour $n \leqslant p$.

C'est évident à partir des prop. A1.1 et A1.2, en considérant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & K_n^M(R)/p^r & \to & K_n^M(E)/p^r & \to & \bigoplus_{x\in X_1} K_{n-1}^M(k(x))/p^r & \to & \bigoplus_{x\in X_2} K_{n-2}^M(k(x))/p^r \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to & K_n(R, \mathbf{Z}/p^r) & \to & K_n(E, \mathbf{Z}/p^r) & \to & \bigoplus_{x\in X_1} K_{n-1}(k(x), \mathbf{Z}/p^r) & \to & \bigoplus_{x\in X_2} K_{n-2}(k(x), \mathbf{Z}/p^r) \\
& \downarrow \phi & & \downarrow \phi & & \downarrow (1-n)\phi & & \\
& K_n^M(R)/p^r & \to & K_n^M(E)/p^r & \to & \bigoplus_{x\in X_1} K_{n-1}^M(k(x))/p^r. & &
\end{array}$$ □

Le théorème A1.1 résulte du lemme A1.3, en comparant sa suite exacte à la suite exacte de Bloch-Ogus correspondante, au moyen du symbole galoisien.

Remarque A1.3. Pour démontrer la partie (a) du théorème A1, il suffit de connaître l'exactitude de la suite du lemme A1.3 en ses deux premiers termes. On n'a donc pas besoin de la proposition A1.2 dans ce cas.

Remarque A1.4. Lorsque R ne vérifie pas la condition H1 de [G], le lemme A1.3 peut être en défaut au moins pour une définition naïve de sa K-théorie de Milnor, déjà pour $K_2^M(R)$. Prenons $R = \mathbf{F}_2[[T]]$, de corps des fractions $F = \mathbf{F}_2((T))$ et de corps résiduel $\mathbf{F}_2$. L'ensemble des $x \in R^*$ tels que $1 - x \in R^*$ est vide: on a donc $K_2^M(R) = R^* \otimes_{\mathbf{Z}} R^*$. L'élément $\{1 + T, 1 + T + T^2\}$ est d'ordre infini dans $K_2^M(R)$ alors qu'il est nul dans $K_2(F)$ (pour voir ceci, on peut appliquer la relation de Steinberg $\{x, 1 - x\} = 0$ dans $K_2(F)$ aux éléments $x = 1 + T + T^2$ et $1 + T^{-1} + T^{-2}$). Cette pathologie persiste si l'on introduit la relation $\{x, -x\} = 0$ dans la définition de $K_2^M(R)$. Par contre, je ne connais pas d'exemple de ce type qui mette en défaut la conjecture A1 (voir (b) ci-dessus).

Remarque A1.5. Si R est un anneau semi-local d'un schéma régulier sur un corps, le lemme A1.3 a été démontré par M. Rost et O. Gabber sans restriction sur n, à l'exception de l'exactitude en $K_n^M(R)/p^r$ (non publié). Plus précisément, Rost a démontré l'exactitude du complexe de type Gersten correspondant, sauf en $K_n^M(R)/p^r$ et $K_n^M(E)/p^r$, et Gabber a démontré de plus l'exactitude en $K_n^M(E)/p^r$. Pour un tel anneau, le théorème A1.1 s'applique donc sans restriction sur n, à l'exception de l'injectivité de $u_n(R)$ dans (a).

(b). *Cas d'un anneau local hensélien.*

THÉORÈME A1.2. *Soit* R *un anneau local hensélien, de corps résiduel k, et soit p un nombre premier inversible dans* R. *Alors, pour tout $n \geqslant 1$, la conjecture de Kato généralisée en degré n vaut modulo p pour* R *si et seulement si elle vaut pour k.*

Démonstration. Tout d'abord, on a $H^n(R, \mathbf{Z}/p^r(n)) \xrightarrow{\cong} H^n(k, \mathbf{Z}/p^r(n))$ par changement de base propre [SGA4 XII 5.5]; il suffit donc de démontrer que $K_n^M(R)/p^r \xrightarrow{\cong}$

$K_n^M(k)/p^r$. La surjectivité résulte de celle de $R^* \to k^*$. Pour l'injectivité, soit $Rel_n(R) = Ker(R^{*\otimes n} \to K_n^M(R))$ et de même pour k; il est clair que $Rel_n(R) \to Rel_n(k)$ est surjectif, ce qui ramène à montrer que $R^{*\otimes n}/p^r \to k^{*\otimes n}/p^r$ est injectif, *ie* que $Ker(R^{*\otimes n} \to k^{*\otimes n})$ est p-divisible. Cela résulte du cas $n = 1$ (hensélianité) et par récurrence du lemme suivant.

LEMME A1.4. *Soient* $A \to B$, $A' \to B'$ *deux morphismes surjectifs à noyaux p-divisibles. Alors* $Ker(A \otimes A' \to B \otimes B')$ *est p-divisible.*

En effet, soient N et N′ les noyaux des deux morphismes. On a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
N \otimes N' \arrow[r] \arrow[d] & N \otimes A' \arrow[r] \arrow[d] & N \otimes B' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
A \otimes N' \arrow[r] & A \otimes A' \arrow[r] & A \otimes B' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & B \otimes B' \arrow[d] & \\
 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

d'où une suite exacte $N \otimes A' \oplus A \otimes N' \to A \otimes A' \to B \otimes B' \to 0$. □

A2. Cohomologie étale et cohomologie galoisienne. Soient R un anneau semi-local connexe et p un nombre premier inversible dans R. On a un morphisme naturel de topoi $\phi\colon \tilde{X}_{ét} \to BG_R$ [SGA 4 IV 2.7]; si $\mathscr{F}$ est un faisceau abélien sur $X_{ét}$, on notera $H^*(R_{Gal}, \mathscr{F})$ les groupes $H^*(G_R, \phi\mathscr{F})$. On a des morphismes canoniques

$$\phi^*\colon H^*(R_{Gal}, \mathscr{F}) \to H^*(R_{ét}, \mathscr{F}),$$

et une suite spectrale

$$H^p(G_R, R^q\phi_*\mathscr{F}) \Rightarrow H^{p+q}(R_{ét}, \mathscr{F}).$$

Cette suite spectrale s'identifie à la suite spectrale de Hochschild-Serre attachée au revêtement universel de Spec R ([Mi, III.2.2.1].

Il est clair que l'image réciproque des faisceaux $\phi^*\colon \mathbf{BG}_R \to \tilde{X}_{ét}$ induit une équivalence de la catégorie des G_R-ensembles E tels que l'action de G_R sur E se factorise par un sous-groupe distingué ouvert sur celle des $X_{ét}$-faisceaux constants tordus, l'inverse étant donnée par ϕ_*. En particulier, $\phi_*\mathbf{Z}/p^n(i)$ s'identifie au G_R-module de groupe sous-jacent $\mathbf{Z}/p^n$, l'action étant donnée par la puissance i-ième du caractère cyclotomique.

THÉORÈME A2.1. *Soit $\mathscr{F}$ un faisceau abélien de torsion p-primaire, constant tordu sur* $X_{ét}$.

(i) *On a* $R^1\phi_*\mathscr{F} = 0$; ϕ^0 *et* ϕ^1 *sont bijectifs,* ϕ^2 *est injectif.*

(ii) *Soit* $n \geqslant 2$ *un entier tel que* u_i *(en p) soit surjectif pour* $i \leqslant n$ *pour toute extension étale de* R. *Alors, pour* $i \leqslant n$, $R^i\phi_*\mathscr{F} = 0$ *et* ϕ^i *est bijectif;* ϕ^{n+1} *est injectif.*

Démonstration. Les assertions sur les ϕ^i proviennent de celles sur les $R^i\phi_*\mathscr{F}$ *via* la suite spectrale. La bijectivité de ϕ^0 résulte immédiatement de la remarque qui précède l'énoncé du théorème A2.1. La bijectivité de ϕ^1 est bien connue dans le cas où $\mathscr{F}$ est constant ([SGA 4, VII, (2b)]); elle entraîne la nullité de $R^1\phi_*\mathscr{F}$ lorsque $\mathscr{F}$ est constant tordu, donc la bijectivité de ϕ^1 dans ce cas. Soit $\mathscr{C}$ la catégories des diagrammes

$$\begin{tikzcd} \bar{\eta} \arrow[r] \arrow[dr] & Y \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd}$$

où $Y = \operatorname{Spec} S$ est un revêtement étale, connexe, galoisien de X; on a $R^i\phi_*\mathscr{F} = \varinjlim_{\mathscr{C}} H^i(Y_{ét}, \mathscr{F})$. Pour calculer cette limite, on peut se borner aux Y "assez grands", donc supposer que $\mathscr{F}$ est constant sur Y et que $\mu_p \subset S$. On peut supposer $\mathscr{F}$ de type fini; par dévissage, on se ramène alors au cas où $\mathscr{F} = \mathbf{Z}/p$, ou mieux, $\mathscr{F} = \mathbf{Z}/p(i)$. La surjectivité de u_i implique alors que le cup-produit $H^1(Y_{ét}, \mathbf{Z}/p(1))^{\otimes i} \to H^i(Y_{ét}, \mathbf{Z}/p(i))$ est surjectif. Mais $\varinjlim_{\mathscr{C}} H^1(Y_{ét}, \mathbf{Z}/p(1)) = 0$, puisque toute extension kummérienne est étale; on a donc bien $\varinjlim_{\mathscr{C}} H^i(Y_{ét}, \mathbf{Z}/p(i)) = 0$. $\square$

Remarque A2.1. Il est probable que le résultat subsiste même lorsque la torsion de $\mathscr{F}$ n'est pas inversible dans R: si $\mathscr{F}$ est de torsion ℓ-primaire avec $\ell R = 0$, cela résulte de [SGA 4, X R/ℓ].

Remarque A2.2. Supposons R normal. Si la remarque A2.1 est correcte, elle s'étend à tous les faisceaux constants tordus (de torsion ou non): en effet, on se ramène au cas d'un faisceau constant, puis d'un faisceau constant de type fini, ce qui laisse à traiter le cas de $\mathscr{F} = \mathbf{Z}$. Mais il se ramène à celui de $\mathscr{F} = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ *via* la suite exacte $0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0$, en observant que les groupes uniquement divisibles $H^i(R, \mathbf{Q})$ sont nuls pour $i > 0$ [De, (2.1)].

A3. Bords et cup-produits. Cet appendice généralise le lemme 1 de [K1] à la cohomologie étale.

(A3.1). Soient A une catégorie abélienne et $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ deux objets de A. Les groupes $\mathbf{Ext}^i_{\mathsf{A}}(\mathscr{F}_2, \mathscr{F}_1)$ $(i \geqslant 0)$ sont définis comme groupes des classes d'extensions de Yoneda ([Mac], ch. III). Si $\mathscr{F}_3$ est un troisième objet de A et $j \geqslant 0$, on a un produit "de concaténation" (*ibid.*, §5):

$$\mathbf{Ext}^i_{\mathsf{A}}(\mathscr{F}_3, \mathscr{F}_2) \times \mathbf{Ext}^j_{\mathsf{A}}(\mathscr{F}_2, \mathscr{F}_1) \to \mathbf{Ext}^{i+j}_{\mathsf{A}}(\mathscr{F}_3, \mathscr{F}_1),$$

qu'on appellera *produit de Yoneda.*

Soit $x \in \mathrm{Ext}^1_{\mathsf{A}}(\mathscr{F}_2, \mathscr{F}_1)$: x correspond à une extension $0 \to \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}_2 \to 0$; d'où, pour tout objet $\mathscr{G} \in \mathsf{A}$, une longue suite exacte (*ibid.*):

$$\cdots \to \mathbf{Ext}^i_{\mathsf{A}}(\mathscr{G}, \mathscr{F}_1) \to \mathbf{Ext}^i_{\mathsf{A}}(\mathscr{G}, \mathscr{F}) \to \mathbf{Ext}^i_{\mathsf{A}}(\mathscr{G}, \mathscr{F}_2) \xrightarrow{d^i(x)} \mathbf{Ext}^{i+1}_{\mathsf{A}}(\mathscr{G}, \mathscr{F}_1) \to \cdots .$$

LEMME A3.1 ([Mac], ch. III, th. 9.1). *Le bord $d^i(x)$ est égal au produit de Yoneda à gauche par x.* □

(A3.2). Soient X un schéma et A la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur le site étale de X. Pour $\mathscr{F} \in \mathsf{A}$ et $i \geqslant 0$, on a $\mathrm{H}^i(\mathrm{X}_{\acute{e}t}, \mathscr{F}) = \mathbf{Ext}^i_{\mathsf{A}}(\mathbf{Z}, \mathscr{F})$. Pour $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2 \in \mathsf{A}$, on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{H}^1(\mathrm{X}_{\acute{e}t}, \mathscr{H\!O\!M}(\mathscr{F}_2, \mathscr{F}_1)) \xrightarrow{\iota} \mathbf{Ext}^1_{\mathsf{A}}(\mathscr{F}_2, \mathscr{F}_1) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{X}_{\acute{e}t}, \mathscr{E\!X\!T}(\mathscr{F}_2, \mathscr{F}_1)),$$

provenant de la suite spectrale des Ext. Soient $x \in \mathrm{H}^1(\mathrm{X}_{\acute{e}t}, \mathscr{H\!O\!M}(\mathscr{F}_2, \mathscr{F}_1))$ et $i \geqslant 0$. On a deux opérateurs $\mathrm{H}^i(\mathrm{X}_{\acute{e}t}, \mathscr{F}_2) \to \mathrm{H}^{i+1}(\mathrm{X}_{\acute{e}t}, \mathscr{F}_1)$:

(1) le cup-produit par x;

(2) le produit de Yoneda par $\iota(x)$.

En fait:

LEMME A3.2 ([Mi], ch V, prop. 1.20). *Les opérateurs* (1) *et* (2) *ci-dessus coïncident.* □

(A3.3). Soient $0 \to \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}_2 \to 0$ et $0 \to \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F}_2 \to 0$ deux extensions de $\mathscr{F}_2$ par $\mathscr{F}_1$; supposons que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ aient mêmes fibres géométriques. Les images de leurs classes $[\mathscr{F}]$ et $[\mathscr{F}'] \in \mathbf{Ext}^1_{\mathsf{A}}(\mathscr{F}_2, \mathscr{F}_1)$ dans $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}_{\acute{e}t}, \mathscr{E\!X\!T}(\mathscr{F}_2, \mathscr{F}_1))$ coïncident: la différence $[\mathscr{F}]-[\mathscr{F}']$ définit donc un élément x de $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_{\acute{e}t}, \mathscr{H\!O\!M}(\mathscr{F}_2, \mathscr{F}_1))$. Pour tout $i \geqslant 1$, notons $d^i(\mathscr{F})$ et $d^i(\mathscr{F}')$ les bords associés à $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ comme en (A3.1). En mettant ensemble les lemmes A3.1 et A3.2, on obtient:

PROPOSITION A3.1. *Avec les notations ci-dessus, la différence $d^i(\mathscr{F})-d^i(\mathscr{F}')$ est égale au cup-produit par x.* □

BIBLIOGRAPHIE

[BO] S. BLOCH ET A. OGUS, *Gersten's conjecture and the homology of schemes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 7 (1974), 181–201.

[Bl] S. BLOCH, *Lectures on Algebraic Cycles*, Duke Univ. Math. Ser. **4**, Duke Univ., Durham, N.C., 1980.

[BKτ] S. BLOCH ET K. KATO, *p-adic étale cohomology*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **63** (1986), 107–152.

[CL] J.-P. SERRE, *Corps locaux*, 2ème édition, Hermann, Paris, 1968.

[CG] ———, *Cohomologie galoisienne*, Lecture Notes in Math. **5**, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[CT] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, "Variantes du Nullstellensatz réel et anneaux formellement réels" dans *Colloque de géométrie algébrique réelle et formes quadratiques, Rennes, 1981*, Lecture Notes in Math. **959**, Springer-Verlag, Berlin, 1982, 98–108.

[De] C. DENINGER, *A proper base change theorem for non-torsion sheaves in étale cohomology*, J. Pure Appl. Algebra **50** (1988), 231–235.

[GL] H. GILLET ET M. LEVINE, *The relative form of Gersten's conjecture over a discrete valuation ring: the smooth case*, J. Pure Appl. Algebra **46** (1987), 59–71.

[Gr] A. GROTHENDIECK, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J. (2) **9** (1957), 119–221.

[G] D. GUIN, *Homologie du groupe linéaire et K-théorie de Milnor des anneaux*, J. Algebra **123** (1989), 27–59.

[Kθ] B. KAHN, "Les classes de Chern des représentations galoisiennes complexes" *in Représentations galoisiennes et classes caractéristiques*, these d'Etat, Univ. de Paris 7, 1987.

[K1] ———, *On the Scharlau transfer*, Rocky Mountain J. Math. **19** (1989), 741–747.

[K2] ———, "Some conjectures on the algebraic K-theory of fields, I: K-theory with coefficients and étale K-theory" *in Proceedings, Conference on Algebraic K-theory, Lake Louise, 1987*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci. **279**, Kluwer, Dordrecht, 1989, 117–176.

[K3] ———, "The decomposable part of motivic cohomology and bijectivity of the norm residue homomorphism" *in Actes du colloque de K-théorie de S. Margherita Ligure, 1989*, Contemp. Math. **126**, Amer. Math. Soc., Providence, 1992, 79–87.

[K4] ———, *Les classes de Chern des représentations galoisiennes complexes*, K-Theory **5** (1992), 555–566.

[K5] ———, *Étale K-theory of schemes of small cohomological dimension*, en préparation.

[Kτ] K. KATO, *A generalization of local class field theory by using K-groups, II*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **27** (1980), 603–683.

[Le] M. LEVINE, *Relative Milnor K-theory*, préprint, 1988.

[Li] S. LICHTENBAUM, *The construction of weight-two arithmetic cohomology*, Invent. Math. **88** (1987), 183–215.

[Mac] S. MAC LANE, *Homology*, Grundlehren Math. Wiss. Einzeld. **114**, Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[Me1] A. S. MERKURJEV, *Sur la torsion dans K_2 des corps*, en russe, Vestnik Leningrad Univ. Math. **1** (1988), 17–20.

[Me2] ———, *On the structure of the Brauer groups of fields*, en russe, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **49** (1985), 828–846, 895; trad. anglaise, Math. USSR-Izv. **27** (1986), 141–157.

[Mi] J. S. MILNE, *Étale Cohomology*, Princeton Math. Ser. **33**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1980.

[MS1] A. S. MERKURJEV AND A. A. SUSLIN, *K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism*, en russe, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), 1011–1046; trad. anglaise, Math. USSR-Izv. **21** (1983), 307–340.

[MS2] ———, *The norm residue homomorphism of degree three*, en russe, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **54** (1990), 339–356; trad. anglaise, Math. USSR-Izv. **36** (1991), 349–368.

[PW] C. PEDRINI ET C. WEIBEL, *Invariants of real curves*, préprint, 1991.

[Q] D. QUILLEN, "Higher algebraic K-theory I" *in Algebraic K-theory I: Higher K-theories, Proceedings, Seattle, 1972*, Lecture Notes in Math. **341**, Springer-Verlag, Berlin, 1973, 85–147.

[R] M. ROST, *Hilbert theorem 90 for K_3 for degree-two extensions*, préprint, 1986.

[Sa] D. J. SALTMAN, *Generic Galois extensions and problems in field theory*, Adv. Math. **43** (1982), 250–283.

[SGA4] *Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 4: théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, exposée I–IV, Lecture Notes in Math. **269**, Springer-Verlag, Berlin, 1972, exposés V–VIII, Lecture Notes in Math. **270**, Springer-Verlag, Berlin, 1972; exposés IX–XIX, Lecture Notes in Math **305**, Springer-Verlag, Berlin 1973.

[Sh] C. Sherman, *K-cohomology of regular schemes*, Comm. Algebra **7** (1979), 999–1027.

[Su1] A. A. Suslin, *Torsion in K_2 of fields*, *K*-Theory **1** (1987), 1–29.

[Su2] ———, *On the K-theory of local fields*, J. Pure Appl. Algebra **34** (1984), 301–318.

[Su3] ———, "Homology of GL_n, characteristic classes and Milnor *K*-theory" in *Algebraic K-theory, Number Theory, Geometry and Analysis, Proceedings, Bielefeld, 1982*, Lecture Notes in Math. **1046**, Springer-Verlag, Berlin, 1984, 357–375.

[Sue] Y. Suegoshi, *A note on Miki's generalization of the Grunwald-Wang theorem*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A **36** (1981), 229–233.

[T] J. T. Tate, *Relations between K_2 and Galois cohomology*, Invent. Math. **36** (1976), 257–274.

URA 212, CNRS, Mathématiques, Université de Paris 7, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France; kahn@mathp7.jussieu.fr