Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique

Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Nullité de certains groupes attachés aux variétés semi-abéliennes sur un corps fini; application

Bruno KAHN

Résumé – Soient $G_1, \ldots, G_n$ des variétés semi-abéliennes sur un corps fini F. On montre que, si $n \geqq 2$, $K(F, G_1, \ldots, G_n)=0$, où $K(F, G_1, \ldots, G_n)$ est le groupe défini dans [1] par Somekawa. On utilise ce résultat pour retrouver le corps de classes non ramifié de Kato et Saito dans le cas particulier d'un produit de courbes sur un corps fini.

Vanishing of certain groups attached to semi-abelian varieties over a finite field; an application

Abstract – *Let* $G_1, \ldots, G_n$ *be n semi-abelian varieties defined over a finite field* F. *We show that if* $n \geqq 2$, $K(F, G_1, \ldots, G_n)=0$, *where* $K(F, G_1, \ldots, G_n)$ *is the group defined in* [1] *by Somekawa. We apply this to recover Kato and Saito's unramified class field theory in the special case of a product of curves over a finite field.*

Nous utiliserons la notion de foncteur de Mackey et celle de produit tensoriel de foncteurs de Mackey, esquissées dans [2]; la seconde est plus élémentaire que celle de Somekawa [1] et suffisante pour notre propos. Soit F un corps commutatif. Dans cette Note, un *foncteur de Mackey* [sur F] est un foncteur covariant A de la catégorie des extensions de F vers celle des groupes abéliens, muni de « transferts » $\mathrm{Cor}_{L/K} : A(L) \to A(K)$ pour les extensions finies L/K, donnant à A une structure contravariante et commutant à la structure covariante en un sens convenable (*cf.* [2]). Les foncteurs de Mackey forment une catégorie abélienne, un morphisme de foncteurs de Mackey étant additif et commutant aux structures covariantes et contravariantes.

Soient A_1, A_2, B, trois foncteurs de Mackey. Un *accouplement de Frobenius* est une transformation $A_1(K) \otimes A_2(K) \to B(K)$, naturelle pour les structures covariantes et vérifiant la formule de projection (réciprocité de Frobenius) en chaque variable [2]. Si $\Phi(A_1, A_2, B)$ est l'ensemble de ces transformations, le foncteur $B \mapsto \Phi(A_1, A_2, B)$ est représentable par un foncteur de Mackey $A_1 \overset{M}{\otimes} A_2$, le *produit tensoriel* de A_1 et A_2 (au sens de Mackey). Ce produit tensoriel est associatif et commutatif.

Soient $G_1, \ldots, G_n$ *n* variétés semi-abéliennes définies sur F. Le groupe $G_1 \overset{M}{\otimes} \ldots \overset{M}{\otimes} G_n(F)$ coïncide avec celui qu'on obtiendrait dans [1] en utilisant seulement les relations (1.2.0) et (1.2.1). Ainsi, le groupe $K(F, G_1, \ldots, G_n)$ de [1] est un quotient de $G_1 \overset{M}{\otimes} \ldots \overset{M}{\otimes} G_n(F)$. Les relations (1.2.0) et (1.2.1) de [1] ont un sens pour des foncteurs de Mackey $A_1, \ldots, A_n$ quelconques, et peuvent être utilisées pour définir $A_1 \overset{M}{\otimes} \ldots \overset{M}{\otimes} A_n$ en général.

THÉORÈME. – *Supposons* F *fini. Si* $n \geqq 2$, *on a*

$$G_1 \overset{M}{\otimes} \ldots \overset{M}{\otimes} G_n(F) = K(F, G_1, \ldots, G_n) = 0.$$

Démonstration. – Il suffit de montrer que $G_1 \overset{M}{\otimes} \ldots \overset{M}{\otimes} G_n(F)=0$, et par associativité il suffit de traiter le cas $n=2$. On va utiliser les propriétés suivantes de G_1 et G_2 :

(1) *Pour toute extension finie* E/F, $G_1(E)$ *et* $G_2(E)$ *sont finis.*

(2) $G_1(\bar{F})$ *et* $G_2(\bar{F})$ *sont divisibles de torsion, où* $\bar{F}$ *désigne la clôture algébrique de* F.

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

0764-4442/92/03141039 $ 2.00

(3) *Pour toute extension finie* E/F, *la norme* $N_{E/F}: G_i(E) \to G_i(F)$ *est surjective.*

(4) *Pour tout nombre premier l, l'automorphisme de Frobenius opère sans points fixes sur* $\mathbf{T}_l(G_1) \otimes \mathbf{T}_l(G_2)$, *où* $\mathbf{T}_l(G_i)$ *désigne le module de Tate de* G_i *en l.*

(1) est évident et (2) est bien connu. Pour voir (3), on remarque que, puisque G_1 et G_2 sont connexes, le théorème de Lang implique que $H^1(F, G_i(\bar{F}))=0$. On en déduit que $H^1(E/F, G_i(E))=0$. Comme Gal(E/F) est cyclique et que $G_i(E)$ est fini (1), cela implique que $\hat{H}^0(E/F, G_i(E))=0$, c'est-à-dire (3). Enfin, les « conjectures de Weil » impliquent que les valeurs propres de l'action de l'automorphisme de Frobenius sur $\mathbf{T}_l(G_i)$ sont des entiers algébriques de valeurs absolues >1. Il en est donc de même pour l'action sur $\mathbf{T}_l(G_1) \otimes \mathbf{T}_l(G_2)$, d'où (4).

De plus :

(5) $G_1 \overset{M}{\otimes} G_2(F)$ *est un quotient de* $\bigoplus_E H_0(\mathrm{Gal}(E/F), G_1(E) \otimes G_2(E))$, *où* E *décrit les extensions finies de* F.

Cela résulte des relations (1.2.0) et (1.2.1) mentionnées ci-dessus.

Pour montrer que $G_1 \overset{M}{\otimes} G_2(F)=0$, on procède en quatre étapes. Si E est une extension finie de F et $(x, y) \in G_1(E) \times G_2(E)$, on note $\mathrm{Cor}_{E/F}(x \overset{M}{\otimes} y)$ (et simplement $x \overset{M}{\otimes} y$ si E=F) l'image de $x \otimes y$ dans $G_1 \overset{M}{\otimes} G_2(F)$.

LEMME 1. — $G_1 \overset{M}{\otimes} G_2(F)$ *est de torsion.*

C'est évident à partir de (1) et de (5).

LEMME 2. — *Soit* $(x, y) \in G_1(F) \times G_2(F)$. *Alors, pour tout* $m \geqq 1$, $x \overset{M}{\otimes} y$ *est divisible par* m *dans* $G_1 \overset{M}{\otimes} G_2(F)$.

En effet, d'après (2), il existe une extension finie E/F telle que $x=mx'$ pour un $x' \in G_1(E)$. De plus, d'après (3), il existe $y' \in G_2(E)$ tel que $N_{E/F}y'=y$. On en déduit :

$$x \overset{M}{\otimes} y = x \overset{M}{\otimes} N_{E/F} y' = \mathrm{Cor}_{E/F}(x \overset{M}{\otimes} y') = m\, \mathrm{Cor}_{E/F}(x' \overset{M}{\otimes} y').$$

LEMME 3. — $G_1 \overset{M}{\otimes} G_2(F)$ *est divisible.*

Cela résulte de (5) et du lemme 2, appliqué aux extensions finies de F.

LEMME 4. — *Pour tout nombre premier l, il existe un entier* $m \geqq 1$ *tel que* $m\, G_1 \overset{M}{\otimes} G_2(F)\{l\}=0$.

(Si A est un groupe abélien, on note $A\{l\}$ la composante l-primaire du sous-groupe de torsion de A.)

Soit $\Gamma=\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. La propriété (4) entaîne que $H_0(\Gamma, \mathbf{T}_l(G_1) \otimes \mathbf{T}_l(G_2))$ est fini. Soit m son ordre. Il résulte de (1) et (3) que, pour toute extension finie E/F, $G_i(E)\{l\}$ est un quotient de $\mathbf{T}_l(G_i)$, donc que $H_0(\mathrm{Gal}(E/F), G_1(E) \otimes G_2(E))$ est un quotient de $H_0(\Gamma, \mathbf{T}_l(G_1) \otimes \mathbf{T}_l(G_2))$. En particulier, on a $m H_0(\mathrm{Gal}(E/F), G_1(E) \otimes G_2(E))=0$. On en conclut [*cf.* (5)] que $m\, G_1 \overset{M}{\otimes} G_2(F)\{l\}=0$.

Ceci termine la démonstration.

Application. — Soit F un corps quelconque. Si T est une variété lisse, irréductible sur F, on note $Z_0(T)$ le groupe des zéro-cycles sur T et $CH_0(T)$ le quotient de $Z_0(T)$ par l'équivalence rationnelle. La loi $E \mapsto CH_0(T \times_F E)$ fait de $CH_0(T)$ un foncteur de Mackey sur F.

Soient X, Y deux variétés lisses, irréductibles sur F. L'accouplement naturel

$$Z_0(X) \times Z_0(Y) \to Z_0(X \times_F Y)$$
$$(x, y) \mapsto (x, y)$$

induit un accouplement

$$CH_0(X) \times CH_0(Y) \to CH_0(X \times_F Y),$$

qui est un accouplement de Frobenius pour les structures de Mackey des trois termes.

Par la propriété universelle de $\overset{M}{\otimes}$, on en déduit un homomorphisme surjectif :

$$CH_0(X) \overset{M}{\otimes} CH_0(Y) \twoheadrightarrow CH_0(X \times Y). \tag{6}$$

Remarque. — Il est probable qu'on peut définir un foncteur

$$E \mapsto K(E, CH_0(X), CH_0(Y))$$

en généralisant la construction de [1] à des foncteurs $G_1, \ldots, G_n$ ayant une propriété de « réciprocité » [c'est le cas de $CH_0(X)$ et $CH_0(Y)$], et qu'on peut remplacer $CH_0(X) \overset{M}{\otimes} CH_0(Y)$ par ce foncteur dans la suite exacte (6). Il semble possible que la surjection induite soit même un isomorphisme. *Cf.* [1], th. (2.4) dans le cas d'un produit de deux courbes elliptiques.

Soient $X_1, \ldots, X_n$ n courbes lisses, géométriquement irréductibles sur F. Par récurrence, on déduit de (6) une surjection de foncteurs de Mackey:

$$\mathrm{Pic}(X_1) \overset{M}{\otimes} \ldots \overset{M}{\otimes} \mathrm{Pic}(X_n) \twoheadrightarrow CH_0(X_1 \times \ldots \times X_n). \tag{7}$$

Supposons que les X_i soient complètes et possèdent chacune un diviseur rationnel de degré 1. Pour tout i, le foncteur de Mackey $\mathrm{Pic}(X_i)$ se scinde alors en une somme directe :

$$\mathrm{Pic}(X_i) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathrm{Pic}^0(X_i). \tag{8}$$

Notons $A_0(X_1 \times_F \ldots \times_F X_n)$ le noyau de deg : $CH_0(X_1 \times_F \ldots \times_F X_n) \to \mathbf{Z}$. En utilisant (7) et (8), on obtient alors une nouvelle surjection :

$$\mathrm{Pic}^0 X_1 \oplus \ldots \oplus \mathrm{Pic}^0 X_n \oplus \bigoplus_{i<j} (\mathrm{Pic}^0 X_i \overset{M}{\otimes} \mathrm{Pic}^0 X_j) \oplus \ldots \oplus (\mathrm{Pic}^0 X_1 \overset{M}{\otimes} \ldots \overset{M}{\otimes} \mathrm{Pic}^0 X_n)$$
$$\twoheadrightarrow A_0(X_1 \times \ldots \times X_n),$$

où $A_0(X_1 \times \ldots \times X_n)$ est le foncteur de Mackey $E \mapsto A_0(X_1 \times_F \ldots \times_F X_n \times_F E)$.

[Si l'on retirait l'hypothèse de l'existence de diviseurs rationnels de degré 1, on n'obtiendrait qu'une filtration sur $A_0(X_1 \times \ldots \times X_n)$, de quotients successifs

$$\mathrm{Pic}^0 X_1 \oplus \ldots \oplus \mathrm{Pic}^0 X_n, \bigoplus_{i<j} (\mathrm{Pic}^0 X_i \overset{M}{\otimes} \mathrm{Pic}^0 X_j), \ldots, (\mathrm{Pic}^0 X_1 \overset{M}{\otimes} \ldots \overset{M}{\otimes} \mathrm{Pic}^0 X_n).]$$

Supposons enfin F fini. Alors chaque X_i possède un diviseur rationnel de degré 1. En appliquant le résultat principal, on obtient une surjection :

$$f: \mathrm{Pic}^0 X_1 \oplus \ldots \oplus \mathrm{Pic}^0 X_n \to A_0(X_1 \times \ldots \times X_n) \to 0.$$

En particulier, on retrouve le fait que $A_0(X_1 \times \ldots \times X_n)$ est *fini* [3].

Soient $g : A_0(X_1 \times \ldots \times X_n) \to \pi_1^{ab}(X_1 \times \ldots \times X_n)^0$ l'application de réciprocité de Lang [3] et

$$h: \pi_1^{ab}(X_1 \times \ldots \times X_n)^0 \to \pi_1^{ab}(X_1)^0 \oplus \ldots \oplus \pi_1^{ab}(X_n)^0$$

l'application naturelle. On voit sans difficulté que le composé

$$hgf: \quad \mathrm{Pic}^0 X_1 \oplus \ldots \oplus \mathrm{Pic}^0 X_n \to \pi_1^{ab}(X_1)^0 \oplus \ldots \oplus \pi_1^{ab}(X_n)^0$$

est donné par la collection des homomorphismes de réciprocité (d'Artin-Hasse) $\mathrm{Pic}^0 X_i \to \pi_1^{ab}(X_i)^0$. Comme ceux-ci sont bijectifs et que g est surjectif (Lang), cela montre que g est *bijectif;* c'est le résultat de Kato, Saito (et Colliot-Thélène) ([3], th. 1) dans le cas particulier d'un produit de courbes.

CONJECTURE. — *Soit* F *un corps de type fini sur son sous-corps premier k. Si k est fini, supposons* $\mathrm{degtr}(F/k)=n$; *si* $k=\mathbf{Q}$, *supposons* $\mathrm{degtr}(F/k)=n-1$. *Soient* $G_1, \ldots, G_r$ *r variétés semi-abéliennes définies sur* F. *Alors* $K(F, G_1, \ldots, G_r)$ *est de torsion si* $r=n+1$ *et nul si* F *n'est pas ordonnable et* $r \geqq n+2$. *Si de plus les* G_i *sont des variétés abéliennes,* $K(F, G_1, \ldots, G_r)$ *est de type fini.*

Cette conjecture est vraie si $n=1$ et G_1 est abélienne (Mordell-Weil-Néron), si F est fini par le théorème ci-dessus et si F est global et $G_i=\mathbf{G}_m$ par [1], th. 1.4 et les travaux de Bass-Tate [4] et Garland [5]. Pour F quelconque et $G_i=\mathbf{G}_m$, l'énoncé de torsion correspond à une question posée par Bass-Tate [4], p. 390. Pour F un corps de nombres, $r=2$, $G_1=\mathbf{G}_m$ et G_2 la jacobienne d'une courbe lisse ayant un point rationnel sur F, elle est équivalente par [1], th. 2.1, à une conjecture de Bloch [6], problem 2.16. Pour F un corps global et G_1, G_2 deux courbes elliptiques, elle implique par [1], th. 2.4 et le théorème de Roĭtman une conjecture de Bloch [6], conj. 3.4, sur la représentabilité de $A_0(G_1 \times G_2)$ sur $\bar{\mathbf{Q}}$. Enfin, si l'interprétation motivique de $K(F, G_1, \ldots, G_r)$ dans [1], introduction, est correcte, l'énoncé de torsion est un cas particulier des conjectures sur la dimension cohomologique de la catégorie des motifs sur un corps de type fini [7], p. 228.

Note remise le 21 janvier 1992, acceptée après révision le 6 avril 1992.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] M. SOMEKAWA, On Milnor K-groups attached to semi-abelian varieties, *K-theory*, 4, 1990, p. 105-119.

[2] B. KAHN, The decomposable part of motivic cohomology and bijectivity of the norm residue homomorphism, *Contemp. Math.* 126, A.M.S., Providence, 1992, p. 79-88.

[3] K. KATO et S. SAITO, Unramified class field theory of arithmetic surfaces, *Ann. of Math.*, 118, 1983, p. 241-275.

[4] H. BASS et J. TATE, The Milnor ring of a global field, *Lecture Notes in Math.*, n° 342, Springer, New York, 1973, p. 349-446.

[5] H. GARLAND, A finiteness theorem for K_2 of a number field, *Ann. of Math.*, 94, 1971, p. 534-548.

[6] W. RASKIND, K-theory, étale cohomology and torsion algebraic cycles, *Contemp. Math.*, 83, A.M.S., Providence, 1989, p. 311-343.

[7] U. JANNSEN, Mixed motives and algebraic K-theory, *Lecture Notes in Math.*, n° 1400, Springer, Heidelberg, 1990.

C.N.R.S.-U.R.A. n° 212, *Mathématiques,*
Université de Paris-VII, 2, *place Jussieu,* 75251 *Paris Cedex* 05.