ESSENTIAL NUMBER THEORY

Sur la conjecture de Tate pour les diviseurs

Bruno Kahn

2023

vol. 2 no. 1

msp

Essential Number Theory
Vol. 2, No. 1, 2023
https://doi.org/10.2140/ent.2023.2.83

Sur la conjecture de Tate pour les diviseurs

Bruno Kahn

On montre que la conjecture de Tate en codimension 1 sur un corps de type fini résulte de la même conjecture pour les surfaces sur son sous-corps premier. En caractéristique positive, ceci est dû à de Jong–Morrow sur $\mathbb{F}_p$ et à Ambrosi pour la réduction à $\mathbb{F}_p$. Nous montrons cette dernière réduction d'une manière différente, qui fonctionne aussi en caractéristique zéro. Sur $\mathbb{Q}$, la réduction aux surfaces se fait par un argument facile reposant sur le théorème (1, 1) de Lefschetz.

We prove that the Tate conjecture in codimension 1 over a finitely generated field follows from the same conjecture for surfaces over its prime subfield. In positive characteristic, this is due to de Jong–Morrow over $\mathbb{F}_p$ and to Ambrosi for the reduction to $\mathbb{F}_p$. We give a different proof than Ambrosi's, which also works in characteristic 0; over $\mathbb{Q}$, the reduction to surfaces follows from a simple argument using Lefschetz's (1, 1) theorem.

Introduction

La conjecture de Tate est l'une des plus célèbres en géométrie arithmétique : formulée dans [Tate 1965], elle prédit que l'application classe de cycle l-adique

$$\mathrm{cl}^i_X : CH^i(X) \otimes \mathbb{Q}_l \to H^{2i}(X_{k_s}, \mathbb{Q}_l(i))^{\mathrm{Gal}(k_s/k)} \tag{1}$$

(voir [SGA 4½ 1977]) est surjective pour tout entier $i \geq 0$ et toute variété projective lisse X sur un corps k de type fini, de caractéristique différente de l et de clôture séparable k_s. Elle a été démontrée dans de nombreux cas particuliers, mais reste ouverte en général même pour $i = 1$. Pour un exposé détaillé qui reste largement d'actualité, je renvoie à [Tate 1994] (voir aussi [Li et Zhang 2022]).

Il est connu que pour $i = 1$, la conjecture de Tate pour les corps premiers implique cette même conjecture en général : en caractéristique zéro cela se déduit du théorème de spécialisation des groupes de Néron–Severi dû à Yves André [1996, théorème 5.2 (3); Ambrosi 2018, § 1.3.3], et en caractéristique positive cela résulte d'un théorème d'Emiliano Ambrosi [2018, Theorem 1.2.1]. Ambrosi démontre

MSC2020 : 14C25.
Mots-clefs : Tate conjecture, divisors.

plus : la conjecture de Tate en codimension i sur les corps finis l'implique pour tous les corps de type fini de caractéristique positive, sous une hypothèse de semi-simplicité qui résulte de la conjecture de Tate quand $i = 1$. Sa preuve, étendant au cas d'un corps fini un argument d'André en caractéristique zéro [1996, § 5.1], utilise le théorème global des cycles invariants de Deligne et la cyclicité du groupe de Galois absolu de $\mathbb{F}_p$.

L'objet de cette note est d'offrir une démonstration plus élémentaire de cette réduction (uniquement pour $i = 1$), qui fonctionne uniformément en toute caractéristique : inspirée de la preuve de [Kahn 1998, Theorem 8.32 (a)], elle consiste à étendre la conjecture de Tate aux variétés lisses *ouvertes* (théorème 6). Cette idée, due originellement à Jannsen [1990], permet de remplacer avantageusement le recours au théorème global des cycles invariants par une simple utilisation du critère de dégénérescence des suites spectrales de Deligne [1968; 1994]. Un argument élémentaire de correspondances permet par ailleurs de se débarrasser aisément du problème de semi-simplicité qui apparaît aussi chez Jannsen (lemme 2 et proposition 3).

D'après de Jong (non publié) et Morrow [2019], la conjecture de Tate pour $i = 1$ en caractéristique positive se réduit même au cas des surfaces sur un corps fini (cette dernière conjecture étant par ailleurs équivalente à la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer pour les variétés abéliennes sur les corps de fonctions d'une variable sur k, voir remarque 9). La même chose est vraie en caractéristique zéro (théorème 8), en utilisant le théorème (1,1) de Lefschetz via les théorèmes de comparaison cohomologiques.

English introduction

The famous Tate conjecture, which predicts that the l-adic cycle class map (1) is surjective for smooth projective varieties X over finitely generated fields k, was formulated in [Tate 1965], but remains open up to now, even though it has been proven in important special cases [Tate 1994; Li et Zhang 2022]. This is so even for $i = 1$.

In this case, the Tate conjecture over prime fields implies the conjecture over any finitely generated field by work of Emiliano Ambrosi [2018, Theorem 1.2.1 and § 1.3.3]. In characteristic 0, the argument uses Yves André's specialisation theorem [1996, théorème 5.2 (3)] for the Néron–Severi group, while in positive characteristic, Ambrosi's proof relies in particular on the cyclicity of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$.

The aim of this note is to offer a simple proof of this reduction, which works uniformly in all characteristics (proposition 7). It is however special to codimension 1, while Ambrosi's argument also works (in positive characteristic) in any codimension i under a semisimplicity hypothesis which follows from Tate's conjecture if $i = 1$.

There are two ideas: the first is to get rid of the semisimplicity issue by a simple argument of correspondences (lemme 2), and the second is to extend the Tate conjecture for divisors from smooth projective to (all) smooth varieties (théorème 6). This idea goes back to Jannsen [1990]; its point is that it allows us to replace Ambrosi's use of Deligne's global invariant cycles theorem (an argument going back to André in characteristic 0 [1996, §5.1]) by the degeneracy of the l-adic Leray spectral sequence, also due to Deligne. This is a reformulation of the arguments given in [Kahn 1998, proof of Theorem 8.32 (a)], specialised to codimension 1 (see also [Kahn 2002, Theorem 3.4]); the first idea is new.

When $k = \mathbb{F}_p$, a theorem of de Jong (unpublished) and Morrow [2019] even reduces the Tate conjecture for divisors to surfaces. (This case is in turn equivalent to the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture for abelian varieties over global fields of positive characteristic, see remarque 9.) Over $\mathbb{Q}$, the same reduction holds (théorème 8): the proof involves the Lefschetz (1,1) theorem via the cohomological comparison theorems.

1. Notations

Soient k un corps et X une k-variété lisse. Soient k_s une clôture séparable de k et l un nombre premier différent de $\operatorname{car} k$. On note $H^j(X,i) := H^j(X_{k_s}, \mathbb{Q}_l(i))$; de même pour la cohomologie à supports. On note $\mathrm{cl}_X^i : CH^i(X) \otimes \mathbb{Q}_l \to H^{2i}(X,i)$ la classe de cycle, et simplement cl_X pour cl_X^1.

2. Une rétraction

Supposons X projective de dimension d. Pour $i \le d$, choisissons une base $(\bar{Z}^1, \dots, \bar{Z}^r)$ du groupe $N^i(X)_{\mathbb{Q}}$ des cycles de codimension i à coefficients rationnels sur X modulo l'équivalence numérique, et notons $(\bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_r)$ la base duale dans $N_i(X)_{\mathbb{Q}}$, de sorte que $\langle \bar{Z}^i, \bar{Z}_j \rangle = \delta_{ij}$ [1]. Relevons les $\bar{Z}^i$ et $\bar{Z}_i$ en des classes de cycle $Z^i \in CH^i(X)_{\mathbb{Q}},\ Z_i \in CH_i(X)_{\mathbb{Q}}$. Soit

$$e = \sum_a Z^a \times Z_a \in CH^d(X \times X)_{\mathbb{Q}},$$

vu comme correspondance algébrique, où $\times$ est le cross-produit des cycles (cf. la démonstration de [Kahn et al. 2007, Proposition 7.2.3]).

Lemme 1. *On a $e^2 = e$.*

Démonstration. Pour $Z, Z' \in CH^i(X)$ et $T, T' \in CH_i(X)$, on a l'identité

$$(Z \times T) \circ (Z' \times T') = \langle Z', T \rangle Z \times T'$$

1. Rappelons que $N^i(X)_{\mathbb{Q}}$ et $N_i(X)_{\mathbb{Q}}$ sont des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels de dimension finie [Fulton 1998, Example 19.1.4, p. 375], mis en dualité par l'accouplement d'intersection.

dans l'anneau des correspondances de Chow $CH^d(X \times X)$, où $\langle\,,\rangle$ est le produit d'intersection : cela résulte immédiatement de la définition de la composition des correspondances [Fulton 1998, Definition 16.1.1, p. 305]. □

Lemme 2. *Soit V le sous-espace vectoriel de $\operatorname{Im}\mathrm{cl}^i_X$ engendré par les Z^a. L'action de e sur $H^{2i}(X,i)$ définit une rétraction G-équivariante de l'inclusion $V \hookrightarrow H^{2i}(X,i)$. En particulier, si $i=1$, elle définit une rétraction de cl_X.*

Démonstration. Soit $x \in H^{2i}(X,i)$. Pour $(Z,T) \in CH^i(X) \times CH_i(X)$, on a

$$(Z \times T)^* x = <x, \mathrm{cl}_i(T)> \mathrm{cl}^i(Z)$$

où $<\,,>$ est l'accouplement de Poincaré, cf. [Fulton 1998, Definition 16.1.2, p. 307]. Cela montre que $e(H^{2i}(X,i)) \subset V$, et aussi que sa restriction à ce sous-espace est l'identité.

Le cas $i=1$ résulte du théorème de Matsusaka [1957] (équivalences homologique et numérique coïncident en codimension 1). □

3. Passage aux variétés lisses ouvertes

Supposons k de type fini, et X seulement lisse. On s'intéresse à l'extension suivante de la conjecture de Tate :

- $T(X)$: l'homomorphisme « classe de diviseur » $\mathrm{cl}_X : \mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}_l \to H^2(X,1)^G$, où $G = \mathrm{Gal}(k_s/k)$, est surjectif.
- $T(k)$: $T(X)$ pour toutes les k-variétés lisses X.

Aux notations près, cette conjecture est due à Jannsen [1990, Conjecture 7.3, p. 109], qui l'étend même aux variétés singulières (avec l'homologie de Borel–Moore). Dans [Jannsen 1990, Theorem 7.10 (b), p. 114], il la réduit au cas des variétés projectives lisses sous une hypothèse de semi-simplicité (b), en bas de [Jannsen 1990, p. 113]) qui n'est pas connue en général même pour H^2. Le but de cette section est de faire cette réduction (théorème 6) en évitant l'hypothèse de semi-simplicité grâce à la proposition 3 ci-dessous. Bien sûr, ceci ne marche que pour les cycles de codimension 1!

Dans la suite, on note

$$H^2_{\mathrm{tr}}(X,1) = \operatorname{Coker}\mathrm{cl}_X\,.$$

Proposition 3. *Pour X projective lisse, $T(X)$ équivaut à $H^2_{\mathrm{tr}}(X,1)^G = 0$.*

Démonstration. L'implication $H^2_{\mathrm{tr}}(X,1)^G = 0 \Longrightarrow T(X)$ est évidente. L'autre résulte du lemme 2. □

Lemme 4. *Soit $f : X' \to X$ un morphisme fini et plat de k-variétés lisses. Alors $T(X') \Longrightarrow T(X)$.*

Démonstration. En effet, $f^* : H^2(X,1) \to H^2(X',1)$ admet la rétraction G-équivariante $(1/\deg(f))f_*$, et ces deux homomorphismes commutent avec les homomorphismes correspondants entre $\operatorname{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}_l$ et $\operatorname{Pic}(X') \otimes \mathbb{Q}_l$ via cl_X et $\mathrm{cl}_{X'}$. □

Proposition 5. (*a*) *Soit U un ouvert de X. Alors $T(U) \Longrightarrow T(X)$.*

(*b*) *La réciproque est vraie si X est projective.*

Démonstration. (a) Notons que cl_X se factorise par $\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q}_l$ où $\mathrm{NS}(X)$ est le groupe de Néron–Severi de X. Soit $Z = X - U$ (structure réduite). On a un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{x \in Z \cap X^{(1)}} \mathbb{Q}_l \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{NS}(X)\otimes\mathbb{Q}_l \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\mathrm{cl}}_X"'] & \mathrm{NS}(U)\otimes\mathbb{Q}_l \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\mathrm{cl}}_U"'] & 0 \\ H^2_Z(X,1) \arrow[r, "\delta"] & H^2(X,1) \arrow[r] & H^2(U,1) \arrow[r] & H^3_Z(X,1) \end{tikzcd} \tag{2}$$

où la ligne du bas est la suite exacte de cohomologie à supports et la flèche verticale de gauche est surjective (en fait bijective) par semi-pureté [SGA 4½ 1977, proposition 2.2.6 et rappel 2.2.8]. On en déduit un nouveau diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{tikzcd} & \bigoplus_{x \in Z \cap X^{(1)}} \mathbb{Q}_l \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{NS}(X)\otimes\mathbb{Q}_l \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\mathrm{cl}}_X"'] & \mathrm{NS}(U)\otimes\mathbb{Q}_l \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\mathrm{cl}}_U"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Im}\delta \arrow[r] & H^2(X,1)^G \arrow[r] & H^2(U,1)^G & \end{tikzcd} \tag{3}$$

où la flèche verticale de gauche est surjective. L'assertion résulte alors d'une petite chasse aux diagrammes.

(b) Supposons d'abord k parfait. D'après (a), on peut choisir U aussi petit qu'on veut. Prenons $Z = X - U$ assez gros pour contenir des diviseurs $D_1, \dots, D_r$ dont les classes engendrent $\mathrm{NS}(X)$. Alors $\mathrm{NS}(U) = 0$ et il faut montrer que $H^2(U,1)^G = 0$. Or le diagramme (2) montre que la suite

$$\mathrm{NS}(X)\otimes\mathbb{Q}_l \xrightarrow{\bar{\mathrm{cl}}_X} H^2(X,1) \to H^2(U,1) \to H^3_Z(X,1)$$

est exacte. Avec la notation de la proposition 3, on a donc une suite exacte

$$0 \to H^2_{\mathrm{tr}}(X,1)^G \to H^2(U,1)^G \to H^3_Z(X,1)^G.$$

Si $T(X)$ est vrai, le terme de gauche est nul par cette proposition. Il reste à voir que le terme de droite l'est également. Soit Z' la réunion du lieu singulier de Z et de ses composantes irréductibles de codimension supérieure ou égale à 2 dans X : la suite exacte de cohomologie à supports

$$0 \simeq H^3_{Z'}(X,1) \to H^3_Z(X,1) \to H^3_{Z-Z'}(X-Z',1) \simeq H^1(Z-Z',0),$$

où le premier isomorphisme est par semi-pureté et le second par pureté [SGA 4½ 1977, rappel 2.2.8], montre que $H^3_Z(X,1)^G$ s'injecte dans $H^1(Z-Z',0)^G$. Mais ce dernier groupe est trivial, car $H^1(Z-Z',0)$ est mixte de poids supérieur ou égal à 1 [Deligne 1980, corollaire 3.3.5] [2].

L'argument ci-dessus utilise implicitement le fait que les composantes irréductibles de codimension 1 de Z sont génériquement lisses. Pour obtenir ceci quand k est imparfait, il suffit de passer à une extension radicielle finie convenable de k, ce qui ne change ni $H^2(X,1)$, ni $\mathrm{Pic}(X)\otimes\mathbb{Q}_l$, ni G. □

Théorème 6. *$T(X)$ est vrai pour les k-variétés lisses de dimension d si et seulement s'il est vrai pour les k-variétés projectives lisses de dimension d.*

Démonstration. Soit X lisse de dimension d. Choisissons une immersion ouverte dense $X \hookrightarrow X_0$ où X_0 est propre. D'après [de Jong 1996, Theorem 4.1], on peut trouver une altération $\pi : \tilde{X} \to X_0$ avec $\tilde{X}$ projective lisse et π génériquement fini. Soit $U \subset X$ un ouvert tel que $\pi_{|\pi^{-1}(U)}$ soit fini et plat.

Supposons $T(\tilde{X})$ vrai. Par la proposition 5(b), $T(\pi^{-1}(U))$ est vrai. D'après le lemme 4, $T(U)$ est donc vrai, et enfin $T(X)$ est vrai par la proposition 5(a). □

4. Changement de corps de base

Proposition 7. *Soit K/k une extension de corps de type fini. Alors $T(k) \iff T(K)$.*

Démonstration. En quatre étapes ; les deux premières et la dernière sont bien connues et valables en toute codimension ; elles sont rappelées pour la clarté de l'exposition. Pour plus de précision, on note ici $G_K = \mathrm{Gal}(K_s/K)$.

(1) Soit X lisse sur K, connexe et de corps des constantes L. Comme X est lisse, L/K est séparable. Je dis que, avec des notations évidentes, $T(X/K) \iff T(X/L)$. En effet, le G_K-module $H^2(X/K,1)$ est induit du G_L-module $H^2(X/L,1)$, donc $H^2(X/K,1)^{G_K} \xrightarrow{\sim} H^2(X/L,1)^{G_L}$.

(2) L'énoncé est vrai si K/k est finie séparable. En effet, $\Longrightarrow$ résulte immédiatement de (1). Pour $\Longleftarrow$, on se ramène à K/k galoisienne en considérant sa clôture galoisienne ; si X est lisse sur k, $T(X_K)$ implique alors $T(X)$ en prenant les invariants sous $\mathrm{Gal}(K/k)$.

2. Au moins sur un corps fini, ce dernier point peut se déduire plus élémentairement du théorème antérieur de A. Weil pour les courbes [1948, n° 48], en utilisant le fait que $H^1(Z-Z',0)$ est isomorphe au module de Tate rationnel de la variété d'Albanese de $Z-Z'$ via un morphisme d'Albanese.

(3) Soit k_0 le sous-corps premier de K ; montrons que $T(k_0) \Longrightarrow T(K)$. Il suffit grâce au théorème 6 de montrer que $T(k_0)$ implique $T(X)$ pour toute K-variété projective lisse X. L'argument est une version simplifiée de celle de [Kahn 1998, Theorem 8.32 (a)].

On peut supposer X connexe. Soit L son corps des constantes, et soit k_1 la fermeture algébrique de k_0 dans L. Puisque k_1 est parfait, l'extension L/k_1 est régulière ; choisissons-en un k_1-modèle lisse S. Quitte à remplacer S par un ouvert, étendons X en un S-schéma projectif lisse $f : \mathcal{X} \to S$. Notant $\bar{S} = S \otimes_{k_1} k_s$, on a la suite spectrale de Leray (de $\mathbb{Q}_l[\![G_{k_1}]\!]$-modules)

$$E_2^{p,q} = H^p(\bar{S}, R^q f_* \mathbb{Q}_l(1)) \Longrightarrow H^{p+q}(\mathcal{X}, 1).$$

D'après [Deligne 1968] (voir aussi [Deligne 1994]), le choix d'une section hyperplane lisse $\mathcal{Y}/S$ de $\mathcal{X}/S$ et le théorème de Lefschetz difficile [Deligne 1980, théorème 4.1.1] font dégénérer cette suite spectrale, montrant aussi que la filtration sur l'aboutissement est scindée [3]. En particulier, l'homomorphisme « edge » $H^2(\mathcal{X}, 1) \to E_2^{0,2} = H^2(X, 1)^{\pi_1(\bar{S})}$ admet une section G_{k_1}-équivariante ; par conséquent, $H^2(\mathcal{X}, 1)^{G_{k_1}} \to H^2(X, 1)^{G_L}$ est *surjectif* ; en effet, $G_L \to \pi_1(S)$ est surjectif puisque S est géométriquement connexe. Avec les notations de (1), on a donc $T(\mathcal{X}/k_0) \Longrightarrow T(\mathcal{X}/k_1) \Longrightarrow T(X/L) \Longrightarrow T(X/K)$. (Noter que k_1/k_0 est séparable puisque k_0 est parfait.)

(4) Finalement, montrons que $T(K) \Longrightarrow T(k_0)$, ce qui terminera la démonstration. Soit, comme ci-dessus, k_1 la fermeture algébrique de k_0 dans K. Donnons-nous une k_0-variété projective lisse X ; rappelons que $\mathrm{NS}(X_{k_1}) \otimes \mathbb{Q}_l \to \mathrm{NS}(X_K) \otimes \mathbb{Q}_l$ est bijectif (c'est vrai en général pour les classes de cycles modulo l'équivalence algébrique, voir par exemple [Kahn 2018, proposition 5.5] et sa preuve). Ceci montre que $T(X_K) \Longrightarrow T(X_{k_1})$; mais d'autre part $T(X_{k_1}) \Longrightarrow T(X)$ par (2). □

Théorème 8. *Soit k_0 le sous-corps premier de k. Alors $T(S)$ pour toutes les surfaces projectives lisses S sur k_0 implique $T(k)$.*

Démonstration. D'après la proposition 7, on se ramène à $k = k_0$. Si $k = \mathbb{Q}$, soit X une variété projective lisse connexe de dimension $d \geq 2$, de corps des constantes k_1. D'après le point (1) de la preuve de la proposition 7, on peut remplacer $\mathbb{Q}$ par k_1. Choisissons un plongement complexe $k_1 \hookrightarrow \mathbb{C}$. Par les théorèmes de comparaison, l'équivalence homologique l-adique pour $X \otimes_{k_1} \bar{\mathbb{Q}}$ coïncide avec la même pour $X \otimes_{k_1} \mathbb{C}$, qui coïncide avec l'équivalence homologique pour la cohomologie de Betti ; notons $A^i_{\mathrm{hom}}(\bar{X})$ les quotients correspondants. Choisissons un k_1-plongement projectif $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$, d'où un faisceau très ample L ; le théorème de Lefschetz fort (pour la cohomologie de Betti) implique que $\bigcup c_1(L)^{d-2} : A^1_{\mathrm{hom}}(\bar{X}) \to A^{d-1}_{\mathrm{hom}}(\bar{X})$

3. Le résultat précis de [Deligne 1968, proposition 2.4] ou de [Deligne 1994, §2 ou §3] est que $Rf_* \mathbb{Q}_l$ est isomorphe à $\bigoplus_{i \geq 0} R^i f_* \mathbb{Q}_l[-i]$ dans la catégorie dérivée.

est injectif, et même *bijectif* grâce au théorème (1,1) de Lefschetz [Lieberman 1968, preuve de Corollary 1]. Comme $A^*_{\mathrm{hom}}(X) \xrightarrow{\sim} A^*_{\mathrm{hom}}(\overline{X})^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/k_1)}$, on a aussi un isomorphisme $\bigcup c_1(L)^{d-2} : A^1_{\mathrm{hom}}(X) \xrightarrow{\sim} A^{d-1}_{\mathrm{hom}}(X)$. Mais, si $i : S \hookrightarrow X$ est une surface (lisse, connexe) ample donnée par le théorème de Bertini, cet isomorphisme se factorise en

$$A^1_{\mathrm{hom}}(X) \xrightarrow{i^*} A^1_{\mathrm{hom}}(S) \xrightarrow{i_*} A^{d-1}_{\mathrm{hom}}(X)$$

et de même pour l'isomorphisme correspondant $H^2(X, 1) \xrightarrow{\sim} H^{2d-2}(X, d-1)$, de manière compatible aux classes de cycles. Une petite chasse aux diagrammes montre alors que $T(S) \Longrightarrow T(X)$.

Si $k = \mathbb{F}_p$, Morrow se ramène d'abord au cas $\dim X \leq 3$ par le théorème de Lefschetz faible pour la cohomologie l-adique [Freitag et Kiehl 1988, Corollary I.9.4, p. 106] et pour le groupe de Picard [SGA 2 2005, corollaire 4.9 (b)], puis au cas d'une surface dans [Morrow 2019, Theorem 4.3]. Le premier point est un peu délicat, comme me l'a fait remarquer Juan Felipe Castro Cárdenas : il n'est pas clair que, pour le groupe de Picard, Lefschetz faible soit vrai pour les diviseurs *réduits*, en l'absence du théorème d'annulation de Kodaira (cf. [SGA 2 2005, remarque 4.10] [4]). Néanmoins, l'argument de la preuve de [Morrow 2019, Theorem 4.3] pour réduire le cas de la dimension 3 à celui de la dimension 2 marche aussi bien, et même mieux, pour réduire le cas de la dimension $d+1$ à celui de la dimension d quand $d \geq 3$: dans ce cas, toutes les inclusions horizontales du diagramme de la page 3495 sont des égalités. □

Remarque 9. D'après [Lichtenbaum et al. 2022], la conjecture $T(S)$ pour les surfaces S sur un corps fini k est équivalente à la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer pour les jacobiennes de courbes sur les corps de fonctions d'une variable K/k. Cette dernière implique la même conjecture pour toute variété abélienne A définie sur K : en effet, ladite conjecture est équivalente à la finitude de la composante l-primaire $Ш(K, A)\{l\}$ du groupe de Tate–Chafarevitch $Ш(K, A)$ [Schneider 1982; Kato et Trihan 2003]. Si $i : C \hookrightarrow A$ est une courbe ample, l'homomorphisme $i_* : J(C) \to A$ est surjectif (Weil, voir [Murre 1990, Lemma 2.3]), donc il existe $\sigma : A \to J(C)$ tel que $i_* \circ \sigma$ soit la multiplication par un entier $n > 0$, d'où $nШ(K, A) \subset i_*Ш(K, J(C))$. Mais on sait que $Ш(K, A)\{l\}$ est de cotype fini, donc la finitude de $Ш(K, J(C))\{l\}$ implique celle de $Ш(K, A)\{l\}$.

À ce stade, il est obligatoire de terminer avec la question évidente :

Question A. Peut-on réduire le cas de caractéristique zéro à celui de la caractéristique positive?

4. Note ajoutée pendant la correction des épreuves : ce problème a maintenant été résolu dans la preuve du lemme 3 de [Kahn 2023].

Par changement de base propre et lisse et par le théorème de Tchebotariov, cette question est équivalente à la suivante :

Question B. Soit S une $\mathbb{Q}$-surface projective lisse, et soit $\alpha \in H^2(S, 1)$. Supposons que, pour (presque) tout nombre premier p de bonne réduction, la spécialisation de α en p soit algébrique. Est-ce que α est algébrique?

Bibliographie

[Ambrosi 2018] E. Ambrosi, "A note on the behaviour of the Tate conjecture under finitely generated field extensions", *Pure Appl. Math. Q.* **14**:3-4 (2018), 515–527. MR Zbl

[André 1996] Y. André, "Pour une théorie inconditionnelle des motifs", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 83 (1996), 5–49. MR Zbl

[Deligne 1968] P. Deligne, "Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 35 (1968), 259–278. MR Zbl

[Deligne 1980] P. Deligne, "La conjecture de Weil, II", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 52 (1980), 137–252. MR Zbl

[Deligne 1994] P. Deligne, "Décompositions dans la catégorie dérivée", pp. 115–128 dans *Motives* (Seattle, WA, 1991), édité par U. Jannsen et al., Proc. Sympos. Pure Math. **55.1**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994. MR Zbl

[Freitag et Kiehl 1988] E. Freitag et R. Kiehl, *Étale cohomology and the Weil conjecture*, Ergebnisse der Math. (3) **13**, Springer, 1988. MR Zbl

[Fulton 1998] W. Fulton, *Intersection theory*, 2e éd., Ergebnisse der Math. (3) **2**, Springer, 1998. MR Zbl

[Jannsen 1990] U. Jannsen, *Mixed motives and algebraic K-theory*, Lecture Notes in Mathematics **1400**, Springer, 1990. MR Zbl

[de Jong 1996] A. J. de Jong, "Smoothness, semi-stability and alterations", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 83 (1996), 51–93. MR Zbl

[Kahn 1998] B. Kahn, "A sheaf-theoretic reformulation of the Tate conjecture", prépublication, 1998. arXiv math/9801017

[Kahn 2002] B. Kahn, "The Geisser–Levine method revisited and algebraic cycles over a finite field", *Math. Ann.* **324**:3 (2002), 581–617. MR Zbl

[Kahn 2018] B. Kahn, "Motifs et adjoints", *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova* **139** (2018), 77–128. MR Zbl

[Kahn 2023] B. Kahn, "Some remarks on the smash-nilpotence conjecture", prépublication, 2023. arXiv 2311.14362

[Kahn et al. 2007] B. Kahn, J. P. Murre et C. Pedrini, "On the transcendental part of the motive of a surface", pp. 143–202 dans *Algebraic cycles and motives*, *Vol.* 2, édité par J. Nagel et C. Peters, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **344**, Cambridge Univ. Press, 2007. MR Zbl

[Kato et Trihan 2003] K. Kato et F. Trihan, "On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer in characteristic $p > 0$", *Invent. Math.* **153**:3 (2003), 537–592. MR Zbl

[Li et Zhang 2022] C. Li et W. Zhang, "A note on Tate's conjectures for abelian varieties", *Essent. Number Theory* **1**:1 (2022), 41–50. MR Zbl

[Lichtenbaum et al. 2022] S. Lichtenbaum, N. Ramachandran et T. Suzuki, "The conjectures of Artin–Tate and Birch–Swinnerton-Dyer", *Épijournal Géom. Algébrique* **6** (2022), article nº 7. MR Zbl

[Lieberman 1968] D. I. Lieberman, "Numerical and homological equivalence of algebraic cycles on Hodge manifolds", *Amer. J. Math.* **90** (1968), 366–374. MR Zbl

[Matsusaka 1957] T. Matsusaka, "The criteria for algebraic equivalence and the torsion group", *Amer. J. Math.* **79** (1957), 53–66. MR Zbl

[Morrow 2019] M. Morrow, "A variational Tate conjecture in crystalline cohomology", *J. Eur. Math. Soc.* (*JEMS*) **21**:11 (2019), 3467–3511. MR Zbl

[Murre 1990] J. P. Murre, "On the motive of an algebraic surface", *J. Reine Angew. Math.* **409** (1990), 190–204. MR Zbl

[Schneider 1982] P. Schneider, "Zur Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer über globalen Funktionenkörpern", *Math. Ann.* **260**:4 (1982), 495–510. MR Zbl

[SGA 2 2005] A. Grothendieck, "Application aux schémas algébriques projectifs", exposé XII, p. 109–134 dans *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux* (Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962), Documents Mathématiques (Paris) **4**, Soc. Math. France, Paris, 2005.

[SGA 4½ 1977] A. Grothendieck et P. Deligne, "La classe de cohomologie associée à un cycle", pp. 129–153 dans *Cohomologie étale* (Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie), édité par P. Deligne, Lecture Notes in Math. **569**, Springer, 1977. MR Zbl

[Tate 1965] J. T. Tate, "Algebraic cycles and poles of zeta functions", pp. 93–110 dans *Arithmetical Algebraic Geometry* (West Lafayette, IN, 1963), édité par O. F. G. Schilling, Harper & Row, New York, 1965. MR Zbl

[Tate 1994] J. Tate, "Conjectures on algebraic cycles in l-adic cohomology", pp. 71–83 dans *Motives* (Seattle, WA, 1991), édité par U. Jannsen et al., Proc. Sympos. Pure Math. **55.1**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994. MR Zbl

[Weil 1948] A. Weil, *Variétés abéliennes et courbes algébriques*, Actualités Sci. Ind. **1064**, Hermann et Cie, Paris, 1948. MR Zbl

Received 25 May 2022. Revised 1 Feb 2023.

BRUNO KAHN:

bruno.kahn@imj-prg.fr
IMJ-PRG, CNRS, Paris, France

See inside back cover or msp.org/ent for submission instructions.

Essential Number Theory (ISSN 2834-4634 electronic, 2834-4626 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online.

ENT peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

nonprofit scientific publishing

https://msp.org/

ESSENTIAL NUMBER THEORY

2023 vol. 2 no. 1