NILPOTENCE, RADICAUX ET STRUCTURES MONOÏDALES

YVES ANDRÉ ET BRUNO KAHN
AVEC UN APPENDICE DE PETER O'SULLIVAN

TABLE DES MATIÈRES

Date: 10 octobre 2002.
1991 *Mathematics Subject Classification.* 16N, 16D, 18D10, 18E, 14L, 16G60, 13E10, 17C.

SUMMARY. For K a field, a ***Wedderburn*** *K-linear category* is a K-linear category $\mathcal{A}$ whose radical $\mathcal{R}$ is locally nilpotent and such that $\bar{\mathcal{A}} := \mathcal{A}/\mathcal{R}$ is semi-simple and remains so after any extension of scalars. We prove existence and uniqueness results for sections of the projection $\mathcal{A} \to \bar{\mathcal{A}}$, in the vein of the theorems of Wedderburn. There are two such results : one in the general case and one when $\mathcal{A}$ has a monoidal structure for which $\mathcal{R}$ is a monoidal ideal. The latter applies notably to Tannakian categories over a field of characteristic zero, and we get a generalisation of the Jacobson-Morozov theorem : the existence of a *pro-reductive envelope* ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ associated to any affine group scheme G over K (${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(\mathbb{G}_a) = SL_2$, and ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ is infinite-dimensional for any bigger unipotent group). Other applications are given in this paper as well as in the note [1] on motives.

INTRODUCTION

En algèbre non commutative, on rencontre d'abord, par ordre de complexité croissant, les anneaux semi-simples, puis les anneaux semi-primaires, c'est-à-dire les extensions d'un anneau semi-simple par un idéal nilpotent (le radical). Parmi ces derniers, le cas où l'anneau semi-simple est en fait une algèbre séparable est particulièrement agréable puisque, d'après un théorème classique de Wedderburn, l'extension par le radical se scinde.

Par ailleurs, en renversant la tautologie qui identifie tout anneau à une catégorie additive à un seul objet, on peut considérer les catégories additives comme des anneaux à plusieurs objets. Ce point de vue, popularisé par B. Mitchell et R. Street, permet de s'inspirer largement de l'algèbre non commutative dans les questions catégoriques. Comme tous premiers exemples, on obtient la notion d'idéal, et celle de radical, d'une catégorie additive.

Suivant ce point de vue, le premier thème de cet article est l'étude des catégories semi-primaires, extensions d'une catégorie semi-simple par un idéal vérifiant une condition convenable de nilpotence (*cf.* définition 2.3.1), et de l'analogue catégorique du théorème de Wedderburn. Le second thème est l'étude du radical en présence d'une structure monoïdale. Ces thèmes se rejoignent dans une version monoïdale du théorème de Wedderburn (théorèmes 13.2.1 et 15.3.5).

Nous donnons deux applications principales de ces résultats. La première est la construction de l'*enveloppe pro-réductive* ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ d'un groupe algébrique linéaire quelconque G en caractéristique nulle. Les représentations indécomposables de G sont en bijection avec les représentations irréductibles de ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$, et ceci caractérise ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ si K est algébriquement clos (proposition 19.3.4). Le prototype est ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(\mathbb{G}_a) = SL_2$ (théorème de Jacobson-Morozov). Toutefois, ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ n'est en général pas de dimension finie : cela arrive déjà pour $G = \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$. L'existence même de ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ n'en implique pas moins une série de résultats concrets sur les représentations indécomposables des groupes algébriques.

La seconde application concerne la catégorie des motifs purs construits en termes d'une équivalence adéquate quelconque (fixée) pour les cycles algébriques. Nous détaillerons ailleurs (voir déjà

[1]), en nous contentant dans ce texte de brèves allusions, notamment dans la deuxième partie. Indiquons ici seulement que l'on s'attend à ce qu'une telle catégorie de motifs soit semi-primaire, de radical compatible à la structure monoïdale (cela découlerait de la conjecture de Beilinson-Murre et des conjectures standard de Grothendieck) ; par ailleurs, nous nous appuyons dans [1] sur notre version monoïdale du théorème de Wedderburn pour construire inconditionnellement les groupes de Galois motiviques.

En fait, l'un des projets directeurs de ce travail a été de séparer nettement ce qui dans la théorie encore largement conjecturale des motifs purs est de nature purement catégorique, et ce qui est de nature géométrique.

Décrivons plus en détail les quatre parties de ce travail.

Les deux premiers paragraphes (et l'appendice) contiennent une discussion des notions catégoriques fondamentales d'idéal, de radical (noté $\mathrm{rad}\mathcal{A}$), semi-simplicité, semi-primarité, etc...

On y introduit la notion de *K-catégorie de Wedderburn*, qui joue un rôle important dans la suite (K étant un corps) : en supposant pour simplifier l'existence de biproduits finis, il s'agit d'une catégorie $\mathcal{A}$ dont les ensembles de morphismes $\mathcal{A}(A,B)$ sont des K-espaces vectoriels (la composition étant K-linéaire), telle que les $\mathrm{rad}\mathcal{A}(A,A)$ soient des idéaux nilpotents des algèbres d'endomorphismes $\mathcal{A}(A,A)$, et telle que les K-algèbres $(\mathcal{A}/\mathrm{rad}\mathcal{A})(A,A)$ soient séparables, *i.e.* absolument semi-simples.

Cette condition de nilpotence est assez faible, et on montre au §3 qu'on ne peut guère la renforcer sans restreindre considérablement le champ d'application de la théorie. Dans le cas de catégories de modules, l'analyse de ces conditions de nilpotence s'avère intimement liée à celle des carquois d'Auslander-Reiten.

Bien que le radical se comporte "mal" en général par extension des scalaires, on montre au §4 que la situation est meilleure dans le cas d'une K-catégorie de Wedderburn. Cette première partie se termine par l'étude et la comparaison (§5) de deux notions d'extensions des scalaires pour les K-catégories que l'on rencontre dans la littérature.

L'objectif de la seconde partie est d'étudier en détail le radical d'une catégorie monoïdale symétrique rigide (*i.e.* dont les objets ont des duaux). Il se trouve qu'il n'est pas compatible à la structure monoïdale en général (un exemple de ce phénomène est donné par la catégorie des représentations de GL_p en caractéristique $p > 0$). Nous comparons chemin faisant le radical au plus grand idéal propre compatible à la structure monoïdale, et analysons le quotient de la catégorie par son radical. Actions du groupe symétrique, puissances extérieures et symétriques sont mises en œuvre dans cette optique. Nous nous sommes largement inspirés du récent travail de Kimura [32] sur les motifs de Chow "de dimension finie".

On montre que le radical d'une catégorie tannakienne sur un corps de caractéristique nulle est toujours monoïdal, et qu'une telle catégorie est toujours de Wedderburn. Les théorèmes 8.2.2 et 8.2.4 de ce paragraphe, beaucoup plus généraux, contiennent une version abstraite des résultats de Jannsen sur les motifs numériques et de Kimura sur les motifs de Chow [25, 32]. Une attention particulière a été portée aux variantes $\mathbf{Z}/2$-graduées, en vue des applications aux motifs. En particulier, nous faisons le lien entre la théorie de Kimura [32] et la question de l'algébricité des projecteurs de Künneth pairs (théorème 9.2.1). Notre résultat le plus abouti est le théorème suivant : si on définit une *catégorie de Kimura* comme étant une catégorie K-linéaire pseudo-abélienne monoïdale symétrique rigide, où K est un corps de caractéristique zéro, dont tout objet est de dimension finie au sens de Kimura (voir section 9), on a (théorème 9.2.2) :

Théorème 1. *Toute catégorie de Kimura $\mathcal{A}$ est de Wedderburn. Son radical $\mathcal{R}$ est monoïdal, et la catégorie quotient $\mathcal{A}/\mathcal{R}$ est semi-simple tannakienne, après changement convenable de la contrainte de commutativité.*

La troisième partie débute sur le rappel d'une version catégorique, due à Mitchell, de la cohomologie de Hochschild ; elle nous sert à prouver le point a) de l'analogue catégorique suivant du théorème de Wedderburn-Malcev (*cf.* théorèmes 12.1.1, 13.2.1 et 15.3.5).

Théorème 2. *a) Soit $\mathcal{A}$ une K-catégorie de Wedderburn, et soit $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ le foncteur de projection. Alors π admet une section fonctorielle. Deux telles sections sont conjuguées.*
b) Si $\mathcal{A}$ est monoïdale avec $End(\mathbf{1}) = K$, et si le radical est compatible à la structure monoïdale (de sorte que π est un foncteur monoïdal), π admet une section monoïdale. Deux telles sections sont conjuguées par un isomorphisme monoïdal.
c) Si enfin $\mathcal{A}$ est symétrique, toute section monoïdale est symétrique (c'est-à-dire respecte les tressages) à condition que $\mathrm{car}\, K \neq 2$.

La preuve de b), très technique, se trouve au §13. Elle utilise aussi la cohomologie de Hochschild pour l'algèbre libre sur les objets de la catégorie. Ainsi, a) repose essentiellement sur le fait qu'une K-algèbre séparable est de dimension 0 (au sens de [11, ch. IX, §7]), tandis que b) repose sur le fait qu'une K-algèbre libre est de dimension 1...

La compatibilité des sections monoïdales à des tressages, dont il s'agit au point c) du théorème 2, est étudiée en détail au §15. Elle n'est pas automatique ; toutefois, en caractéristique différente de 2, si le tressage résiduel est symétrique, son image par toute section monoïdale s donne lieu à un tressage symétrique canonique sur $\mathcal{A}$, indépendant du choix de s et qui ne coïncide avec le tressage originel que si celui-ci était symétrique. Ceci s'applique notamment, en caractéristique zéro, à la quantification de Drinfeld-Cartier d'une catégorie monoïdale symétrique munie d'un tressage infinitésimal (exemple 15.3.6).

Le théorème 2 s'applique en particulier aux catégories de Kimura, en vertu du théorème 1 (*cf.* théorème 16.1.1).

Au §14, on confère une structure géométrique aux constructions précédentes : groupoïdes pro-unipotents des sections (*resp.* des sections monoïdales).

La dernière partie explore les conséquences des résultats précédents en théorie des représentations.

Le §18 est consacré à l'étude de $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$, lorsque $\mathcal{A}$ est la catégorie des représentations d'un schéma en groupes affine G (par exemple un groupe algébrique linéaire) sur un corps K de caractéristique nulle. On peut conclure des résultats précédents que $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ est équivalente à catégorie des représentations d'un schéma en groupes pro-réductif ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ contenant G.

Il est plus technique de rendre cette construction canonique. La question se simplifie si l'on travaille, comme au §19, dans la catégorie $\overline{\mathrm{Gaff}}_K$ dont les objets sont les K-groupes affines et les morphismes $G \to H$ sont donnés par les ensembles quotients de $Hom_K(G, H)$ par la relation d'équivalence $\sim$ telle que $f \sim g$ s'il existe $h \in H_K$ tel que $g = hfh^{-1}$. Soit $\overline{\mathrm{Gred}}_K$ la sous-catégorie pleine formée des groupes pro-réductifs. Alors (*cf.* théorème 19.3.1) :

Théorème 3. *Le foncteur d'inclusion $\overline{\mathrm{Gred}}_K \to \overline{\mathrm{Gaff}}_K$ admet un adjoint (et quasi-inverse) à gauche : $G \mapsto {}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$.*

On en déduit une série de résultats concrets concernant d'une part la structure des groupes algébriques, et d'autre part les représentations indécomposables des groupes algébriques.

L'une de ces applications concerne la notion d'*enveloppe réductive* d'un sous-groupe fermé d'un groupe réductif, *i.e.* de sous-groupe réductif intermédiaire minimal. On a (*cf.* théorème 20.1.3)

Théorème 4. *Deux enveloppes réductives de G dans H sont toujours conjuguées par un élément de $h \in H(K)$ commutant à G.*

Dans un paragraphe antérieur, on examine l'avatar non monoïdal, plus simple, de ces constructions, ce qui mène à la notion d'enveloppe semi-simple d'une algèbre profinie (sur un corps parfait). Ces enveloppes sont intimement liées aux algèbres d'Auslander. Nous les calculons dans le cas des algèbres héréditaires de dimension finie.

Enfin, dans un appendice, nous donnons pour mémoire diverses caractérisations des catégories semi-simples, dont la plupart sont sans doute bien connues des spécialistes.

Les auteurs se sont beaucoup amusés à écrire cet article, dont l'élaboration s'est révélée jusqu'au bout pleine de rebondissements. Ils craignent que ce côté ludique n'échappe aux lecteurs. Ils espèrent néanmoins que ceux-ci prendront plaisir à lire l'énoncé de certains théorèmes.

Post-scriptum. Après la soumission de cet article, nous avons appris que Peter J. O'Sullivan avait introduit et étudié les catégories que nous avons baptisées catégories de Kimura au §9 de manière indépendante, sous le nom de *catégories semi-positives*. Il a obtenu la plupart des résultats du §9, et bien plus, à l'exception toutefois du théorème de nilpotence 9.1.14. Néanmoins, il a pu utiliser ses résultats pour obtenir une démonstration du théorème 2 ci-dessus dans le cas particulier des catégories de Kimura (qu'il faudrait maintenant rebaptiser catégories de Kimura-O'Sullivan), totalement différente de la nôtre et beaucoup plus géométrique. Il a ainsi démontré l'existence des enveloppes pro-réductives de manière indépendante de notre travail [44].

Par ailleurs, O'Sullivan a apporté une réponse complète à notre question 19.7.2 : voir son appendice dans cet article.

I. Radicaux et nilpotence

L'objectif de cette partie est l'étude des catégories qui sont extensions d'une catégorie additive semi-simple par un "idéal" (localement) nilpotent. Comme en algèbre non commutative, la notion de radical joue ici un rôle de premier plan. On étudie aussi ce qui lui arrive par extension des scalaires.

1. Idéaux et radicaux

Soit K un anneau commutatif unitaire. Pour prévenir les paradoxes ensemblistes, il est utile de fixer dès à présent un univers $\mathcal{U}$ (contenant K). Les ensembles d'objets et de flèches d'une *petite* catégorie se trouvent donc dans $\mathcal{U}$.

1.1. **K-catégories, catégories K-linéaires et K-catégories pseudo-abéliennes.** Par *K-catégorie*, nous entendons une catégorie telle que pour tout couple d'objets (A, B), les morphismes de A vers B forment un K-module $\mathcal{A}(A, B)$, et que la composition des morphismes soit K-linéaire (pour $K = \mathbf{Z}$, on dit aussi catégorie pré-additive).

Un *K-foncteur* entre deux K-catégories est un foncteur K-linéaire (sur les K-modules de morphismes).

Étant donné deux objets $A, A' \in \mathcal{A}$, un *biproduit* de (A, A') est un système (C, i, i', p, p'), avec $C \in \mathcal{A}$, $i \in \mathcal{A}(A, C)$, $i' \in \mathcal{A}(A', C)$, $p \in \mathcal{A}(C, A)$, $p' \in \mathcal{A}(C, A')$, le tout vérifiant les identités

$$pi = 1_A, \quad p'i' = 1_B, \quad ip + i'p' = 1_C. \tag{1.1}$$

Un tel biproduit, s'il existe, est à la fois un produit et un coproduit et est déterminé à isomorphisme unique près. On dit que $\mathcal{A}$ est *K-linéaire* si tout couple (A, A') d'objets de $\mathcal{A}$ admet un biproduit. Le choix d'un tel biproduit pour chaque couple d'objets (A, A') d'une petite catégorie K-linéaire $\mathcal{A}$ définit alors un K-foncteur $\oplus : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, déterminé à isomorphisme naturel *unique* près, qui fait de $\mathcal{A}$ une catégorie monoïdale symétrique (l'unité étant l'objet nul).

D'après une variante de [36, ch. VIII, prop. 4], un foncteur $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre deux catégories K-linéaires est un K-foncteur si et seulement s'il transforme un biproduit en un biproduit. Si on s'est donné des biproduits $\oplus$ sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, il existe alors un isomorphisme naturel canonique $\oplus \circ (T, T) \cong T \circ \oplus$.

Enfin, une K-catégorie $\mathcal{A}$ est *pseudo-abélienne* si tout projecteur a un noyau (et une image) : pour tout objet $A \in \mathcal{A}$ et tout élément $e \in \mathcal{A}(A, A)$ vérifiant $e^2 = e$, il existe un objet $B \in \mathcal{A}$ et un morphisme $f : B \to A$ tel que f soit un noyau de $(0, e)$. Si (C, g) est un noyau de $1 - e$, le morphisme $f \coprod g : B \oplus C \to A$ est alors un isomorphisme.

Toute K-catégorie abélienne est K-linéaire et pseudo-abélienne.

1.1.1**. Remarque.** La terminologie varie suivant les auteurs. Ainsi, Saavedra [53, I.0.1.2] appelle catégorie K-linéaire ce que nous appelons K-catégorie. De même, une catégorie pseudo-abélienne est souvent appelée *karoubienne*[1].

On a les définitions suivantes, étroitement liées aux précédentes :

1.1.2**. Définition.** Une sous-catégorie pleine $\mathcal{B}$ d'une K-catégorie $\mathcal{A}$ est

(i) *épaisse* si elle est stable par facteur directs (représentables dans $\mathcal{A}$) ;

(ii) *localisante* si elle est épaisse et stable par sommes directes quelconques (représentables dans $\mathcal{A}$).

1.1.3**. Sorite.** *Soient $\mathcal{A},\mathcal{B}$ deux K-catégories et T,T' deux K-foncteurs de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$. Soit $u : T \Rightarrow T'$ une transformation naturelle. Alors, pour tout biproduit $A \oplus B$ dans $\mathcal{A}$, on a*

$$u_{A\oplus B} = u_A \oplus u_B$$

modulo les isomorphismes naturels $T(A \oplus B) \simeq T(A) \oplus T(B)$. □

1.2. **Complétions.** Étant donné une K-catégorie $\mathcal{A}$, on peut former son enveloppe K-linéaire $\mathcal{A}^{\oplus}$ (adjonction de sommes directes finies, cf. [30, §2]), son enveloppe pseudo-abélienne $\mathcal{A}^{\natural}$ (scindage d'idempotents, cf. [38, §1,§11]), et son enveloppe K-linéaire pseudo-abélienne $\mathcal{A}^{\oplus\natural}$ (parfois appelée complétion projective, ou de Cauchy, ou de Karoubi. . .), formant un carré de sous-catégories pleines

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{A}^{\oplus} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \mathcal{A} & & & & \mathcal{A}^{\oplus\natural}. \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \mathcal{A}^{\natural} & & \end{array} \tag{1.2}$$

Pour référence, rappelons les constructions de $\mathcal{A}^{\oplus}$ et de $\mathcal{A}^{\natural}$:

1.2.1. $\mathcal{A}^{\oplus}$. Les objets sont des suites finies $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ d'objets de $\mathcal{A}$, notées $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$ [30, §2]. Les morphismes entre $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$ et $A'_1 \oplus A'_2 \oplus \cdots \oplus A'_m$ sont donnés par les matrices dont le coefficient d'ordre (i, j) est dans $\mathcal{A}(A_i, A'_j)$ (se composant selon la règle usuelle).

Cette construction est 2-covariante en $\mathcal{A}$: un foncteur $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ étant donné, on lui associe foncteur $T^{\oplus} : \mathcal{A}^{\oplus} \to \mathcal{B}^{\oplus}$ construit sur T composante par composante. Il est donc "strictement additif" par définition : l'isomorphisme canonique $T^{\oplus}(X) \oplus T^{\oplus}(Y) = T^{\oplus}(X \oplus Y)$ est l'identité pour tout couple d'objets (X, Y) de $\mathcal{A}^{\oplus}$. De même, à une transformation naturelle $u : T \Rightarrow T'$ correspond une transformation naturelle $u^{\oplus} : T^{\oplus} \Rightarrow T'^{\oplus}$ sur le modèle du sorite 1.1.3.

[1]Cette notion n'est pas spécifiquement additive, *cf.* par exemple [53, VI.4.1.2.1].

1.2.2. $\mathcal{A}^\natural$. Les objets sont les couples (A, e) avec $A \in \mathcal{A}$ et $e \in \mathcal{A}(A, A)$ vérifiant $e^2 = e$. Pour un autre tel couple (B, f), on pose

$$\mathcal{A}^\natural((A, e), (B, f)) = f\mathcal{A}(A, B)e \subset \mathcal{A}(A, B).$$

Les morphismes se composent de manière évidente. Cette construction est également 2-covariante en $\mathcal{A}$ ($T^\natural(A, e) = (T(A), T(e))$, $u^\natural_{(A,e)} = T'(e)u_A T(e)$).

1.2.3. *Propriétés universelles.* Les deux constructions ci-dessus ont des propriétés universelles. Quitte à introduire des 2-catégories, on peut les interpréter comme des adjoints à gauche. Soit $\{K\}$ la 2-catégorie dont les objets sont les petites K-catégories, les 1-morphismes les K-foncteurs et les 2-morphismes les transformations naturelles. Soient $\{K\}^\oplus, \{K\}^\natural, \{K\}^{\oplus\natural}$ les sous-2-catégories pleines de $\{K\}$ (mêmes 1-morphismes et mêmes 2-morphismes) formées des catégories K-linéaires, pseudo-abéliennes et K-linéaires pseudo-abéliennes. Alors :

1.2.1**. Sorite.** *a) Pour tout couple de petites K-catégories $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, avec $\mathcal{B}$ K-linéaire, les foncteurs de restriction*

$$\{K\}^\oplus(\mathcal{A}^\oplus, \mathcal{B}) \to \{K\}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$
$$\{K\}^\natural(\mathcal{A}^\natural, \mathcal{B}) \to \{K\}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

sont pleinement fidèles et surjectifs. De plus, pour tout $T \in \{K\}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, la fibre de T est un groupoïde à groupes d'automorphismes triviaux.
b) Pour tout couple de petites K-catégories $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, les foncteurs

$$\{K\}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \to \{K\}^\oplus(\mathcal{A}^\oplus, \mathcal{B}^\oplus)$$
$$\{K\}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \to \{K\}^\natural(\mathcal{A}^\natural, \mathcal{B}^\natural)$$

sont pleinement fidèles (mais pas essentiellement surjectifs en général). □

(Le fait que les foncteurs considérés en a) ne soient pas bijectifs sur les objets provient des choix possibles de biproduits et de noyaux.)

1.3. **Algèbres à plusieurs objets.** Dans cet article, nous adoptons le point de vue de B. Mitchell [38] et considérons les K-catégories comme des “K-algèbres (associatives) à plusieurs objets”.

Suivant ce point de vue, un idéal (bilatère) $\mathcal{I}$ d'une K-catégorie $\mathcal{A}$ est la donnée, pour tout couple d'objets (A, B), d'un sous-K-module de $\mathcal{I}(A, B) \subset \mathcal{A}(A, B)$ tel que pour tout couple de morphismes $(f \in \mathcal{A}(A, A'), g \in \mathcal{A}(B, B'))$, on ait $g\mathcal{I}(A', B)f \subset \mathcal{I}(A, B')$.

On peut alors former la K-catégorie quotient $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ (qui a les mêmes objets que $\mathcal{A}$). Si $A = \oplus A_i, B = \oplus B_j$, alors $\mathcal{I}(A, B)$ s'identifie canoniquement à $\oplus_{i,j}\mathcal{I}(A_i, B_j)$.

1.3.1**. Exemple.** Si X est un ensemble d'objets de $\mathcal{A}$, stable par biproduit, la famille d'ensembles

$$\mathcal{I}_X(A, B) = \{f \in \mathcal{A}(A, B) \mid f \text{ se factorise à travers un objet de } X\}$$

est un idéal de $\mathcal{A}$. Le quotient $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ est souvent noté $\mathcal{A}/X$.

On a une notion évidente d'idéal produit (*resp.* somme, *resp.* intersection) de deux idéaux $\mathcal{I}\cdot\mathcal{J}$ (*resp.* $\mathcal{I}+\mathcal{J}$, *resp.* $\mathcal{I}\cap\mathcal{J}$). On prendra toutefois garde de ne pas confondre les idéaux $(\mathcal{I}\cdot\mathcal{J})(A,A)=\{\sum f\circ g, B\in Ob\mathcal{A}, f\in\mathcal{A}(B,A), g\in\mathcal{A}(A,B)\}$ et $\mathcal{I}(A,A)\cdot\mathcal{J}(A,A)$ de la K-algèbre $\mathcal{A}(A,A)$.

Le noyau d'un K-foncteur est l'idéal $\operatorname{Ker} T$ de $\mathcal{A}$ formé des morphismes que T annule ; T induit une K-équivalence entre le quotient $\mathcal{A}/\operatorname{Ker} T$ et une sous-catégorie non pleine de $\mathcal{B}$.

1.3.2**. Lemme.** *Supposons $\mathcal{A}$ K-linéaire. Soient $\mathcal{I},\mathcal{J}$ deux idéaux de $\mathcal{A}$. Supposons que $\mathcal{I}(A,A)\subset\mathcal{J}(A,A)$ pour tout objet A de $\mathcal{A}$. Alors $\mathcal{I}\subset\mathcal{J}$.*

Démonstration. Soient $A,B\in\mathcal{A}$. On a $\mathcal{A}(A\oplus B,A\oplus B)=\mathcal{A}(A,A)\oplus\mathcal{A}(A,B)\oplus\mathcal{A}(B,A)\oplus\mathcal{A}(B,B)$. En utilisant les injections de A et B dans $A\oplus B$ et les projections de $A\oplus B$ sur A et B, on voit que $\mathcal{A}(A,B)\cap\mathcal{I}(A\oplus B,A\oplus B)=\mathcal{I}(A,B)$, et de même pour $\mathcal{J}$. Le lemme en résulte. □

Notons K-Mod la catégorie K-linéaire des K-modules.

1.3.3**. Définition.** Un $\mathcal{A}$-*module* (à gauche) est un K-foncteur $M:\mathcal{A}\to K$-Mod. Il est dit *fini* si tous les $M(A)$ sont de type fini sur K.

Les $\mathcal{A}$-modules (*resp.* les $\mathcal{A}$-modules finis) forment une catégorie abélienne K-linéaire, notée $\mathcal{A}$–Mod [2] (*resp.* $\mathcal{A}$–$Modf$). Tout K-foncteur $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ induit par composition des K-foncteurs en sens inverse $F^*:\mathcal{B}$–$Mod\to\mathcal{A}$–Mod et $F^*:\mathcal{B}$–$Modf\to\mathcal{A}$–$Modf$.

Nous aurons aussi besoin de la notion suivante :

1.3.4**. Définition.** Soit $A\in\mathcal{A}$. Un A-*idéal à gauche* de $\mathcal{A}$ est la donnée, pour tout $B\in\mathcal{A}$, d'un sous-K-module $\mathcal{I}(B)$ de $\mathcal{A}(A,B)$, telle que la famille des $\mathcal{I}(B)$ soit stable par composition à gauche.

On a une notion évidente d'idéal à gauche somme (*resp.* intersection) de deux idéaux à gauche.

Pour tout $A\in\mathcal{A}$, notons ${}_A\mathcal{A}$ le foncteur $B\mapsto\mathcal{A}(A,B)$. Ceci définit un K-foncteur contravariant

$$\begin{aligned} Y_{\mathcal{A}}:\mathcal{A}^{\mathrm{o}}&\to\mathcal{A}\text{–}Mod\\ A&\mapsto {}_A\mathcal{A}.\end{aligned}$$

Pour que l'image de $Y_{\mathcal{A}}$ soit contenue dans $\mathcal{A}$–$Modf$, il faut et il suffit que $\mathcal{A}(A,B)$ soit un K-module de type fini pour tous $A,B\in\mathcal{A}$. De ce point de vue, un A-idéal à gauche n'est autre qu'un sous-objet de ${}_A\mathcal{A}$.

On a dualement les catégories Mod–$\mathcal{A}$ et $Modf$–$\mathcal{A}$ des $\mathcal{A}$-modules à droite[3] et des $\mathcal{A}$-modules à droite finis (contravariants), ainsi que les A-idéaux à droite. On a le K-foncteur covariant

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{A}}Y:\mathcal{A}&\to Mod\text{–}\mathcal{A}\\ A&\mapsto\mathcal{A}_A: B\mapsto\mathcal{A}(B,A).\end{aligned}$$

[2]Notation compatible à la précédente si l'on considère K comme catégorie à un seul objet.

[3]C'est celle considérée par Street [57].

1.3.5. **Définition.** Un objet X d'une catégorie $\mathcal{C}$ est *compact* si le foncteur $Y \mapsto \mathcal{C}(X, Y)$ commute aux limites inductives quelconques (représentables dans $\mathcal{C}$).

Le résultat suivant est bien connu (par exemple [36, III.2 et III.7], [57]) :

1.3.6. **Proposition.** *a) Pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $M \in Mod\text{–}\mathcal{A}$, l'homomorphisme*

$$\begin{aligned} Mod\text{–}\mathcal{A}(\mathcal{A}_A, M) &\to M(A) \\ f &\mapsto f(1_A) \end{aligned}$$

est bijectif.
b) Le foncteur ${}_{\mathcal{A}}Y$ est pleinement fidèle. Un module appartenant à son image essentielle est dit représentable.
c) La catégorie $Mod\text{–}\mathcal{A}$ est stable par limites inductives et projectives quelconques.
d) Tout objet M de $Mod\text{–}\mathcal{A}$ est limite inductive d'objets représentables.
e) Si $\mathcal{A}$ est stable par limites inductives quelconques, le foncteur ${}_{\mathcal{A}}Y$ admet un adjoint à gauche $\varinjlim : Mod\text{–}\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, qui en est aussi un inverse à gauche.
f) Pour tout objet M de $Mod\text{–}\mathcal{A}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *M est compact.*

(ii) *Pour tout système inductif $(N_i)_{i \in I}$ d'objets de $Mod\text{–}\mathcal{A}$ indexé par une petite catégorie I, l'homomorphisme*

$$\varinjlim Mod\text{–}\mathcal{A}(M, N_i) \to Mod\text{–}\mathcal{A}(M, \varinjlim N_i)$$

est surjectif.

(iii) *M est facteur direct d'une somme directe d'objets représentables*[4].

De plus, M est projectif.

Rappelons rapidement la démonstration, pour la commodité du lecteur. Dans a) (lemme de Yoneda enrichi), l'application inverse est donnée par $m \mapsto (f \mapsto M(f)m)$. b) en résulte immédiatement. c) est clair, puisque $K\text{–}Mod$ a la même propriété : les limites se calculent “argument par argument”.

Pour voir d), on considère la catégorie $\mathcal{C}$ dont les objets sont les couples (A, x) avec $A \in \mathcal{A}$ et $x \in M(A)$, un morphisme $(A, x) \to (B, y)$ étant un morphisme $f \in \mathcal{A}(A, B)$ tel que $M(f)(x) = y$: par a), le système inductif

$$\begin{aligned} T : \mathcal{C} &\to Mod\text{–}\mathcal{A} \\ (A, x) &\mapsto \mathcal{A}_A \end{aligned}$$

s'envoie vers M et on vérifie que $\varinjlim T \to M$ est un isomorphisme.

On déduit e) de d) comme suit : soit $M \in Mod\text{–}\mathcal{A}$. Écrivons $M = \varinjlim \mathcal{A}_{A_i}$: on définit alors $\varinjlim M = \varinjlim A_i$. On utilise b) pour montrer que ce foncteur est bien défini et pour vérifier sa propriété d'adjonction.

On déduit également f) de a) et d) comme suit : (iii) $\Longrightarrow$ (i) résulte immédiatement de a). (i) $\Longrightarrow$ (ii) est évident. Pour voir que (ii) $\Longrightarrow$ (iii), soit M un objet vérifiant (ii) : écrivons $M = \varinjlim_{i \in I} \mathcal{A}_{A_i}$, où I est une petite catégorie. Il existe alors un

[4] Si $\mathcal{A}$ est K-linéaire pseudo-abélienne, cette condition équivaut au fait que M soit représentable.

ensemble fini I_0 d'objets de I tel que l'identité : $M \to M$ se factorise à travers $\bigoplus_{i\in I_0} \mathcal{A}_{A_i}$.

Enfin, la dernière assertion résulte du lemme A.1.2. □

1.3.7. **Remarques.**

a) On laisse au lecteur le soin d'obtenir les énoncés correspondants pour $\mathcal{A}$–Mod, en remplaçant $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}^o$.

b) On dit qu'un objet $M \in Mod$–$\mathcal{A}$ est *de présentation finie* si le foncteur ${}_M Mod$–$\mathcal{A}$ commute aux limites inductives *filtrantes*. (Comme il est additif, il commute alors aussi aux sommes directes quelconques.) On se gardera de confondre cette notion avec celle d'objet compact, qui est plus restrictive. On peut montrer que M est de présentation finie si et seulement s'il s'insère dans une suite exacte

$$P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

où P_1 et P_0 sont compacts.

Voici une réciproque de la proposition 1.3.6 :

1.3.8. **Proposition.** *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne stable par limites inductives quelconques. Notons $\mathcal{A}_{\rm comp}$ la sous-catégorie pleine de ses objets compacts. Supposons $\mathcal{A}_{\rm comp}$ dense dans $\mathcal{A}$, c'est-à-dire que tout objet de $\mathcal{A}$ est limite inductive d'objets de $\mathcal{A}_{\rm comp}$. Alors le foncteur "de Yoneda"*

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &\to Mod\text{–}\mathcal{A}_{\rm comp}\\ A &\mapsto (\mathcal{A}_A : C \mapsto \mathcal{A}(C,A))\end{aligned}$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. La pleine fidélité se démontre comme dans le lemme de Yoneda enrichi : Si $A \in \mathcal{A}$ est limite inductive d'objets compacts C_i et $M \in Mod$–$\mathcal{A}_{\rm comp}$, l'homomorphisme

$$\begin{aligned}Mod\text{–}\mathcal{A}_{\rm comp}(\mathcal{A}_A, M) &\to \varprojlim M(C_i)\\ f &\mapsto (f(\iota_i))\end{aligned}$$

où ι_i est le morphisme $C_i \to A$, est un isomorphisme d'inverse $(m_i) \mapsto (g \mapsto M(g_i)m_i)$ pour $C \in \mathcal{A}_{\rm comp}$ et $g \in \mathcal{A}(C,A) = \varinjlim \mathcal{A}(C,C_i)$ écrit sous la forme $\iota_i \circ g_i$ pour i assez grand. On en déduit que, pour $A, B \in \mathcal{A}$,

$$Mod\text{–}\mathcal{A}_{\rm comp}(\mathcal{A}_A, \mathcal{A}_B) \xrightarrow{\sim} \varprojlim \mathcal{A}_B(C_i) = \varprojlim \mathcal{A}(C_i, B) = \mathcal{A}(A,B).$$

Pour l'essentielle surjectivité, on utilise le fait que $\mathcal{A}_{\rm comp}$ est dense dans Mod–$\mathcal{A}_{\rm comp}$ d'après la proposition 1.3.6 d). □

La construction $\mathcal{A} \mapsto Y_{\mathcal{A}}$ *n'est pas* 2-fonctorielle en $\mathcal{A}$. Par contre :

1.3.9. **Corollaire** (*cf.* [57, p. 140]). *Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un K-foncteur. Alors F^* : $\mathcal{B}$–$Mod \to \mathcal{A}$–Mod est une équivalence de catégories si et seulement si $F^{\oplus\natural}$ est une équivalence de catégories. On dit alors que F est une* équivalence de Morita. □

Démonstration. Cela résulte immédiatement de la proposition 1.3.6 f). □

1.3.10**. Lemme.** *Soit $A \in \mathcal{A}$; notons encore A son image dans $\mathcal{A}^{\oplus}$, $\mathcal{A}^{\natural}$ et $\mathcal{A}^{\oplus\natural}$. Alors*
a) Il y a bijection entre les A-idéaux à gauche dans $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^{\oplus}$, $\mathcal{A}^{\natural}$ et $\mathcal{A}^{\oplus\natural}$.
b) Il y a bijection entre les idéaux (bilatères) dans $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^{\oplus}$, $\mathcal{A}^{\natural}$ et $\mathcal{A}^{\oplus\natural}$.
c) Pour tout idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$, notons $\mathcal{I}^{\oplus}$ l'idéal correspondant de $\mathcal{A}^{\oplus}$. Alors on a un isomorphisme canonique $\mathcal{A}^{\oplus}/\mathcal{I}^{\oplus} = (\mathcal{A}/\mathcal{I})^{\oplus}$.
d) Pour tout idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$, notons $\mathcal{I}^{\natural}$ l'idéal correspondant de $\mathcal{A}^{\natural}$. Alors on a un foncteur canonique pleinement fidèle $\mathcal{A}^{\natural}/\mathcal{I}^{\natural} \to (\mathcal{A}/\mathcal{I})^{\natural}$. C'est un isomorphisme si et seulement si les idempotents des algèbres d'endomorphismes $(\mathcal{A}/\mathcal{I})(A, A)$ se relèvent en des idempotents des algèbres d'endomorphismes $\mathcal{A}(A, A)$.

Démonstration. a) : Cela résulte immédiatement de l'interprétation des A-idéaux à gauche comme étant les sous-modules du $\mathcal{A}$-module à gauche ${}_A\mathcal{A} : B \mapsto \mathcal{A}(A, B)$ et du fait que le carré (1.2) induit un carré d'équivalences de catégories (corollaire 1.3.9) :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{A}^{\oplus}\text{–}Mod \arrow[dr] & \\ \mathcal{A}\text{–}Mod \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathcal{A}^{\oplus\natural}\text{–}Mod. \\ & \mathcal{A}^{\natural}\text{–}Mod \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

b) : voir [57, prop. 2]

c) est immédiat.

d) : pour tout couple d'objets $(A, e), (A, e')$ de $\mathcal{A}^{\natural}$, on a

$$\mathcal{A}^{\natural}((A, e), (A', e')) = e'\mathcal{A}(A, A')e$$

et

$$\mathcal{I}^{\natural}((A, e), (A', e')) = e'\mathcal{I}(A, A')e.$$

On a donc

$$\mathcal{A}^{\natural}/\mathcal{I}^{\natural}((A, e), (A', e')) = \bar{e}'((\mathcal{A}/\mathcal{I})^{\natural}(A, A'))\bar{e} = (\mathcal{A}/\mathcal{I})^{\natural}((A, \bar{e}), (A', \bar{e}'))$$

où $\bar{e}, \bar{e}'$ désignent les images de e et e' modulo $\mathcal{I}$. Le foncteur $(A, e) \mapsto (A, \bar{e})$ est donc pleinement fidèle. L'hypothèse de relèvement des idempotents équivaut à dire qu'il est bijectif sur les objets. □

1.4. **Radical.** On démontre [30] que

$$\operatorname{rad}(\mathcal{A})(A, B) = \\ \{f \in \mathcal{A}(A, B) \mid \text{pour tout } g \in \mathcal{A}(B, A), 1_A - gf \text{ est inversible}\}$$

définit un idéal $\operatorname{rad}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$.

1.4.1**. Définition.** Cet idéal s'appelle le *radical* de $\mathcal{A}$.

Si $\mathcal{A}$ est une K-algèbre, vue comme K-catégorie à un seul objet, on retrouve une définition du radical de Jacobson.

1.4.2. **Remarque.** Un autre radical a été introduit dans la thèse de Gabriel [16] (c'est celui qui est évoqué dans [10]) :

$$\mathrm{rad}'(\mathcal{A})(A,B) = \{f \in \mathcal{A}(A,B) \mid \text{pour tout } g \in \mathcal{A}(B,A), gf \text{ est nilpotent}\}.$$

On pourrait donc parler de radical de Gabriel et de radical de Kelly (le dernier étant une version catégorique du radical de Jacobson. . .) On a évidemment $\mathrm{rad}'(\mathcal{A}) \subset \mathrm{rad}(\mathcal{A})$, avec égalité si et seulement si, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathrm{rad}(\mathcal{A})(A,A)$ est un nilidéal.

La caractérisation suivante de rad' est parfois utile :

1.4.3. **Lemme.** *Soit $H : \mathcal{A} \to Projf_L$ un foncteur K-linéaire de $\mathcal{A}$ vers la catégorie des L-modules projectifs de type fini, où L est une K-algèbre. Alors, pour $(A,B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, on a*

$$\mathrm{rad}'\mathcal{A}(A,B) \subset \{f \in \mathcal{A}(A,B) \mid \forall g \in \mathcal{A}(B,A), trH(gf) = 0\},$$

avec égalité si H est fidèle et L est de caractéristique 0.

Démonstration. L'inclusion $\subset$ est claire, puisque la trace d'un endomorphisme nilpotent est nulle. Pour l'inclusion opposée, soit f un élément du second membre. Alors, pour tout $g \in \mathcal{A}(B,A)$ et tout $n \geq 1$, on a

$$trH(gf)^n = trH((gf)^n) = tr((gf)^{n-1}gf) = 0.$$

Comme L est de caractéristique 0, cela implique que $H(gf)$ est nilpotent, donc également gf par fidélité. □

1.4.4. **Proposition.** $a)$ *Le radical est le plus grand idéal $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ tel que $\mathrm{rad}(\mathcal{A})(A,A)$ soit contenu (resp. coïncide) avec le radical de Jacobson de $\mathcal{A}(A,A)$ pour tout objet A.*
$b)$ *C'est aussi le plus grand idéal de $\mathcal{A}$ tel que le foncteur quotient $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ soit conservatif, i.e. reflète les isomorphismes. Ce foncteur reflète aussi rétractions et corétractions*[5].

Voir [30, th. 1], [38, §4], [57, prop. 6]. On voit tout de suite que la notion de radical est auto-duale.

1.4.5. **Corollaire.** *Les radicaux des catégories $\mathcal{A}, \mathcal{A}^{\oplus}, \mathcal{A}^{\natural}$ et $\mathcal{A}^{\oplus\natural}$ se correspondent par les bijections du lemme 1.3.10 b).*

Démonstration. Cela découle du point a) de la proposition 1.4.4. □

1.4.6. **Définition.** Soit $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un K-foncteur entre deux K-catégories. Alors T est dit *radiciel* si $T(\mathrm{rad}(\mathcal{A})) \subset \mathrm{rad}(\mathcal{B})$.

1.4.7. **Lemme.** *Si T est plein, il est radiciel. D'autre part, si T est conservatif, on a $T^{-1}(\mathrm{rad}(\mathcal{B})) \subset \mathrm{rad}(\mathcal{A})$.*
Si T est radiciel et conservatif, on a $T^{-1}(\mathrm{rad}(\mathcal{B})) = \mathrm{rad}(\mathcal{A})$. Si T est même plein, $T(\mathrm{rad}(\mathcal{A}))$ est égal à la restriction de $\mathrm{rad}(\mathcal{B})$ à $T(\mathcal{A})$.

[5]Rappelons qu'une rétraction (*resp.* corétraction) est un morphisme inversible à droite (*resp.* à gauche) ; on dit aussi épimorphisme scindé (*resp.* monomorphisme scindé).

Démonstration. Le premier point découle immédiatement du point $a)$ de la proposition 1.4.4. Prouvons le second : soit $f \in \mathcal{A}(A,B)$ tel que $T(f) \in \mathrm{rad}(\mathcal{B})(T(A),T(B))$. Alors pour tout $g \in \mathcal{A}(B,A)$, $1_{T(A)} - T(g) \circ T(f)$ est inversible. Donc $1_A - g \circ f$ est inversible puisque T est conservatif. Prouvons la dernière assertion : T radiciel $\Longrightarrow \mathcal{A} \subset T^{-1}T(\mathrm{rad}(\mathcal{A})) \subset T^{-1}(\mathrm{rad}(\mathcal{B}))$, et T conservatif $\Longrightarrow T^{-1}(\mathrm{rad}(\mathcal{B})) \subset \mathrm{rad}(\mathcal{A})$, d'où $T^{-1}(\mathrm{rad}(\mathcal{B})) = \mathrm{rad}(\mathcal{A})$. Si T est plein, la dernière assertion en découle. □

1.4.8**. Mise en garde.** a) Si T est conservatif, l'inclusion $T^{-1}(\mathrm{rad}(\mathcal{B})) \subset \mathrm{rad}(\mathcal{A})$ devient fausse en général si l'on remplace les radicaux par leurs puissances n-ièmes, $n > 1$ (même si T est pleinement fidèle).
b) Il découle du premier point du lemme que pour tout idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$, $\mathrm{rad}(\mathcal{A}/\mathcal{I})$ contient l'image de $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ (la projection $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{I}$ est un foncteur plein) ; mais il en est en général distinct si $\mathcal{I} \not\subset \mathrm{rad}(\mathcal{A})$ (exemple : $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$).

1.4.9**. Lemme.** *Soit $\mathcal{A}$ une K-catégorie, et soit S un objet de $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A}(S,S)$ soit un corps (par exemple un objet simple dans un catégorie abélienne). Soit A un objet quelconque de $\mathcal{A}$. Alors tout morphisme $f \in \mathcal{A}(S,A)$ qui n'est pas dans le radical est une corétraction, et tout morphisme $g \in \mathcal{A}(A,S)$ qui n'est pas dans le radical est une rétraction. Si en outre $\mathcal{A}(S,S) = K$, alors*

$$\mathrm{rad}(\mathcal{A})(S,A) = \{f \in \mathcal{A}(S,A), \forall g \in \mathcal{A}(A,S), g \circ f = 0\}.$$

Démonstration. Par définition du radical, il existe $h \in \mathcal{A}(A,S)$ tel que $1_S - hf$ ne soit pas inversible dans $\mathcal{A}(S,S)$. Comme $\mathcal{A}(S,S)$ est un corps, ceci entraîne que $1_S = hf$. Pour g on raisonne dualement.

Prouvons la dernière assertion. Tout $f \in \mathcal{A}(S,A)$ tel que $g \circ f = 0$ pour tout $g \in \mathcal{A}(A,S)$ n'est pas une corétraction, donc appartient au radical. Réciproquement, si $f \in \mathrm{rad}(\mathcal{A})(S,A)$, alors, par définition, l'élément $1 - g \circ f$ de K est inversible, c'est-à-dire non nul, pour tout $g \in \mathcal{A}(A,S)$ par définition. Comme g peut être multiplié par toute constante de K, ceci entraîne $g \circ f = 0$. □

2. CATÉGORIES DE WEDDERBURN

Dans ce paragraphe, on suppose que K *est un corps.*

2.1. **Catégories semi-simples.**

2.1.1**. Définition.** Une K-catégorie est dite *semi-simple* si tout $\mathcal{A}$-module à gauche est semi-simple.

Cette notion est manifestement Morita-invariante. En particulier, elle est stable par passage à $\mathcal{A}^{\oplus}, \mathcal{A}^{\natural}, \mathcal{A}^{\oplus\natural}$. Elle a été étudiée dans [35], [38, §4] et [57][6]. Pour la commodité du lecteur, nous avons donné en appendice un exposé des nombreuses caractérisations des catégories semi-simples, et quelques contre-exemples. Nous en extrayons la proposition suivante :

[6]Prendre garde à la terminologie : les notions de semi-simplicité utilisées dans [35] et dans [57] sont plus faibles.

2.1.2**. Proposition.** *Soit $\mathcal{A}$ une (petite) catégorie K-linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
a) $\mathcal{A}$ est semi-simple,
b) $\mathrm{rad}(\mathcal{A}) = 0$ et pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}(A, A)$ est un anneau artinien,
c) pour tout objet A, $\mathcal{A}(A, A)$ est une K-algèbre semi-simple[7].
Sous ces conditions, $\mathcal{A}$ est abélienne si et seulement si elle est pseudo-abélienne.

En particulier, la notion de semi-simplicité est *auto-duale*, et *stable par quotient par tout idéal*. Voir [38, §4] ou l'appendice de ce travail.

En particulier, si $\mathcal{A}$ est semi-simple (non nécessairement K-linéaire ni pseudo-abélienne), on a $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, N) = 0$ pour tout couple (M, N) de $\mathcal{A}$-modules et tout $i > 0$.

2.1.3**. Lemme.** *Toute sous-catégorie pleine $\mathcal{B}$ d'une K-catégorie semi-simple $\mathcal{A}$ est semi-simple. De plus, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont K-linéaires pseudo-abéliennes, il existe une unique sous-catégorie pleine $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ telle que $\mathcal{A} = \mathcal{B} \coprod \mathcal{C}$ (cf. définition A.2.2 c)).*

Démonstration. Par invariance de Morita, on se ramène immédiatement au cas où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont K-linéaires pseudo-abéliennes. La première assertion résulte alors de la caractérisation c) de la proposition 2.1.2. Pour voir la deuxième, notons $S(\mathcal{A})$ (*resp.* $S(\mathcal{B})$) l'ensemble des classes d'isomorphismes (types) d'objets simples de $\mathcal{A}$ (*resp.* de $\mathcal{B}$). Il est clair que les objets de $\mathcal{B}$ sont les sommes directes d'objets simples de type appartenant à $\mathcal{B}$. La catégorie $\mathcal{C}$ est alors la catégorie des sommes directes d'objets simples de $\mathcal{A}$ de type appartenant à $S(\mathcal{A}) - S(\mathcal{B})$. □

2.1.4**. Mise en garde.** Dans le lemme 2.1.3, si $\mathcal{A}$ est monoïdale et si $\mathcal{B}$ est une sous-catégorie monoïdale de $\mathcal{A}$, il n'est pas vrai en général que $\mathcal{C}$ soit monoïdale.

Le lemme suivant est à mettre en regard de 1.4.8b.

2.1.5**. Lemme.** *Soit $\mathcal{A}$ une K-catégorie telle que $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ soit semi-simple. Pour tout idéal $\mathcal{I}$, le radical de $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ est l'image de $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{A}/\mathcal{I}$.*

Démonstration. Le point est l'inclusion $\mathrm{rad}(\mathcal{A}/\mathcal{I}) \subset \mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})+\mathcal{I}$. Il découle de ce que le foncteur de projection $\mathcal{A}/\mathcal{I} \to \mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})+\mathcal{I}$ est plein, donc radiciel, et de ce que le radical de $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A}) + \mathcal{I}$ est nul puisque c'est une catégorie semi-simple (comme quotient de $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$). □

Voici enfin deux compléments au lemme 2.1.3, qui montrent que la structure des catégories semi-simples est “triviale” :

2.1.6**. Proposition.** *Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie abélienne semi-simple, où K est un corps commutatif. Notons $S(\mathcal{A})$ (resp $\mathbb{I}(\mathcal{A})$, $C(\mathcal{A})$) l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets simples de $\mathcal{A}$ (resp. l'ensemble des idéaux de $\mathcal{A}$, l'ensemble des sous-catégories strictement épaisses de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire strictement pleines et stables par somme directe et facteur direct). Considérons les applications suivantes :*

[7]Selon la terminologie de Bourbaki [5] ; selon la terminologie anglo-saxonne, on dirait plutôt “semisimple artinian”, *cf.* [51].

– $SC : C(\mathcal{A}) \to S(\mathcal{A})$: $\mathcal{B} \mapsto S(\mathcal{B})$.
– $CS : S(\mathcal{A}) \to C(\mathcal{A})$: $X \mapsto \{\bigoplus S_i \mid S_i \in X\}$.
– $IC : C(\mathcal{A}) \to \mathbb{I}(\mathcal{A})$: $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{I}_{\mathcal{B}}$ *(cf. exemple 1.3.1).*
– $SI : \mathbb{I}(\mathcal{A}) \to S(\mathcal{A})$: $\mathcal{I} \mapsto \{S \in S(\mathcal{A}) \mid 1_S \in \mathcal{I}\}$.

Alors SC, CS, IC et SI sont bijectives, SC et CS sont inverses l'une de l'autre, $SI \circ IC = SC$ et $CS \circ SI = IC^{-1}$.

Démonstration. Le fait que $SC \circ CS = Id$ est évident. Si $\mathcal{B} \in C(\mathcal{A})$, on a $CS \circ SC(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ parce que $\mathcal{B}$ est K-linéaire, avec égalité parce que $\mathcal{B}$ est pseudo-abélienne. De plus, $SI \circ IC(\mathcal{B}) = \{S \mid 1_S$ se factorise à travers un objet de $\mathcal{B}\}$ contient clairement $S(\mathcal{B})$. Réciproquement, pour un $S \in SI \circ IC(\mathcal{B})$, il existe $a : S \to X$ et $b : X \to S$ tels que $ba = 1_S$. Soit $S' = a(S)$: restreignant b à S', on se ramène au cas où X est simple. Ceci montre que $S \in S(\mathcal{B})$ puisque $\mathcal{B}$ est strictement pleine.

Il reste à montrer que $IC \circ CS \circ SI = Id$. Pour $\mathcal{I} \in \mathbb{I}$, $IC \circ CS \circ SI(\mathcal{I})$ est l'idéal des morphismes qui se factorisent à travers un objet de la forme $\bigoplus S_i$, où les S_i sont simples et tels que $1_{S_i} \in \mathcal{I}$ pour tout i. Cet idéal est évidemment contenu dans $\mathcal{I}$. Réciproquement, soit $f \in \mathcal{I}$: écrivons f comme somme directe d'un morphisme nul et d'un isomorphisme u (lemme A.2.13). Alors $u \in \mathcal{I}$. Si S est un facteur simple de la source de u, 1_S se factorise à travers u, donc $1_S \in \mathcal{I}$. □

2.1.7**. Proposition.** *Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{A}$. Alors :*

(1) *Le foncteur de projection $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{I}$ est essentiellement surjectif (i.e. $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ est pseudo-abélienne).*
(2) *π a une section i, qui en est un adjoint à gauche et à droite.*
(3) *Posons $\mathcal{B} = CS \circ SI(\mathcal{I})$. Alors on a $\mathcal{A} = \mathcal{B} \coprod i(\mathcal{A}/\mathcal{I})$.*
(4) *La suite*
$$0 \to K_0(\mathcal{B}) \to K_0(\mathcal{A}) \to K_0(\mathcal{A}/\mathcal{I}) \to 0$$
est exacte scindée.

Démonstration. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{I}(A, A)$ est un idéal bilatère de la K-algèbre semi-simple $\mathcal{A}(A, A)$; l'homomorphisme d'anneaux $\mathcal{A}(A, A) \to \mathcal{A}(A, A)/\mathcal{I}(A, A) = \mathcal{A}/\mathcal{I}(\pi(A), \pi(A))$ a donc une unique section s_A. En particulier, tout idempotent de $\mathcal{A}/\mathcal{I}(\pi(A), \pi(A))$ se relève dans $\mathcal{A}(A, A)$, ce qui prouve 1). De même, on construit 2) à l'aide des s_A ; ses propriétés sont immédiates. 3) en résulte grâce à la proposition précédente, et 4) résulte de 3). □

2.2. Catégories séparables.

2.2.1**. Proposition.** *Soit A une K-algèbre (associative unitaire). Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est un A-bimodule projectif.*
(2) *Toute dérivation de A vers un bimodule est intérieure.*

(3) *A est de dimension finie sur K, est semi-simple, et le reste après toute extension des scalaires.*

(4) *A est semi-simple, et le reste après toute extension des scalaires.*

(5) *A est de dimension finie sur K, sans radical, et le reste après toute extension des scalaires.*

(6) *L'algèbre $A^o \otimes_K A$ est semi-simple.*

Pour 1 $\iff$ 2, voir [13, 4]. Pour 1 $\iff$ 3 $\iff$ 4, on renvoie à [11, ch. IX, th. 7.10]. Pour 4 $\iff$ 5, voir [5, 7.5, cor.]. Pour 1 $\iff$ 6, voir [11, ch. IX, th. 7.9].

En particulier, l'hypothèse de finitude dans [11, ch. IX, th. 7.10] n'est pas nécessaire. Pour la commodité du lecteur, nous reproduisons l'argument de [13, 4] qui montre que $1 \Longrightarrow \dim_K A < \infty$. Soit s une section de l'application de multiplication $A \otimes_K A \to A$, comme homomorphisme de A-bimodules. Écrivons $s(1) = \sum_1^n x_i \otimes y_i$, avec n minimal ; en particulier, les y_i sont linéairement indépendants sur K, donc séparés par les formes K-linéaires sur A. Notons I le K-espace de dimension finie $\sum_1^n Kx_i \subset A$. Alors I est un idéal à gauche de A : en effet, pour tout $a \in A$, on a $as(1) = s(1)a$, d'où $\sum ax_i a^*(y_i) = \sum x_i a^*(y_i a)$ pour tout $a^* \in Hom_K(A, K)$, et le résultat. En outre, l'action de A par multiplication à gauche sur I est fidèle du fait que $\sum x_i y_i = 1$. Par conséquent, A s'injecte dans $End_K(I)$. □

2.2.2**. Définition.** Une K-algèbre A est dite *séparable* (ou *absolument semi-simple*) si elle vérifie les conditions de la proposition 2.2.1.

2.2.3**. Remarque.** Nous nous écartons ici légèrement de la terminologie de Bourbaki [5, 7.5], pour qui une algèbre est séparable si elle est sans radical et le reste après toute extension des scalaires. Dans le cas commutatif, on dit d'ailleurs plutôt *étale* que séparable.

2.2.4**. Lemme.** *Toute algèbre de dimension finie sans radical sur un corps parfait K est séparable.*

Démonstration. Voir [5, 7.5,7.6]. □

2.2.5**. Lemme.** *Le produit tensoriel de deux K-algèbres séparables est séparable.*

Démonstration. Voir [11, ch. IX, prop. 7.4]. □

2.2.6**. Définition.** Une catégorie K-linéaire $\mathcal{A}$ est dite *séparable* (ou *absolument semi-simple*) si la catégorie $\mathcal{A}_L$ qui s'en déduit[8] en tensorisant les morphismes par L est semi-simple pour toute extension L/K.

La notion de catégorie séparable est Morita-invariante (*cf.* proposition 2.1.2), auto-duale, et stable par passage au quotient par un idéal.

D'après le théorème A.3.1, on en a les autres caractérisations suivantes :

[8] Voir la définition 5.1.1 ci-dessous pour plus de détails.

– (si $\mathcal{A}$ est K-linéaire) Pour tout objet $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}(A, A)$ est une K-algèbre séparable.
– La catégorie enveloppante[9] $\mathcal{A}^e = \mathcal{A}^o \boxtimes_K \mathcal{A}$ est semi-simple.

2.2.7**. Proposition.** *Si K est parfait, une K-catégorie $\mathcal{A}$ est séparable si et seulement si elle est semi-simple et $\dim_K \mathcal{A}(A, B) < \infty$ pour tout couple d'objets (A, B).*

Démonstration. Cela résulte du lemme 2.2.4. □

2.3. Catégories semi-primaires.

2.3.1**. Définition.** Une K-catégorie $\mathcal{A}$ est *semi-primaire* si

(i) pour tout objet $A \in \mathcal{A}$, le radical $\mathrm{rad}(\mathcal{A}(A, A))$ est nilpotent ;
(ii) $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ est semi-simple.

2.3.2**. Remarques.**

$a)$ Dans le cas d'une catégorie à un seul objet, on retrouve une notion connue en algèbre non commutative sous le nom d'"anneau semi-primaire" [51] [10]. Ainsi une catégorie K-linéaire est semi-primaire si et seulement si tous ses anneaux d'endomorphismes sont semi-primaires.

$b)$ Cette notion est auto-duale.

$c)$ Une catégorie K-linéaire pseudo-abélienne semi-primaire n'est pas nécessairement abélienne (exemple : la catégorie des modules projectifs de type fini sur une K-algèbre artinienne non semi-simple).

$d)$ La condition (i) entraîne que les radicaux de Kelly et de Gabriel coïncident.

L'un des aspects classiques des anneaux semi-primaires est la propriété de relèvement des idempotents modulo le radical, qui suit du lemme classique suivant

2.3.3**. Lemme** (*cf.* [51, 1.1.28])**.** *Soit N un nil-idéal d'un anneau A. Alors tout idempotent de A/N se relève en un idempotent de A.* □

2.3.4**. Proposition.** *a) Si $\mathcal{A}$ est semi-primaire, il en est de même de $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ pour tout idéal $\mathcal{I}$, et le radical de $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ est l'image du radical de $\mathcal{A}$.*
b) Supposons $\mathcal{A}$ semi-primaire. Alors $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ est pseudo-abélienne si et seulement si $\mathcal{A}$ l'est (et même abélienne si $\mathcal{A}$ est K-linéaire).
Plus généralement, le foncteur canonique (cf. lemme 1.3.10 d)) $\mathcal{A}^\natural/\mathrm{rad}(\mathcal{A}^\natural) \to (\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A}))^\natural$ est un isomorphisme.
c) La notion de K-catégorie semi-primaire est Morita-invariante. En particulier, si $\mathcal{A}$ est semi-primaire, alors $\mathcal{A}^\oplus, \mathcal{A}^\natural, \mathcal{A}^{\oplus\natural}$ le sont (et réciproquement).
d) Si $\mathcal{A}$ est K-linéaire et si $\mathcal{A}(A, A)$ est un anneau artinien pour tout $A \in \mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}$ est semi-primaire.

[9]Voir le §11.1 ci-dessous pour plus de détails.

[10]Ces anneaux sont caractérisés par l'existence d'une borne uniforme pour la longueur de toute chaîne décroissante de modules cycliques, *cf.* [51, 2.7.7].

e) Si $\mathcal{A}$ est semi-primaire, $\mathcal{B}$ est semi-simple et $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un K-foncteur plein, alors il existe une unique factorisation de T en un K-foncteur plein $\bar{T} : \mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$.
f) Si $\mathcal{A}$ est semi-primaire et pseudo-abélienne, et $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un K-foncteur radiciel qui n'envoie aucun objet non nul de $\mathcal{A}$ sur l'objet nul de $\mathcal{B}$, alors T est conservatif.

Démonstration. a) Cela résulte aisément du lemme 2.1.5.

b) suit des lemmes 1.3.10 d) et 2.3.3 (et du fait qu'une catégorie K-linéaire pseudo-abélienne semi-simple est abélienne, *cf.* A.2.10).

c) Pour l'invariance par équivalence de Morita, il s'agit d'après le corollaire 1.3.9 de voir que $\mathcal{A}$ est semi-primaire si et seulement si $\mathcal{A}^{\oplus\natural}$ l'est. D'après le corollaire 1.4.5, la trace sur $\mathcal{A}$ du radical de $\mathcal{A}^{\oplus\natural}$ est le radical de $\mathcal{A}$. Il suit de ceci, du lemme 1.3.10 d) et du lemme 2.1.3 que $\mathcal{A}$ est semi-primaire si $\mathcal{A}^{\oplus\natural}$ l'est.

Supposons réciproquement $\mathcal{A}$ semi-primaire. Le point b) entraîne que $\mathcal{A}^{\natural}$ l'est. On peut donc supposer $\mathcal{A}$ pseudo-abélienne. En vertu du lemme 1.3.10 c), il suffit de voir que si les radicaux de $\mathcal{A}^{\oplus}(A, A)$ et $\mathcal{A}^{\oplus}(B, B)$ sont nilpotents, il en est de même du radical de $\mathcal{A}^{\oplus}(A \oplus B, A \oplus B)$.

Supposons donc que $\mathcal{R}(A, A)^m = \mathcal{R}(B, B)^n = 0$, et montrons qu'alors $\mathcal{R}(A \oplus B, A \oplus B)^{m+n+2} = 0$. Par additivité, on se ramène à supposer que le composé de toute chaîne de $N \geq 2n + 2$ morphismes f_i $(i = 1, \dots, N)$ composables appartenant à $\mathcal{R}(A, A), \mathcal{R}(A, B), \mathcal{R}(B, A)$ ou $\mathcal{R}(B, B)$ est nul.

Considérons par exemple une chaîne partant de A et aboutissant en A. La composition correspondante appartient à un produit de la forme

$$\mathcal{R}(A, A)^{m_{k+1}}\mathcal{R}(B, A)\mathcal{R}(B, B)^{n_k}\mathcal{R}(A, B)\mathcal{R}(A, A)^{m_k} \cdots$$
$$\cdots \mathcal{R}(A, A)^{m_2}\mathcal{R}(B, A)\mathcal{R}(B, B)^{n_1}\ sR(A, B)\mathcal{R}(A, A)^{m_1}$$

avec $m_1 + \cdots + m_{k+1} + n_1 + \cdots + n_k + 2k + 1 = N$. Ce produit est contenu dans $\mathcal{R}(A, A)^a$, avec $a = m_1 + \cdots + m_{k+1} + k$. D'autre part, le produit intermédiaire

$$\mathcal{R}(B, B)^{n_k}\mathcal{R}(A, B)\mathcal{R}(A, A)^{m_k} \cdots \mathcal{R}(A, A)^{m_2}\mathcal{R}(B, A)\mathcal{R}(B, B)^{n_1}$$

est contenu dans $\mathcal{R}(B, B)^b$, avec $b = n_1 + \cdots + n_k + k - 1$. On a donc $a \geq m$ ou $b \geq n$ et le morphisme composé est nul. Les autres cas se traitent de la même manière.

d) Un raisonnement analogue à celui fait dans le cas des anneaux montre que, pour toute $\mathcal{A}$, le radical de $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ est réduit à 0. En particulier, pour tout objet A de $\mathcal{A}$, la K-algèbre $(\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A}))(A, A)$ est semi-simple. Comme $\mathcal{A}$ est supposée K-linéaire, on conclut par la proposition 2.1.2 que $\mathcal{A}$ est semi-simple.

e) suit de la première assertion du lemme 1.4.7.

f) Le K-foncteur radiciel T induit un K-foncteur

$$\bar{T} : (\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A}))^{\oplus} \to (\mathcal{B}/\mathrm{rad}(\mathcal{B}))^{\oplus}.$$

Tout comme T, $\bar{T}$ n'envoie aucun objet non nul de $(\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A}))^{\oplus}$ sur l'objet nul de $(\mathcal{B}/\mathrm{rad}(\mathcal{B}))^{\oplus}$. D'autre part, $(\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A}))^{\oplus}$ est abélienne semi-simple puisque $\mathcal{A}$ est semi-primaire pseudo-abélienne (utiliser le point b) ci-dessus). Il en découle que $\bar{T}$ est conservatif (lemme A.2.14), et il en est de même de T par 1.4.4 b. $\square$

2.3.5**. Proposition.** *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne dont tout objet est de longueur finie. Alors $\mathcal{A}$ est semi-primaire.*

Démonstration. Le plus court est d'envoyer $\mathcal{A}$ par un foncteur pleinement fidèle dans une catégorie de modules (théorème de plongement de Freyd-Mitchell). Dans le cas d'une catégorie de modules, l'assertion revient à ceci : l'anneau d'endomorphismes de tout module M de longueur finie est semi-primaire. Ce résultat, qui repose sur le lemme de Fitting, est bien connu, *cf.* [51, 2.9.10] (la longueur du module est une borne pour l'échelon de nilpotence du radical). □

2.4. Catégories de Wedderburn.

2.4.1**. Définition.** Une K-catégorie $\mathcal{A}$ est dite de *Wedderburn* si

(i) pour tout objet $A \in \mathcal{A}$, le radical $\mathrm{rad}(\mathcal{A}(A, A))$ est nilpotent ;

(ii') $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ est une K-catégorie séparable.

2.4.2**. Mise en garde.** Il est clair qu'une K-catégorie de Wedderburn est semi-primaire. Nous verrons en 4.1.4 qu'elle le reste après toute extension des scalaires. La réciproque est évidemment *fausse* au moins quand K est imparfait, comme le montre l'exemple de la K-catégorie à un seul objet donné par une extension finie inséparable de K.

2.4.3**. Remarque.** Dans le cas d'un seul objet, les algèbres correspondantes sont celles auxquelles s'appliquent le théorème de scindage de Wedderburn dont il sera question au §12, d'où la terminologie. Nous les appellerons *algèbres de Wedderburn*.

2.4.4**. Proposition.** *a) La notion de K-catégorie de Wedderburn est stable par passage au quotient par un idéal.*
b) La notion de K-catégorie de Wedderburn est Morita-invariante. En particulier, si $\mathcal{A}$ est de Wedderburn, alors $\mathcal{A}^{\oplus}, \mathcal{A}^{\natural}, \mathcal{A}^{\oplus\natural}$ le sont (et réciproquement).
c) Si K est parfait et si $\mathcal{A}(A, B)$ est de dimension finie sur K pour tout couple $(A, B) \in Ob(\mathcal{A})$, alors $\mathcal{A}$ est de Wedderburn. En particulier, toute catégorie tannakienne sur K est de Wedderburn.

Démonstration. a) découle de 2.3.4 a) : si $\mathcal{A}$ est de Wedderburn, $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ est semi-primaire, et le quotient par son radical (qui n'est autre que l'image du radical de $\mathcal{A}$) est séparable, en tant que quotient de $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$.

b) On sait déjà que $\mathcal{A}^{\oplus}, \mathcal{A}^{\natural}, \mathcal{A}^{\oplus\natural}$ sont semi-primaires. Il est alors facile de conclure, compte-tenu de ce que, par le lemme 1.3.10 et la proposition 2.3.4 b), le quotient de $\mathcal{A}^{\oplus\natural}$ par son radical est isomorphe à $(\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A}))^{\oplus\natural}$.

c) Il revient au même de dire que toute algèbre d'endomorphismes de $\mathcal{A}^{\oplus}$ est de dimension finie. D'après le point d) de la proposition 2.3.4, on voit que $\mathcal{A}^{\oplus}$, donc $\mathcal{A}$, est semi-primaire. On conclut par le fait que toute algèbre de dimension finie sur un corps parfait est séparable. □

3. Radical infini et nilpotence renforcée

3.1. Le radical infini. Soit $\mathcal{A}$ une K-catégorie.

3.1.1**. Définition.** Le radical infini de $\mathcal{A}$ est l'idéal $\mathrm{rad}^\omega(\mathcal{A}) = \bigcap_{n\geq 1} \mathrm{rad}^n(\mathcal{A})$.

Cet idéal intervient dans diverses questions, *e.g.* dans la théorie du type de représentation des K-algèbres de dimension finie (pour $\mathcal{A} = A\text{-}Modf$), et en liaison avec les conjectures de Bloch-Beilinson-Murre sur les motifs (pour $\mathcal{A} =$ la catégorie des motifs de Grothendieck pour l'équivalence rationnelle - motifs 'de Chow'- à coefficients dans K, *cf.* 7.1.8)

3.1.2**. Lemme.** *Si $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un K-foncteur radiciel entre K-catégories, alors $T(\mathrm{rad}^\omega(\mathcal{A})) \subset \mathrm{rad}^\omega(\mathcal{B})$.*

C'est clair. □

3.1.3**. Définition.** Une K-catégorie $\mathcal{A}$ est dite *strictement semi-primaire (resp. strictement de Wedderburn)* si

(i') pour tout couple d'objets (A, B), il existe un entier $n > 0$ tel que $(\mathrm{rad}(\mathcal{A}))^n(A, B) = 0$;

(ii') $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ est une K-catégorie semi-simple (*resp.* séparable).

Il est clair qu'une catégorie strictement semi-primaire (*resp.* strictement de Wedderburn) est semi-primaire (*resp.* de Wedderburn) et que son radical infini est nul. La réciproque est vraie si tous les anneaux d'endomorphismes sont artiniens.

Par ailleurs, il est clair qu'une catégorie semi-primaire n'ayant qu'un nombre fini d'objets est strictement semi-primaire.

3.1.4**. Contre-exemple.** Considérons la catégorie $\mathcal{A}$ suivante :

- $Ob(\mathcal{A}) = E$, où E est un ensemble ordonné dense quelconque (dense signifie qu'entre deux éléments distincts on peut toujours en trouver un troisième distinct) ;
- $\mathcal{A}(x, y) = K$ si $x \leq y$, 0 sinon ;

la composition étant induite par la multiplication dans K. On a alors

$$(\mathrm{rad}\,\mathcal{A})(x, y) = \begin{cases} K & \text{si } x < y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi $(\mathrm{rad}\,\mathcal{A})(x, x) = 0$ pour tout x, donc $\mathcal{A}$ est semi-primaire. Mais si $x < y$, $(\mathrm{rad}\,\mathcal{A})(x, y) = (\mathrm{rad}\,\mathcal{A})^n(x, y)$ pour tout $n > 0$ (grâce à la densité de E). On a donc $\mathrm{rad}^\omega(\mathcal{A}) = \mathrm{rad}(\mathcal{A}) \neq 0$.

Si E est un groupe commutatif ordonné, il est facile de munir $\mathcal{A}$ d'une structure monoïdale symétrique rigide. Quitte à passer à $\mathcal{A}^{\oplus\natural}$, on peut même construire un exemple K-linéaire pseudo-abélien (mais non abélien).

3.2. **Cas des catégories de modules.** Prenons à présent pour $\mathcal{A}$ la catégorie des *modules de type fini sur une algèbre A de dimension finie sur un corps K*. Dans ce cas, le théorème d'existence des suites d'Auslander-Reiten montre que le radical $\mathcal{R}$ de $A\text{–}Modf$ est engendré (à droite ou à gauche) par les morphismes dits irréductibles (*i.e.* dans $\mathcal{R} \setminus \mathcal{R}^2$), *cf.* [56] ou [31] pour plus de précisions. Ce point, et l'analyse détaillée des carquois d'Auslander-Reiten, sont à la base du résultat suivant, qui lie le type de représentation de A au radical infini $\mathcal{R}^\omega$.

3.2.1**. Théorème** ([56], [31])**.** *a) A est de type de représentation fini (i.e. il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes d'indécomposables dans $A\text{–}Modf$) $\iff \mathcal{R}^\omega = 0 \iff \exists n$ tel que $\mathcal{R}^n = 0$.*
b) (Supposons K algébriquement clos[11]) A est de type de représentation infini sauvage $\iff \mathcal{R}^\omega$ n'est pas nilpotent.

Un cas intermédiaire est celui de l'algèbre $\bar{\mathbf{F}}_2[(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2]$ (de type de représentation infini modéré) ; $\mathcal{R}^\omega$ est non nul mais nilpotent.

Un exemple standard d'algèbre de type de représentation infini sauvage est donné par le quotient de $K[[T_1, T_2]]$ par le cube de l'idéal maximal, ou même par l'idéal $(T_1^2, T_1T_2^2, T_2^3)$ (Drozd, *cf.* [17], [43], [50, 1]) ; il s'ensuit que $A\text{–}Modf$ n'est pas strictement semi-primaire.

Nous verrons plus loin qu'une catégorie tannakienne algébrique sur un corps de caractéristique nulle n'est pas nécessairement strictement semi-primaire.

Tout ceci indique que la notion de catégorie strictement semi-primaire est beaucoup trop restrictive pour nos besoins, et motive notre choix de traiter systématiquement des catégories semi-primaires (ou de Wedderburn).

3.2.2**. Remarque.** Un exemple remarquable de catégorie strictement de Wedderburn devrait être fourni par la catégorie des motifs purs pour une équivalence adéquate quelconque ; cet exemple conjectural est brièvement discuté en 6.3.1 ci-dessous.

4. RADICAL ET EXTENSION DES SCALAIRES

4.1. Il est connu que le radical d'une algèbre se comporte "mal" par extension des scalaires en général, *cf.* [5], [51]. La situation s'améliore toutefois dans le cas "de Wedderburn".

4.1.1**. Proposition.** *1) Soit L/K une extension de corps. Soit A une K-algèbre de Wedderburn, i.e. $\operatorname{rad}(A)$ est nilpotent et $A/\operatorname{rad}(A)$ est séparable. Alors*
a) $\operatorname{rad}(A \otimes_K L) \cap A = \operatorname{rad}(A)$,
b) $\operatorname{rad}(A) \otimes_K L = \operatorname{rad}(A \otimes_K L)$,
c) $A \otimes_K L$ est de Wedderburn.
2) Si $A \otimes_K L$ est semi-primaire et si $\operatorname{rad}(A \otimes_K L) \subset \operatorname{rad}(A) \otimes_K L$ pour toute extension L/K, alors A est de Wedderburn.

Démonstration. 1) Il est clair que $\operatorname{rad}(A) \otimes_K L$ est un idéal nilpotent de $A \otimes_K L$, donc contenu dans $\operatorname{rad}(A \otimes_K L)$. D'autre part $A/\operatorname{rad}(A)$ est séparable, donc aussi

[11] Il est probable que cette hypothèse, qui figure dans [31], peut être affaiblie en : K parfait.

$(A/\mathrm{rad}(A)) \otimes_K L = (A \otimes_K L)/(\mathrm{rad}(A) \otimes_K L)$. En particulier, cette dernière est semi-simple, donc $\mathrm{rad}(A) \otimes_K L$ contient $\mathrm{rad}(A \otimes_K L)$. D'où $b)$ et $c)$. Le point $a)$ en découle immédiatement.

2) Supposons $A \otimes_K L$ semi-primaire pour toute extension L/K. En particulier $\mathrm{rad}(A)$ est nilpotent, donc $\mathrm{rad}(A \otimes_K L) \supset \mathrm{rad}(A) \otimes_K L$, et on a finalement égalité compte tenu de l'hypothèse. Il suit que $(A/\mathrm{rad}(A)) \otimes_K L \cong (A \otimes_K L)/\mathrm{rad}(A \otimes_K L)$ est semi-simple pour toute extension L/K, donc que $A/\mathrm{rad}(A)$ est séparable. Ainsi A est de Wedderburn. □

4.1.2**. Remarque.** La condition que $\mathrm{rad}(A \otimes_K L) \subset \mathrm{rad}(A) \otimes_K L$ est nécessaire : si K est imparfait, toute extension finie inséparable A/K non triviale fournit un exemple de K-algèbre “absolument semi-primaire” mais pas de Wedderburn.

Si $\mathcal{A}$ est une K-catégorie, notons $\mathcal{A}_L$ la L-catégorie qui s'en déduit en tensorisant les morphismes par L.

4.1.3**. Mise en garde.** Si $\mathcal{A}$ est pseudo-abélienne, il n'en est pas de même de $\mathcal{A}_L$ en général [12]. Si $\mathcal{A}$ est abélienne, il n'en est pas de même de $(\mathcal{A}_L)^\natural$ en général. Un contre-exemple est fourni par la catégorie des représentations de dimension finie de $\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$ (*cf.* fin du §19.)

4.1.4**. Corollaire.** *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie de Wedderburn. Alors, pour toute extension L/K, $\mathcal{A}_L$ est de Wedderburn. De plus*

(i) $\mathrm{rad}(\mathcal{A}_L) = \mathrm{rad}(\mathcal{A}) \otimes_K L$.

(ii) *Le foncteur d'extension des scalaires $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_L$ est radiciel.*

(iii) *Le carré*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}_L \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathcal{A}_L/\mathrm{rad}(\mathcal{A}_L) \end{array}$$

est naturellement cocartésien : le foncteur naturel $\mathcal{A}_L/\mathrm{rad}(\mathcal{A}_L) \to (\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A}))_L$ est une équivalence de catégories. □

4.1.5**. Théorème.** *Soient K un corps, L une extension de K, V un L-espace vectoriel de dimension finie, et A une sous-K-algèbre de $End_L(V)$. On suppose que, pour tout $a \in A$, le polynôme caractéristique de a dans V est à coefficients dans K. Alors*

a) Le radical R de A est nilpotent d'échelon $\leq n = \dim V$.

b) Si K est infini, A/R est semi-simple, produit d'au plus n composants simples. Si de plus K est parfait, A/R est séparable.

c) Supposons K infini et parfait. Alors le radical de la sous-L-algèbre AL de $End_L(V)$ engendrée par A est RL, on a $RL \cap A = R$, et l'application canonique $(A/R) \otimes_K L \to AL/RL$ est bijective.

[12] Voir §5 ci-dessous pour plus de détails.

Démonstration. a) D'après [5, §11, ex. 1 a)], R est *a priori* un nil-idéal. Montrons même que tout $u \in R$ vérifie $u^n = 0$. Pour cela, il suffit de voir que les valeurs propres de u dans V sont toutes nulles. Supposons le contraire et soit $\lambda \neq 0$ une telle valeur propre. Comme λ est algébrique sur K, il existe un polynôme $Q \in K[T]$ tel que $\lambda Q(\lambda) = 1$. Mais $1 - uQ(u)$ est inversible, donc $1 - \lambda Q(\lambda)$ est inversible, contradiction.

Comme l'image de R dans $End_L(V)$ est un semi-groupe multiplicatif formé d'éléments nilpotents, un théorème de N. Jacobson permet de conclure que R est nilpotent d'échelon $\leq \dim V$, *cf.* [51, 2.6.30].

b) Cela résulte de [5, §11, ex. 1 d)].

c) Notons provisoirement R_L le radical de AL. D'après la proposition 4.1.1 b), on a $\mathrm{rad}(A \otimes_K L) = R \otimes_K L$, donc l'homomorphisme surjectif $A \otimes_K L \to AL$ induit un homomorphisme surjectif $(A/R) \otimes_K L \to AL/R_L$. Comme A/R est séparable et R nilpotent, le théorème de Wedderburn (*cf.* théorème 12.1.1 ci-dessous, dans le cas d'un seul objet) permet de relever A/R dans A. Notons ce relevé B, et soit K' le centre d'un facteur simple de B : K' est une extension finie de K. Soit x un élément primitif de K' : comme le polynôme caractéristique de x opérant sur V est à coefficients dans K, c'est nécessairement une puissance du polynôme caractéristique de x opérant sur K'. Ceci implique que la surjection $K' \otimes_K L \to K'L$ est bijective, et donc que $B \otimes_K L \to BL$ est bijective. Il en résulte que $A/R \otimes_K L \to AL/R_L$ est bijective, d'où l'on déduit $R_L = RL$. Enfin, $(R_L \cap A =)RL \cap A = R$ découle immédiatement de la nilpotence de R. $\square$

4.1.6**. Remarques.**

a) L'hypothèse que K est parfait n'est pas superflue dans b) et c). On obtient un contre-exemple en prenant pour $A = L$ une extension finie inséparable de K, $V = L \otimes_K L$ avec la structure gauche de L-espace, et $A \hookrightarrow End_L(V)$ donné par $\ell \mapsto (\ell_1 \otimes \ell_2 \mapsto \ell_1 \otimes \ell\ell_2)$.

b) Si l'on suppose que $V = \bigoplus V_i$ est un L-espace vectoriel gradué et que A est une sous-algèbre de $\prod End(V_i)$, la borne sur l'échelon de nilpotence n de R dans le point a) du théorème 4.1.5 se raffine en : $n \leq max \dim V_i$ (même démonstration).

c) Le point a) du théorème 4.1.5 reste valable si on remplace l'hypothèse que pour tout $a \in A$, le polynôme caractéristique de a est à coefficients dans K par : K est de cardinal strictement supérieur à $\dim_K A$, *cf.* [5, no. 12, ex. 16].

4.1.7**. Corollaire.** *Soient K un corps parfait infini, L une extension de K, $\mathcal{A}$ une catégorie K-linéaire et $H : \mathcal{A} \to Vec_L$ un K-foncteur fidèle de $\mathcal{A}$ vers la catégorie des L-espaces vectoriels de dimension finie. On suppose que, pour tout endomorphisme $a \in \mathcal{A}(A, A)$, le polynôme caractéristique de $H(a)$ est à coefficients dans K. Alors*

a) $\mathcal{A}$ est une K-catégorie de Wedderburn.

b) Soit $H(\mathcal{A})L$ la sous-catégorie (non pleine) L-linéaire de Vec_L engendrée par $H(\mathcal{A})$: les objets de $H(\mathcal{A})L$ sont les objets de $H(\mathcal{A})$ et, pour deux tels objets X, Y,

$\big(H(\mathcal{A})L\big)(X,Y) = \big(H(\mathcal{A})(X,Y)\big)L$. Alors :
i) $\mathrm{rad}(H(\mathcal{A})L) = \mathrm{rad}(H(\mathcal{A}))L$.
ii) $\mathrm{rad}(H(\mathcal{A})L) \cap H(\mathcal{A}) = \mathrm{rad}(H(\mathcal{A}))$.
iii) Le foncteur $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})_L \to H(\mathcal{A})L/\mathrm{rad}(H(\mathcal{A})L)$ induit par H est une équivalence de catégories.
En particulier, $H(\mathcal{A})L$ est une L-catégorie de Wedderburn. □

4.1.8**. Remarque.** La conclusion $a)$ vaut encore si, au lieu d'un L et d'un H, on a une famille finie d'extensions de corps L_i/L et une famille fidèle de foncteurs $H_i : \mathcal{A} \to Vec_{L_i}$ et si l'on suppose que pour tout $a \in \mathcal{A}(A,A)$, le polynôme caractéristique de $H_i(a)$ est à coefficients dans K. En effet, plongeant les L_i dans un corps commun L, et posant $H(A) = \bigoplus_i H_i(A) \otimes_{L_i} L$, on se ramène au cas du corollaire.

4.1.9**. Exemple.** Comme nous le verrons en 8.2.1, le corollaire précédent s'applique notamment au cas des catégories tannakiennes sur un corps de caractéristique nulle.

5. Extensions des scalaires naïve et non naïve

Dans ce paragraphe, K est un corps commutatif. Nous allons comparer l'extension des scalaires "naïve" étudiée dans le paragraphe précédent à une extension des scalaires plus sophistiquée, due à Saavedra, dont nous aurons besoin dans les paragraphes 17 et 19.

5.1. Deux types d'extensions des scalaires.

5.1.1**. Définition.** Soient $\mathcal{A}$ une K-catégorie et L une K-algèbre (commutative unitaire).
a) La catégorie $\mathcal{A}_L$ a pour objets les objets de $\mathcal{A}$; si $A, B \in \mathcal{A}_L$, $\mathcal{A}_L(A,B) = L \otimes_K \mathcal{A}(A,B)$. On appelle $\mathcal{A}_L$ l'*extension des scalaires naïve* de $\mathcal{A}$ de K à L.
b) On note $\mathcal{A}_{(L)} = Rep_K(L,\mathcal{A})$ la catégorie des K-représentations de L dans $\mathcal{A}$: un objet de $\mathcal{A}_{(L)}$ est un couple (A,ρ), où $A \in \mathcal{A}$ et ρ est un homomorphisme de K-algèbres unitaires $L \to \mathcal{A}(A,A)$; un morphisme $f : (A,\rho) \to (A',\rho')$ est un élément de $\mathcal{A}(A,A')$ commutant à ρ et ρ'. On appelle $\mathcal{A}_{(L)}$ l'*extension des scalaires à la Saavedra de $\mathcal{A}$ de K à L* (*cf.* [53, II.1.5]).

5.1.2**. Lemme.** *a) La K-structure de $\mathcal{A}_{(L)}$ s'enrichit en une L-structure par la loi*

$$\lambda f = \rho'(\lambda) f = f\rho(\lambda)$$

pour $\lambda \in L$ et $f \in \mathcal{A}_{(L)}((A,\rho),(A',\rho'))$.
b) Si $\mathcal{A}$ est additive (resp. pseudo-abélienne, abélienne, stable par limites inductives quelconques), il en est de même de $\mathcal{A}_{(L)}$. □

5.1.3**. Remarques.**

a) Pour que cette construction soit raisonnable, il faut que $\mathcal{A}$ soit "assez grosse" ou que L soit "assez petit". Par exemple, si $\mathcal{A}(A,A)$ est de K-dimension finie pour tout objet A, alors $\mathcal{A}_{(L)} = 0$ dès que L est un corps infini contenant K.

b) Si $\mathcal{A}$ est semi-simple, il ne suit pas que $\mathcal{A}_{(L)}$ le soit : prendre pour L/K une extension finie inséparable de corps, et pour $\mathcal{A}$ la K-catégorie à un objet L (ou, si on préfère Vec_L). C'est toutefois le cas (trivialement) si L est une extension infinie de K, car dans ce cas $\mathcal{A}_{(L)} = 0$ (voir a))

c) Soit $\mathcal{A} = Rep_K^\infty G$ la Ind-catégorie attachée à la catégorie $Rep_K G$ des K-représentations de dimension finie d'un K-groupe affine. Alors $\mathcal{A}_{(L)}$ s'identifie canoniquement à $Rep_L^\infty(G)$, *cf.* [53, III.1]. Même remarque avec $Rep_K(G)$ quand L/K est finie.

d) Soit $\mathcal{A}$ une K-catégorie quelconque. Alors $(Mod\text{–}\mathcal{A})_{(L)}$ s'identifie à la catégorie des K-foncteurs de $\mathcal{A}$ vers $Mod\text{–}L$. Cette dernière s'identifie canoniquement à $Mod\text{–}\mathcal{A}_L$ via l'extension des scalaires naïve. D'après la proposition 1.3.6 f), les objets compacts de cette catégorie s'identifient à $(\mathcal{A}_L)^{\oplus\natural}$.

5.2. **Sur l'extension des scalaires à la Saavedra.** Notre but est de comparer $\mathcal{A}_L$ à $\mathcal{A}_{(L)}$. On a un "foncteur fibre" évident

$$\omega_L : \mathcal{A}_{(L)} \to \mathcal{A} \tag{5.1}$$

qui est fidèle et conservatif, commutant aux limites projectives et inductives quelconques, exact si $\mathcal{A}$ est abélienne.

La première chose à faire est de définir un foncteur en sens inverse, de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}_{(L)}$. Ce n'est possible que sous des hypothèses restrictives.

5.2.1**. Lemme** (*cf.* [53, prop. II.1.5.1.1])**.** *a) Soient $A \in \mathcal{A}$ et $V \in Vec_K$. Le foncteur*

$$B \mapsto Hom_K(V, \mathcal{A}(A, B))$$

est représentable dans les cas suivants :

(i) *$\mathcal{A}$ est K-linéaire et $\dim_K V < \infty$.*

(ii) *$\mathcal{A}$ est stable par limites inductives quelconques.*

On note un représentant $V \otimes_K A$.
b) La construction $(V, A) \mapsto V \otimes_K A$ est bifonctorielle et bilinéaire. Si W est un autre K-espace vectoriel, on a un isomorphisme canonique

$$W \otimes_K (V \otimes_K A) \simeq (W \otimes_K V) \otimes_K A$$

pourvu que les deux membres aient un sens. (Nous nous autoriserons de la canonicité de cet isomorphisme pour passer sous silence tout tel parenthésage.)
c) Si $\mathcal{A}$ est K-linéaire et que $\dim_K V < \infty$, alors pour tout $B \in \mathcal{A}$, le foncteur

$$A \mapsto \mathcal{A}(V \otimes_K A, B)$$

est représentable par $V^* \otimes_K B$, où V^* est le dual de V. □

Soient $A, B \in \mathcal{A}$ et $V \in Vec_K$. Supposons que les objets $V \otimes_K A$ et $V \otimes_K B$ soient définis. L'homomorphisme de fonctorialité

$$\mathcal{A}(A, B) \to \mathcal{A}(V \otimes_K A, V \otimes_K B) \simeq Hom_K(V, \mathcal{A}(A, V \otimes_K B))$$

fournit un autre homomorphisme

$$V \otimes_K \mathcal{A}(A, B) \to \mathcal{A}(A, V \otimes_K B). \tag{5.2}$$

5.2.2**. Lemme.** *L'homomorphisme* (5.2) *est un isomorphisme dans les cas suivants :*

(i) $\dim_K V < \infty$ *;*

(ii) *A est compact (i.e. le foncteur $B \mapsto \mathcal{A}(A,B)$ commute aux limites inductives quelconques)*

Démonstration. (i) Écrire $V \simeq K^n$ et se ramener à $n = 1$ par additivité. (ii) passer à la limite sur (i). □

5.2.3**. Hypothèses.** À partir de maintenant, on suppose que $\mathcal{A}$ est additive (c'est-à-dire K-linéaire). On se donne une K-algèbre L (commutative unitaire). On suppose :

– soit que $\dim_K L < \infty$;

– soit que $\mathcal{A}$ est stable par limites inductives quelconques.

5.2.4**. Lemme.** *Sous les hypothèses 5.2.3,*
a) La donnée d'une représentation $\rho : L \to \mathcal{A}(A,A)$ comme dans la définition 5.1.1
b) équivaut à la donnée d'un morphisme $\rho^\vee : L \otimes_K A \to A$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} L \otimes_K L \otimes_K A \arrow[r, "1\otimes\rho^\vee"] \arrow[d, "\mu_L\otimes 1"'] & L \otimes_K A \arrow[d, "\rho^\vee"] \\ L \otimes_K A \arrow[r, "\rho^\vee"] & A, \end{tikzcd}$$

où μ_L est la multiplication de L, soit commutatif.
b) Le morphisme

$$\rho_A^\vee : L \otimes_K L \otimes_K A \xrightarrow{\mu_L\otimes 1} L \otimes_K A$$

vérifie la condition de a), donc définit une représentation canonique $\rho_A : L \to \mathcal{A}(L \otimes_K A, L \otimes_K A)$. □

Sous les hypothèses 5.2.3, le lemme 5.2.4 définit un K-foncteur

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} \to \mathcal{A}_{(L)} \\ &A \mapsto (L \otimes_K A, \rho_A). \end{aligned} \tag{5.3}$$

5.2.5**. Lemme** ([53, II.1.5.2])**.** *Le foncteur* (5.3) *est adjoint à gauche au foncteur ω_L de* (5.1). *Il envoie objet compact de $\mathcal{A}$ sur objet compact de $\mathcal{A}_{(L)}$.*

(La seconde assertion provient du fait que ω_L commute aux limites inductives quelconques.) □

Le lemme 5.1.2 b) montre que le foncteur (5.3) s'étend alors en un L-foncteur

$$\Xi_L : \mathcal{A}_L \to \mathcal{A}_{(L)}. \tag{5.4}$$

5.3. **Comparaison de $\mathcal{A}_L$ et $\mathcal{A}_{(L)}$.**

5.3.1**. Proposition.** *Soient A, B deux objets de $\mathcal{A}$. Si $\dim_K L = \infty$, supposons que A soit compact. Alors l'homomorphisme*

$$L \otimes_K \mathcal{A}(A, B) \to \mathcal{A}_{(L)}(L \otimes_K A, L \otimes_K B)$$

est bijectif. En particulier, Ξ_L est pleinement fidèle si $\dim_K L < \infty$, et sa restriction à la sous-catégorie pleine des objets compacts de $\mathcal{A}_L$ est pleinement fidèle en général (et prend ses valeurs dans les objets compacts de $\mathcal{A}_{(L)}$ d'après le lemme 5.2.5).

Démonstration. Cela résulte des lemmes 5.2.2 et 5.2.5. □

5.3.2**. Théorème.** *Le foncteur*

$$\Xi_L^\natural : (\mathcal{A}_L)^\natural \to \mathcal{A}_{(L)}$$

induit par Ξ_L est une équivalence de catégories pour toute K-catégorie $\mathcal{A}$ pseudo-abélienne si et seulement si L est une K-algèbre étale*. Dans ce cas, $\Xi_L^\natural$ induit une équivalence de catégories sur les sous-catégories pleines formées des objets compacts.*

Démonstration. Vu la proposition 5.3.1, le foncteur $\Xi_L^\natural$ est une équivalence de catégories si et seulement s'il est essentiellement surjectif. D'autre part, d'après la proposition 2.2.1, L est étale sur K si et seulement si le L-bimodule L est projectif.

1) Supposons d'abord L projectif sur $L \otimes_K L$. La suite exacte de L-bimodules $0 \to \operatorname{Ker} \mu \to L \otimes_K L \xrightarrow{\mu} L \to 0$ est scindée ; on note s un scindage.

Dire que $\Xi_L^\natural$ est essentiellement surjectif est dire que tout objet B dans $\mathcal{A}_{(L)}$ est facteur direct de $L \otimes_K A$ pour un objet A de $\mathcal{A}$ convenable (comme $\Xi_L^\natural$ est pleinement fidèle, l'expression "facteur direct" n'est pas ambigüe). Nous allons montrer que $A = \omega_L(B)$ convient, ce qui montrera du même coup la seconde assertion.

Notons ι_2 l'homomorphisme de L-algèbres $L \to L \otimes_K L$ donné par $\ell \mapsto 1 \otimes \ell$. Dans $\mathcal{A}_{(L)}$, on a un isomorphisme $L \otimes_K \omega_L(B) \cong (L \otimes_K L) \otimes_{L,\iota_2} B$, et un morphisme $\mu \otimes_L 1_B : (L \otimes_K L) \otimes_{L,\iota_2} B \to L \otimes_{L,\iota_2} B = B$ dont $s \otimes_L 1_B$ est une section. Ceci montre bien que B est facteur direct de $L \otimes \omega_L(B)$.

2) Supposons maintenant que L ne soit pas $L \otimes_K L$-projectif. Pour obtenir un contre-exemple, prenons $\mathcal{A} = Vec_L$ (vue comme K-catégorie abélienne) : $\mathcal{A}_{(L)}$ est la catégorie des $(L \otimes_K L)$-modules finis. Alors L, vu comme objet de $\mathcal{A}_{(L)}$, n'est pas facteur direct d'un objet de la forme $L \otimes_K V$, $V \in Ob(\mathcal{A})$, puisqu'un tel objet est un $(L \otimes_K L)$-module libre. □

5.3.3**. Exemple.** Prenons pour $\mathcal{A}$ la catégorie $Rep_K G$ des K-représentations de dimension finie d'un K-groupe affine. On note comme ci-dessus $Rep_K^\infty G$ la Ind-catégorie attachée à $\mathcal{A}$, de sorte qu'on a une équivalence naturelle (monoïdale) $(Rep_K^\infty G)_{(L)} \cong Rep_L^\infty G_L$. En outre, si L/K est (finie) séparable, elle induit une équivalence naturelle (monoïdale) entre objets compacts $(Rep_K G)_{(L)} \cong Rep_L G_L$, et aussi (en vertu du théorème ci-dessus) $\cong (Rep_K G)_L^\natural$.

II. Radical et rigidité

L'objectif de cette partie est l'étude du radical $\mathcal{R}$ en présence d'une structure monoïdale sur $\mathcal{A}$. Il s'avère que la question de la compatibilité du radical à la structure monoïdale est fort délicate, et n'a pas toujours une réponse positive. Nous comparons chemin faisant $\mathcal{R}$ au plus grand idéal propre $\mathcal{N}$ compatible à la structure monoïdale, et analysons le quotient $\mathcal{A}/\mathcal{R}$.

Pour simplifier, on suppose $\mathcal{A}$ *stricte* (la contrainte d'associativité et les contraintes d'unité sont l'identité).

6. Généralités

6.1. **Idéaux monoïdaux, duaux.** Soit K un anneau commutatif unitaire, et soit $(\mathcal{A}, \bullet)$ une K-catégorie monoïdale.

6.1.1**. Définition.** Un idéal $\mathcal{J}$ de $\mathcal{A}$ est dit *monoïdal*[13] s'il est stable par les transformations $1_C \bullet -$ et $- \bullet 1_C$ pour tout objet C de $\mathcal{A}$.

6.1.2**. Lemme.** *a) Si $\mathcal{J}$ est monoïdal, il est stable par produit monoïdal à gauche et à droite par un morphisme arbitraire. En particulier, on a une structure monoïdale induite sur le quotient $\mathcal{A}/\mathcal{J}$.*
b) La notion d'idéal monoïdal est stable par somme, intersection, produit.

Démonstration. a) Soient $f \in \mathcal{J}(A, B)$ et $g \in \mathcal{A}(C, D)$. On a alors $g \bullet f = (g \bullet 1_B) \circ (1_C \bullet f) \in \mathcal{J}(C \bullet A, D \bullet B)$. On raisonne de même pour les produits à droite.
b) est immédiat. □

Rappelons qu'un objet A d'une catégorie monoïdale $\mathcal{A}$ *admet un dual* (à droite) s'il existe un objet $A^\vee \in \mathcal{A}$ et des morphismes d'évaluation

$$\varepsilon_A : A \bullet A^\vee \to \mathbf{1}$$

et de coévaluation

$$\eta_A : \mathbf{1} \to A^\vee \bullet A$$

tels que les composés

$$A \xrightarrow{1_A \bullet \eta_A} A \bullet A^\vee \bullet A \xrightarrow{\varepsilon_A \bullet 1_A} A$$
$$A^\vee \xrightarrow{\eta_A \bullet 1_{A^\vee}} A^\vee \bullet A \bullet A^\vee \xrightarrow{1_{A^\vee} \bullet \varepsilon_A} A^\vee$$

soient égaux à l'identité. Le triplet $(A^\vee, \varepsilon_A, \eta_A)$ est déterminé à isomorphisme unique près.

Il en résulte que le foncteur $- \bullet A^\vee$ est adjoint à gauche au foncteur $- \bullet A$ et que le foncteur $A^\vee \bullet -$ est adjoint à droite au foncteur $A \bullet -$. Plus précisément, pour tous objets B, C de $\mathcal{A}$, l'homomorphisme composé

$$\mathcal{A}(A \bullet B, C) \xrightarrow{1_{A^\vee} \bullet -} \mathcal{A}(A^\vee \bullet A \bullet B, A^\vee \bullet C) \xrightarrow{(\eta_A \bullet 1_B)^*} \mathcal{A}(B, A^\vee \bullet C)$$

[13] Jannsen [26] dit plutôt *tensoriel*.

est un isomorphisme, d'inverse le composé

$$\mathcal{A}(B, A^\vee \bullet C) \xrightarrow{1_A \bullet -} \mathcal{A}(A \bullet B, A \bullet A^\vee \bullet C) \xrightarrow{(\varepsilon_A \bullet 1_C)_*} \mathcal{A}(A \bullet B, C).$$

et de même pour l'autre adjonction (*cf. e.g.* [9, 1]).

Si A et B ont pour duaux à droite $A^\vee$ et $B^\vee$, alors $A \bullet B$ a pour dual à droite

$$(A \bullet B)^\vee = B^\vee \bullet A^\vee$$

avec

$$\varepsilon_{A \bullet B} = \varepsilon_A \circ (1_A \bullet \varepsilon_B \bullet 1_{A^\vee}). \tag{6.1}$$

On définit de manière duale la notion de dual à gauche ${}^\vee A$. Si A admet un dual à droite et un dual à gauche, on a $({}^\vee A)^\vee = {}^\vee(A^\vee) = A$. En général, ${}^\vee A$ et $A^\vee$ ne coïncident pas.

6.1.3**. Définition.** On dit que $(\mathcal{A}, \bullet)$ est *rigide* si tout objet a un dual à droite et est un dual à droite (ou de manière équivalente, si tout objet a un dual à droite et un dual à gauche).

6.1.4**. Sorite.** *Si $\mathcal{A}$ est rigide, il en est de même de $\mathcal{A}^\oplus, \mathcal{A}^\natural$ et de $\mathcal{A}^{\oplus\natural}$ (notations du* §*1). Il en est aussi de même du quotient de $\mathcal{A}$ par tout idéal monoïdal.* □

Soient A et B deux objets de $\mathcal{A}$, A ayant un dual à droite. Par adjonction, on a un isomorphisme canonique de K-modules :

$$\begin{aligned} \iota_{AB} :& \mathcal{A}(\mathbf{1}, A^\vee \bullet B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(A, B) \\ \iota_{AB}(\varphi) &= (\varepsilon_A \bullet 1_B) \circ (1_A \bullet \varphi), \end{aligned} \tag{6.2}$$

d'inverse

$$\iota_{AB}^{-1}(f) = (1_{A^\vee} \bullet f) \circ \eta_A. \tag{6.3}$$

Si B a aussi un dual à droite, la composition de deux morphismes $f \in \mathcal{A}(A, B)$ et $g \in \mathcal{A}(B, C)$ peut se calculer comme suit ("composition des correspondances") :

$$g \circ f = \iota_{AC}\left((1_{A^\vee} \bullet \varepsilon_B \bullet 1_C)(\iota_{AB}^{-1} f \bullet \iota_{BC}^{-1} g)\right). \tag{6.4}$$

Appliquant ι_{AC}^{-1}, cette formule fondamentale exprime la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\eta_B"'] & A^\vee A \arrow[r, "1_{A^\vee} \bullet f"] \arrow[d, "1_{A^\vee A} \bullet \eta_B"'] & A^\vee B \arrow[r, equal] \arrow[d, "1_{A^\vee B} \bullet \eta_B"'] & A^\vee B \arrow[d, equal] \\
B^\vee B \arrow[r, "\eta_A \bullet 1_{B^\vee B}"] \arrow[d, "1_{B^\vee} \bullet g"'] & A^\vee A B^\vee B \arrow[r, "1_{A^\vee} \bullet \varepsilon_B \bullet 1_B"] \arrow[d, "1_{A^\vee A B^\vee} \bullet g"'] & A^\vee B B^\vee B \arrow[r, "1_{A^\vee} \bullet \varepsilon_B \bullet 1_B"] \arrow[d, "1_{A^\vee B B^\vee} \bullet g"'] & A^\vee B \arrow[d, "1_{A^\vee} \bullet g"'] \\
B^\vee C \arrow[r, "\eta_A \bullet 1_{B^\vee C}"] & A^\vee A B^\vee C \arrow[r, "1_{A^\vee} \bullet f \bullet 1_{B^\vee C}"] & A^\vee B B^\vee C \arrow[r, "1_{A^\vee} \bullet \varepsilon_B \bullet 1_C"] & A^\vee C.
\end{tikzcd}$$

On a aussi les variantes

$$g \circ \iota_{AB}(\varphi) = \iota_{AC}((1_{A^\vee} \bullet g) \circ \varphi) \tag{6.5}$$

$$\iota_{BC}(\psi)\circ f=\iota_{AC}((\varepsilon_B\bullet 1_C)\circ(f\bullet 1_{B^\vee\bullet C})\circ(1_A\bullet\psi)) \tag{6.6}$$

qui se lisent sur le même diagramme.

Si A,B ont des duaux à droite et que $f\in\mathcal{A}(A,B)$, on définit (*loc. cit.*) le transposé f^t (ou dual à droite) de f comme étant le composé

$$B^\vee=\mathbf{1}\bullet B^\vee\xrightarrow{\eta_A\bullet 1}A^\vee\bullet A\bullet B^\vee\xrightarrow{1\bullet f\bullet 1}A^\vee\bullet B\bullet B^\vee\xrightarrow{1\bullet\varepsilon_B}A^\vee\bullet\mathbf{1}=A^\vee, \tag{6.7}$$

ce qui s'écrit aussi

$$f^t=(1_{A^\vee}\bullet\varepsilon_B)\circ(\iota_{AB}^{-1}(f)\bullet 1_{B^\vee}), \tag{6.8}$$

et on a alors la formule

$$(g\circ f)^t=f^t\circ g^t. \tag{6.9}$$

On a de même une notion de transposé ${}^tf$ à gauche, et $({}^tf)^t={}^t(f^t)=f$. En général, ${}^tf$ et f^t ne coïncident pas.

On suppose désormais que $\mathcal{A}$ est rigide.

6.1.5**. Lemme.** *Tout idéal monoïdal $\mathcal{J}$ vérifie*

$$\mathcal{J}(A,B)=\iota_{AB}\big(\mathcal{J}(\mathbf{1},A^\vee\bullet B)\big)$$

et

$$\big(\mathcal{J}(A,B)\big)^t=\mathcal{J}(B^\vee,A^\vee).$$

Démonstration. La première formule découle des formules (6.2), (6.3). Pour la seconde,

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{J}(A,B)\big)^t&=(1_{A^\vee}\bullet\varepsilon_B)\circ(\mathcal{J}(\mathbf{1},A^\vee\bullet B)\bullet 1_{B^\vee})\\&\subset(1_{A^\vee}\bullet\varepsilon_B)\circ\mathcal{J}(B^\vee,A^\vee\bullet B\bullet B^\vee)\subset\mathcal{J}(B^\vee,A^\vee).\end{aligned}$$

L'analogue pour les duaux à gauche de ces deux formules conduit à ${}^t\big(\mathcal{J}(C,D)\big)=\mathcal{J}({}^\vee D,{}^\vee C)$. En posant $B={}^\vee C$, $A={}^\vee D$ (ce qui est loisible puisque $\mathcal{A}$ est rigide), et en appliquant ^{t}, on obtient finalement l'inclusion opposée $\mathcal{J}(B^\vee,A^\vee)\subset\big(\mathcal{J}(A,B)\big)^t$. □

On a une réciproque partielle du lemme 6.1.5 (mais voir aussi le lemme 6.2.1 dans le cas symétrique) :

6.1.6**. Lemme.** *Soit $\mathcal{I}$ un* **1***-idéal à gauche de $\mathcal{A}$ (définition 1.3.4). La formule*

$$\mathcal{I}^{(\bullet)}(A,B)=\iota_{AB}\big(\mathcal{I}(A^\vee\bullet B)\big)$$

définit un idéal de $\mathcal{A}$ contenant $\mathcal{I}$. Cet idéal est monoïdal à gauche (stable par produit $\bullet$ à gauche).

Démonstration. Soit $g\in\mathcal{A}(B,C)$ un morphisme. En utilisant la formule (6.5), on calcule

$$\begin{aligned}g\circ\mathcal{I}^{(\bullet)}(A,B)=g\circ\iota_{AB}\big(\mathcal{I}(A^\vee\bullet B)\big)&=\iota_{AC}\big((1_{A^\vee}\bullet g)\circ\mathcal{I}(A^\vee\bullet B)\big)\\&\subset\iota_{AC}\big(\mathcal{I}(A^\vee\bullet C)\big)=\mathcal{I}^{(\bullet)}(A,C).\end{aligned}$$

La stabilité par composition à droite se démontre de même en utilisant (6.6).

Enfin, soit C un objet de $\mathcal{A}$. Observons que l'homomorphisme

$$1_C \bullet - : \mathcal{A}(A,B) \to \mathcal{A}(C \bullet A, C \bullet B)$$

n'est autre que

$$f \mapsto \iota_{C\bullet A, C\bullet B}[(1_{A^\vee} \bullet \eta_C \bullet 1_B) \circ \iota_{AB}^{-1}(f)]$$

où $\eta_C : \mathbf{1} \to C^\vee \bullet C$ est la coévaluation. On a donc

$$\begin{aligned} 1_C \bullet \mathcal{I}^{(\bullet)}(A,B) &= \iota_{C\bullet A, C\bullet B}[(1_{A^\vee} \bullet \eta_C \bullet 1_B) \circ \big(\mathcal{I}(A^\vee \bullet B)\big) \\ &\subset \iota_{C\bullet A, C\bullet B}\big(\mathcal{I}(A^\vee \bullet C^\vee \bullet C \bullet B)\big) = \mathcal{I}^{(\bullet)}(C \bullet A, C \bullet B). \end{aligned}$$

On conclut en appliquant (la moitié du) lemme 6.1.2. □

6.2. **Le cas symétrique.** On suppose désormais que $\mathcal{A}$ (qui rappelons-le, est supposée rigide) est munie d'un tressage symétrique R (une contrainte de commutativité, dans le langage de Saavedra). On renvoie à 15.1 pour plus de détails sur les tressages.

Sous cette hypothèse, ${}^\vee A = A^\vee$ (duaux à droite et à gauche coïncident), et on a

$$\varepsilon_{A^\vee} = \varepsilon_A \circ R_{A^\vee,A}, \eta_{A^\vee} = R_{A^\vee,A} \circ \eta_A, A^{\vee\vee} = A, \tag{6.10}$$

$${}^t f = f^t, \quad (f^t)^t = f. \tag{6.11}$$

On a aussi l'identité

$$\iota_{C^\vee,C^\vee}(R_{C^\vee,C} \circ \varphi) = \iota_{C,C}(\varphi)^t \tag{6.12}$$

(en effet, par (6.8) et (6.3), l'image par $\iota_{C^\vee,C^\vee}^{-1}$ du membre de droite s'écrit $(1_{C^\vee} \bullet \varepsilon_C) \circ (\varphi \bullet 1_{C^\vee})$, tandis que celle du membre de gauche s'écrit $(\varepsilon_{C^\vee} \bullet 1_{C^\vee}) \circ (1_{C^\vee} \bullet (R_{C^\vee,C} \circ \varphi)) = ((\varepsilon_C \circ R_{C^\vee,C}) \bullet 1_{C^\vee}) \circ (1_{C^\vee} \bullet \varphi)$, et l'égalité des deux membres s'ensuit par permutation des facteurs $C^\vee$.)

Par ailleurs, si A,B,C,D sont quatre objets de $\mathcal{A}$ et $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbf{1}, A^\vee \bullet B)$, $\psi \in \mathcal{A}(\mathbf{1}, C^\vee \bullet D)$, on a la formule

$$\iota_{A,B}(\varphi) \bullet \iota_{C,D}(\psi) = \iota_{A\bullet C, B\bullet D}((R_{A^\vee \bullet B, C^\vee} \bullet 1_D) \circ (\varphi \bullet \psi)). \tag{6.13}$$

Le lemme suivant complète 6.1.6.

6.2.1**. Lemme.** *Soit $\mathcal{I}$ un $\mathbf{1}$-idéal à gauche de $\mathcal{A}$ (définition 1.3.4). La formule*

$$\mathcal{I}^{(\bullet)}(A,B) = \iota_{AB}\big(\mathcal{I}(A^\vee \bullet B)\big)$$

définit un idéal monoïdal $\mathcal{I}^{(\bullet)}$; c'est le plus petit idéal monoïdal de $\mathcal{A}$ contenant $\mathcal{I}$.

Démonstration. On a vu que $\mathcal{I}^{(\bullet)}$ est un idéal contenant $\mathcal{I}$, stable par produit à gauche. Par tressage, on a aussi $\mathcal{I}^{(\bullet)}(A,B) \bullet 1_C \subset \mathcal{I}^{(\bullet)}(A \bullet C, B \bullet C)$ pour trois objets A,B,C. La deuxième assertion est immédiate compte tenu du lemme 6.1.5. □

6.3. **Interprétation.** Pour expliciter le sens des lemmes 6.1.5 et 6.2.1, notons :

– $\mathbb{G}$ l'ensemble des $\mathbf{1}$-idéaux à gauche de $\mathcal{A}$;
– $\mathbb{I}$ l'ensemble des idéaux [bilatères] de $\mathcal{A}$;
– $\mathbb{T}$ l'ensemble des idéaux [bilatères] monoïdaux de $\mathcal{A}$.

Ces trois ensembles sont ordonnés par inclusion. On a le diagramme suivant d'applications croissantes :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T} \arrow[rr, shift left, "i"] & & \mathbb{I} \arrow[ll, shift left, "j"] \arrow[dl, "r"] \\ & \mathbb{G} \arrow[ul, "t"] & \end{tikzcd}$$

où

– i associe à un idéal monoïdal l'idéal sous-jacent ;
– j associe à un idéal le plus petit idéal monoïdal le contenant ;
– r associe à un idéal le $\mathbf{1}$-idéal à gauche sous-jacent ($r(\mathcal{I})(A) = \mathcal{I}(\mathbf{1}, A)$) ;
– t associe à un $\mathbf{1}$-idéal à gauche $\mathcal{I}$ l'idéal monoïdal $\mathcal{I}^{(\bullet)}$ construit dans le lemme 6.2.1.

On a évidemment $ji = Id$. Le lemme 6.1.5 dit que $tri = Id$, tandis que le lemme 6.2.1 dit que $rit = Id$. En particulier, *les applications t et ri sont des bijections inverses l'une de l'autre*. D'autre part, soit $\mathcal{I} \in \mathbb{I}$. Comme $j(\mathcal{I})$ contient $r(\mathcal{I})$, on a $j(\mathcal{I}) \supset tr(\mathcal{I})$, et $j(\mathcal{I}) = tr(\mathcal{I})$ si et seulement si $tr(\mathcal{I}) \supset \mathcal{I}$.

Par abus de notation, on écrira encore $\mathcal{I}^{(\bullet)}$ pour $tr(\mathcal{I})$ si $\mathcal{I} \in \mathbb{I}$.

Par ailleurs, les ensembles $\mathbb{G}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{T}$ sont munis d'opérations internes "somme", "intersection". Il est clair que les applications i, t, r respectent ces opérations.

Le cas du produit est plus intéressant. *A priori*, seuls $\mathbb{I}$ et $\mathbb{T}$ sont munis d'une opération "produit" évidente. On peut alors munir $\mathbb{G}$ d'un tel produit en posant : $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J} := ri(t(\mathcal{I}) \cdot t(\mathcal{J}))$ (en formule :

$$(\mathcal{I} \cdot \mathcal{J})(B) = \sum_A \iota_{AB}(\mathcal{I}(A^\vee \bullet B)) \circ \mathcal{J}(A) \ \ ). \tag{6.14}$$

Les applications i, t, r respectent alors aussi le produit. On a aussi la formule

$$(\mathcal{I} \cdot \mathcal{J})(B) = \sum_{u: A \bullet A' \to B} Im(\mathcal{J}(A) \bullet \mathcal{I}(A') \to \mathcal{A}(\mathbf{1}, B)) \tag{6.15}$$

qui montre que le produit des idéaux monoïdaux (dans le cas rigide) est *symétrique*.

Pour $A' = A^\vee \bullet B$ et $u = \varepsilon_A \bullet 1_B$, le terme du second membre de (6.15) s'écrit en effet $(\varepsilon_A \bullet 1_B) \circ (\mathcal{J}(A) \bullet \mathcal{I}(A^\vee \bullet B))$, qui coïncide d'après (6.6) avec le terme courant du second membre de (6.14) (donc avec $(\mathcal{I} \cdot \mathcal{J})(B)$). Réciproquement, $\mathcal{J}(A) \bullet \mathcal{I}(A') \subset (t(\mathcal{J}) \cdot t(\mathcal{I}))(A \bullet A')$ puisque $t(\mathcal{J})$ et $t(\mathcal{I})$ sont des idéaux monoïdaux, d'où il découle que le second membre de (6.15) est contenu dans $(\mathcal{I} \cdot \mathcal{J})(B)$.

6.3.1**. Exemple.** Si $\mathcal{A}$ est la catégorie monoïdale des motifs de Grothendieck pour l'équivalence rationnelle (motifs 'de Chow') à coefficients dans K et si K est un corps, il y a bijection entre les idéaux monoïdaux de $\mathcal{A}$ et les relations d'équivalence adéquates sur les cycles algébriques à coefficients dans K.

Il est plus facile de décrire la bijection entre $\mathbf{1}$-idéaux à gauche de $\mathcal{A}$ et relations d'équivalence adéquates (*cf.* [26, 4]). Soit $\mathcal{I}$ un tel $\mathbf{1}$-idéal, c'est-à-dire la donnée d'une famille de sous-groupes $\mathcal{I}(M)$ de $\mathcal{A}(\mathbf{1}, M)$ stable par l'action à gauche des correspondances, où M décrit les objets de $\mathcal{A}$. Pour le motif M d'une variété X tordu m fois à la Tate, on a $\mathcal{A}(\mathbf{1}, M) = CH^m(X)_K$, donc $\mathcal{I}$ définit une relation d'équivalence adéquate. Inversement, toute relation d'équivalence adéquate définit un $\mathbf{1}$-idéal à gauche de la catégorie des correspondances de Chow (non effectives), et on vérifie que les $\mathbf{1}$-idéaux à gauche de cette catégorie sont en correspondance bijective avec ceux de son enveloppe pseudo-abélienne $\mathcal{A}$.

On déduit de (6.14) la formule pour le produit de relations d'équivalence adéquates (correspondant au produit d'idéaux, et noté $*$ dans *loc. cit.*).

7. TRACES

Dans tout ce paragraphe, on suppose que $(\mathcal{A}, \bullet)$ *est* K*-linéaire monoïdale rigide, symétrique, et que* $End(\mathbf{1}) = K$ (en revanche, on ne suppose pas $\mathcal{A}$ abélienne).

7.1. **Traces et idéal** $\mathcal{N}$**.** Rappelons que la *trace* d'un endomorphisme $h \in \mathcal{A}(C, C)$ est l'élément $tr(h) \in K = End(\mathbf{1})$ défini par

$$\varepsilon_C \circ R_{C^\vee, C} \circ ({\iota_{CC}}^{-1}(h)) : \mathbf{1} \to \mathbf{1},$$

où $\varepsilon_C : C \bullet C^\vee \to \mathbf{1}$ est l'évaluation. Dans la situation symétrique dans laquelle nous nous plaçons, la formule s'écrit aussi

$$tr(h) = \varepsilon_{C^\vee} \circ ({\iota_{CC}}^{-1}(h)) \tag{7.1}$$

La *dimension* (ou rang) de l'objet A est la trace de 1_A.

Soient $f \in \mathcal{A}(A, B)$ et $g \in \mathcal{A}(B, A)$. Des formules (6.1) et (6.4), on déduit que

$$tr(g \circ f) = \varepsilon_{A^\vee}(1_{A^\vee} \bullet \varepsilon_B \bullet 1_A)(\iota_{AB}^{-1} f \bullet \iota_{BA}^{-1} g) = \varepsilon_{A^\vee B} \circ (\iota_{AB}^{-1} f \bullet \iota_{BA}^{-1} g)$$

d'où

$$tr(g \circ f) = tr(f \circ g) \tag{7.2}$$

et, en appliquant (6.7)

$$tr(g \circ f) = (\iota_{AB}^{-1} f)^t \circ \iota_{BA}^{-1} g \ \ (= tr((\iota_{AB}^{-1} f)^t \circ \iota_{BA}^{-1} g)). \tag{7.3}$$

En appliquant (6.12), on obtient aussi l'identité

$$tr(h^t) = tr(h).$$

Voici une autre formule utile (*cf.* [14, 7.2]) : si f et g sont des endomorphismes de A et B, on a

$$tr(f \bullet g) = tr(f)tr(g). \tag{7.4}$$

Introduisons à présent l'idéal $\mathcal{N}$, protagoniste principal de ce paragraphe.

7.1.1**. Lemme.** *La formule*

$$\mathcal{N}(A,B)=\{f\in\mathcal{A}(A,B),\forall g\in\mathcal{A}(B,A),tr(g\circ f)=0\}$$

définit un idéal monoïdal de $\mathcal{A}$ [14]*. On a*

$$\mathcal{N}(A,B)=\iota_{AB}\{f\in\mathcal{A}(\mathbf{1},A^\vee\bullet B),\forall g\in\mathcal{A}(A^\vee\bullet B,\mathbf{1}),g\circ f=0\}.$$

Démonstration. La stabilité par composition à gauche est claire et la stabilité par composition à droite s'en déduit en vertu de la formule (7.2). Il suffit alors de prouver la seconde assertion, qui dit que $\mathcal{N}=\mathcal{N}^{(\bullet)}$. C'est immédiat à partir de la formule (7.3). □

7.1.2**. Exemple.** Dans le cas de l'exemple 6.3.1 (motifs), l'idéal monoïdal $\mathcal{N}$ correspond à l'équivalence numérique des cycles algébriques.

7.1.3**. Lemme.** *On suppose que K est un corps. Soit $f_1,\dots,f_n\in\mathcal{A}(A,A)$ une famille de n éléments linéairement indépendants modulo $\mathcal{N}(A,A)$. Alors $(f_1,\dots,f_n)$ correspond à une corétraction $\mathbf{1}^n\hookrightarrow A^\vee\bullet A$.*

Démonstration. La donnée des f_i fournit un morphisme $\mathbf{1}^n\to A^\vee\bullet A$ (de i-ème composante $\iota_{AA}^{-1}(f_i)$). Remarquons que, par définition de $\mathcal{N}$, la trace induit une forme bilinéaire (symétrique) non dégénérée

$$\mathcal{A}(A,A)/\mathcal{N}(A,A)\times\mathcal{A}(A,A)/\mathcal{N}(A,A)\to K.$$

Il existe donc des éléments $g_1,\dots,g_n$ de $\mathcal{A}(A,A)$ tels que $tr(g_i\circ f_j)=\delta_{ij}$ (symbole de Kronecker). Le morphisme composé

$$A^\vee\bullet A\xrightarrow{\circ g_1,\dots,\circ g_n}(A^\vee\bullet A)^n\xrightarrow{R_{A^\vee A},\dots,R_{A^\vee A}}(A\bullet A^\vee)^n\xrightarrow{ev,\dots,ev}\mathbf{1}^n$$

est un inverse à gauche de $\mathbf{1}^n\hookrightarrow A^\vee\bullet A$. Réciproquement, toute corétraction comme dans l'énoncé s'obtient clairement ainsi. □

7.1.4**. Proposition.** *On suppose que K est un corps. Soit $\mathcal{A}$ un catégorie K-linéaire monoïdale symétrique rigide, avec $K=End(\mathbf{1})$. On note $\mathcal{R}$ son radical. Alors*
a) $\mathcal{N}=\mathcal{R}^{(\bullet)}$: $\mathcal{N}(A,B)=\iota_{AB}(\mathcal{R}(\mathbf{1},A^\vee\bullet B))$ pour tout couple (A,B).
b) $\mathcal{N}$ est le plus grand idéal monoïdal distinct de $\mathcal{A}$.
c) Soit $\mathcal{J}$ un idéal monoïdal distinct de $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ est semi-simple, alors $\mathcal{J}=\mathcal{N}$.

Démonstration. $a)$ Que $\mathcal{N}$ soit distinct de $\mathcal{A}$ se voit sur le couple $(\mathbf{1},\mathbf{1})$. Pour l'égalité $\mathcal{N}=\mathcal{R}^{(\bullet)}$, il s'agit de voir que pour tout objet A, $\mathcal{N}(\mathbf{1},A)=\mathcal{R}(\mathbf{1},A)$. C'est bien le cas, car d'après le lemme 1.4.9,

$$\mathcal{R}(\mathbf{1},A)=\{f\in\mathcal{A}(\mathbf{1},A),\forall g\in\mathcal{A}(A,\mathbf{1}),g\circ f=0\}.$$

$b)$ Prouvons que tout idéal monoïdal $\mathcal{J}$ distinct de $\mathcal{A}$ est contenu dans $\mathcal{N}$: il suffit de faire voir que pour tout objet A, $\mathcal{J}(\mathbf{1},A)\subset\mathcal{N}(\mathbf{1},A)$, c'est-à-dire que pour tout $f\in\mathcal{J}(\mathbf{1},A)$ et tout $g\in\mathcal{A}(A,\mathbf{1})$, $g\circ f=0\in K$. Si tel n'était pas le cas, on pourrait supposer $g\circ f=1$, donc $1\in\mathcal{J}(\mathbf{1},\mathbf{1})$, d'où $\mathcal{J}(\mathbf{1},A)=\mathcal{A}(\mathbf{1},A)$. Par ailleurs, $\mathcal{N}(\mathbf{1},\mathbf{1})=0$, donc $\mathcal{N}\neq\mathcal{A}$.

[14] Dans [10] cet idéal apparaît, dans le cadre plus général (tressage non nécessairement symétrique) des *tortils* ou *catégories enrubannées*, sous le nom d'idéal des morphismes négligeables.

c) Si $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ est semi-simple, alors $\mathcal{R} \subset \mathcal{J}$. Donc $\mathcal{R}^{(\bullet)} = \mathcal{N}$ est contenu dans $\mathcal{J}^{(\bullet)} = \mathcal{J}$. On a l'inclusion opposée d'après i). □

7.1.5**. Corollaire.** *L'idéal $\mathcal{N}$ ne dépend pas du choix du tressage (symétrique) R.*□

7.1.6**. Proposition.** *Sous les mêmes hypothèses, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{R} \supset \mathcal{N}$,

(ii) *le foncteur de projection $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{N}$ est conservatif,*

(iii) *pour tous objets A, B de $\mathcal{A}$, l'identification*

$$\iota_{AB} : \ \mathcal{A}(\mathbf{1}, A^\vee \bullet B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(A, B)$$

induit une inclusion

$$\mathcal{R}(A, B) \supset \mathcal{R}(\mathbf{1}, A^\vee \bullet B).$$

En outre, $\mathcal{R}$ est un idéal monoïdal si et seulement si $\mathcal{R} = \mathcal{N}$.

Démonstration. (i) $\iff$ (ii) résulte de 1.4.4 b) ; (i) $\iff$ (iii) n'est autre qu'une reformulation de la proposition 7.1.4 a). La dernière assertion suit de ce que $\mathcal{N} = \mathcal{R}^{(\bullet)}$ (ou de (i) $\iff$ (iii)). □

7.1.7**. Corollaire.** *Si $\mathcal{A}$ est semi-simple, $\mathcal{N} = 0$. Si $\mathcal{R} \neq \mathcal{N}$, $\mathcal{R} \neq 0$.*

En effet, la première (*resp.* deuxième) affirmation résulte de la proposition 7.1.4 (*resp.* 7.1.4 et 7.1.6) compte tenu de ce que le radical d'une catégorie semi-simple est nul (*resp.* de ce que 0 est un idéal monoïdal). □

7.1.8**. Exemple.** Revenons à l'exemple de la catégorie monoïdale symétrique rigide $\mathcal{A}$ des motifs de Chow à coefficients rationnels. Des conjectures très fortes dues à A. Beilinson [2] et de J. Murre [41] (qui sont en fait équivalentes, *cf.* [26]) prédisent l'existence d'un filtration finie fonctorielle sur les objets de $\mathcal{A}$. Chaque cran de la filtration est supposé provenir d'une équivalence adéquate, donc définit un idéal monoïdal F^p. D'après [26], il résulterait de ces conjectures et des conjectures standard que F^p est la puissance p-ième de l'idéal F^1 (correspondant à l'équivalence homologique) et que $F^1 = \mathcal{N}$. La finitude conjecturale de la filtration a pour conséquence que $F^1 \subset \mathcal{R}$, donc $F^1 = \mathcal{R} = \mathcal{N}$ ($\mathcal{R}$ est monoïdal), et implique alors : $\mathcal{A}$ est strictement de Wedderburn (noter que $\mathcal{R}^\omega = \cap F^p = 0$). Ces propriétés se transférent aux catégories de motifs purs pour une équivalence adéquate quelconque.

Cet exemple conjectural est l'une des principales sources d'inspiration de ce travail.

7.1.9**. Remarque.** La compatibilité de $\mathcal{N}$ vis-à-vis de l'extension des scalaires (naïve) ne pose pas de problème (contrairement à celle du radical $\mathcal{R}$, *cf.* §3.) C'est prouvé dans [10, 1.4.1], dans un contexte beaucoup plus large.

7.2. **Traces et puissances extérieures.** Cette partie est inspirée par [14, 7.2] et par le récent travail de Kimura ([32], voir aussi [21]). Ici la symétrie du tressage est essentielle.

Soit n un entier > 0. On fait opérer le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur $A^{\bullet n}$ au moyen du tressage [symétrique !] R, en écrivant tout élément σ de $\mathfrak{S}_n$ comme produit de transpositions de la forme $(i\ i+1)$ (le résultat ne dépend pas de cette écriture, *cf.* [14, 7.2]). Plus généralement, si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ et $\beta \in \mathfrak{S}_n$, on a un isomorphisme bien déterminé

$$\beta : A_1 \bullet \cdots \bullet A_n \to A_{\beta(1)} \bullet \cdots \bullet A_{\beta(n)}$$

covariant en β. Si $B_1, \dots, B_n$ sont d'autres objets, pour toute famille $f_i \in \mathcal{A}(A_i, B_i)$, on a

$$\beta \circ (f_1 \bullet \cdots \bullet f_n) = (f_{\beta(1)} \bullet \cdots \bullet f_{\beta(n)}) \circ \beta. \tag{7.5}$$

On a aussi les formules suivantes qui nous seront utiles

$$\iota_{A_{\beta(1)}\bullet\ldots\bullet A_{\beta(n)}, A_{\beta(1)}\bullet\ldots\bullet A_{\beta(n)}}((\beta^{-1},\beta)\circ\varphi) = \beta\circ\iota_{A_1\bullet\ldots\bullet A_n, A_1\bullet\ldots\bullet A_n}(\varphi)\circ\beta^{-1} \tag{7.6}$$

$$\varepsilon_{A^\vee_{\beta(n)}\bullet\ldots\bullet A^\vee_{\beta(1)}} \circ (\beta^{-1}, \beta) = \varepsilon_{A^\vee_n\bullet\ldots\bullet A^\vee_1}, \tag{7.7}$$

où (β^{-1}, β) désigne la “permutation”

$$A_n^\vee \bullet \ldots \bullet A_1^\vee \bullet A_1 \bullet \ldots \bullet A_n \to A^\vee_{\beta(n)} \bullet \ldots \bullet A^\vee_{\beta(1)} \bullet A_{\beta(1)} \bullet \ldots \bullet A_{\beta(n)}.$$

Cas particulier de (7.5) : soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, et supposons que $B_i = A_{\sigma(i)}$ pour tout i. On peut alors considérer l'endomorphisme suivant de $A_1 \bullet \cdots \bullet A_n$ (*cf.* [14, 7.2]) :

$$F = \sigma^{-1} \circ (f_1 \bullet \cdots \bullet f_n).$$

Nous nous proposons de calculer la *trace de* F.

Écrivons σ comme produit de cycles disjoints $\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_p$, et soit $I_k \subset \{1, \dots, n\}$ le support de σ_k. Pour tout $i \in I_k$, on peut considérer l'endomorphisme de A_i

$$F_{k,i} = f_{\sigma^{\ell_k - 1}(i)} \circ \cdots \circ f_{\sigma(i)} \circ f_i$$

où $\ell_k = |I_k|$ est la longueur du cycle σ_k. D'après (7.2), la trace $tr(F_{k,i})$ ne dépend pas du choix de i : notons-là t_k.

7.2.1**. Proposition.** *On a*

$$tr(F) = \prod_{k=1}^{p} t_k.$$

Démonstration. Soit $\beta \in \mathfrak{S}_n$. D'après (7.5) et (7.2), on a

$$\begin{aligned} tr(\beta\sigma^{-1}\beta^{-1} &\circ (f_{\beta(1)} \bullet \cdots \bullet f_{\beta(n)})) \\ &= tr(\beta \circ \sigma^{-1} \circ (f_1 \bullet \cdots \bullet f_n) \circ \beta^{-1}) \\ &= tr(\sigma^{-1} \circ (f_1 \bullet \cdots \bullet f_n)). \end{aligned}$$

Cette formule permet de se ramener au cas où les I_k forment une partition croissante de $\{1,\dots,n\}$:

$$I_k = \{\ell_1 + \cdots + \ell_{k-1} + 1, \dots, \ell_1 + \cdots + \ell_k\}$$

et où, de plus, pour tout k, σ_k est le cycle “croissant”

$$\sigma_k = (\ell_1 + \cdots + \ell_{k-1} + 1, \cdots, \ell_1 + \cdots + \ell_k).$$

Posant alors

$$F_k = \sigma_k^{-1} \circ (f_{\ell_1+\cdots+\ell_{k-1}+1} \bullet ots \bullet f_{\ell_1+\cdots+\ell_k})$$

une itération de la formule (7.4) donne

$$tr(F) = \prod_{k=1}^{p} tr(F_k).$$

Ceci ramène la démonstration de la proposition 7.2.1 au cas où σ est la permutation cyclique de $\{1,\dots,n\}$. Par itération de la formule (6.4), et compte tenu de (6.1) et (6.13), on trouve

$$\begin{aligned}(7.8)\quad & \iota^{-1}_{A_1A_1}(f_n \circ \cdots \circ f_1)\\ &= (1_{A_1^\vee} \bullet \varepsilon_{A_2} \cdots \bullet \varepsilon_{A_n} \bullet 1_{A_1}) \circ (\iota^{-1}_{A_1A_2} f_1 \bullet \cdots \bullet \iota^{-1}_{A_nA_1} f_n)\\ &= (1_{A_1^\vee} \bullet \varepsilon_{A_n^\vee \bullet \cdots \bullet A_2^\vee} \bullet 1_{A_1}) \circ (\iota^{-1}_{A_2 \bullet \cdots \bullet A_n \bullet A_1, A_2 \bullet \cdots \bullet A_n \bullet A_1} F).\end{aligned}$$

En appliquant $\varepsilon_{A^\vee}$ “aux deux facteurs extrêmes $A^\vee$ et A” (ce qui fait sens grâce au tressage), on obtient

$$\begin{aligned}(7.9)\quad tr(f_n \circ \cdots \circ f_1) &= \varepsilon_{A_1^\vee \bullet A_n^\vee \bullet \cdots \bullet A_2^\vee}(\iota^{-1}_{A_2 \bullet \cdots \bullet A_n \bullet A_1, A_2 \bullet \cdots \bullet A_n \bullet A_1} F)\\ &= \varepsilon_{A_1^\vee \bullet A_n^\vee \bullet \cdots \bullet A_2^\vee}(\iota^{-1}_{A_2 \bullet \cdots \bullet A_n \bullet A_1, A_2 \bullet \cdots \bullet A_n \bullet A_1} F)\\ &= \varepsilon_{A_n^\vee \bullet \cdots \bullet A_1^\vee}(\iota^{-1}_{A_1 \bullet \cdots \bullet A_n, A_1 \bullet \cdots \bullet A_n}(\sigma \circ (f_1 \bullet \cdots \bullet f_n))) = tr(\sigma \circ (f_1 \bullet \cdots \bullet f_n))\end{aligned}$$

(*cf.* aussi [14, 7.2]). □

7.2.2**. Corollaire.** *Supposons $A_1 = \cdots = A_n = A$ et $f_1 = \cdots = f_n = f$. Alors*

$$tr(F) = \prod_{k=1}^{p} tr(f^{\circ \ell_k}).$$

En particulier, pour $f = 1$, on a $tr(\sigma) = \dim(A)^p$. □

Dans la suite de ce paragraphe (jusqu'à 7.3), on suppose que $\mathcal{A}$ est pseudo-abélienne.

7.2.3**. Définition.** Soit n un entier naturel tel que $n!$ soit inversible dans K, et soit $A \in \mathcal{A}$. La *puissance extérieure n-ième* $\Lambda^n A$ de A est l'image du projecteur d'antisymétrisation sur $A^{\bullet n}$

$$a_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} sgn(\sigma)\sigma. \tag{7.10}$$

De même, la puissance symétrique n-ième $\mathbf{S}^n A$ d'un objet A de $\mathcal{A}$ est l'image du projecteur de symétrisation $s_n = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sigma$.

Ces constructions sont *fonctorielles* en A.

7.2.4**. Proposition** (*cf.* [14, 7.2])**.** *Soit A un objet de $\mathcal{A}$, et soit f un endomorphisme de A. Alors on a*

$$tr(\Lambda^n(f)) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} sgn(\sigma)\prod_{k=1}^{p} tr(f^{\circ\ell_k})$$

où, pour tout $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, $\ell_1,\dots,\ell_p$ sont les longueurs des cycles disjoints constitutant σ. En particulier, si $d=\dim A$, la dimension de $\Lambda^n A$ est

$$\binom{d}{n} = \frac{d(d-1)\dots(d-n+1)}{n!}.$$

De même, on a

$$tr(\mathbf{S}^n(f)) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\prod_{k=1}^{p} tr(f^{\circ\ell_k})$$

$$\dim\mathbf{S}^n(A) = \binom{d+n-1}{n} = \frac{d(d+1)\dots(d+n-1)}{n!}.$$

Démonstration. La première assertion résulte directement du corollaire 7.2.2. La seconde résulte du cas particulier $f=1$ et de l'identité bien connue

$$\binom{d}{n} = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} sgn(\sigma) d^{\alpha(\sigma)}$$

où $\alpha(\sigma)$ est le nombre de cycles intervenant dans σ. Les assertions pour les puissances symétriques se démontrent de même. □

7.2.5**. Corollaire.** *Sous les hypothèses de la proposition 7.2.4,*
a) $tr(f^{\circ n})$ *s'exprime comme un polynôme universel en les* $tr(\Lambda^i(f))$ *pour* $i = 1,\dots,n$ *à coefficients dans* $\mathbf{Z}[1/n!]$.
b) On a

$$tr(\Lambda^n(1_A+f)) = \sum_{i=0}^{n} tr(\Lambda^i f). \tag{7.11}$$

Démonstration. a) Posons $t_i = tr(f^{\circ i})$: le second membre de la proposition 7.2.4 est donc un polynôme universel en les t_i. On remarque que t_n intervient dans le terme $\prod_{k=1}^p tr(f^{\circ\ell_k})$ si et seulement si σ est un cycle de longueur n, et qu'alors ce terme est égal à t_n. Tous ces cycles ont la même signature $(-1)^{n-1}$, et ils sont au nombre de $(n-1)!$. Ainsi, le second membre de la proposition 7.2.4 est un polynôme du premier degré en t_n, et le coefficient de t_n est égal à $(-1)^{n-1}/n$. L'assertion en résulte, par récurrence sur n.

b) Grâce à a), on voit que $tr(\Lambda^n(1+f))$ s'écrit comme un polynôme universel à coefficients dans $\mathbf{Z}[\frac{1}{n!}]$ en les $tr(\Lambda^i f)$ pour $i\le n$. Prenant pour $\mathcal{A}$ la catégorie monoïdale des modules libres de type fini sur K, on obtient la formule voulue. □

En nous inspirant de Kimura [32] (qui se plaçait dans le cadre des motifs de Chow, voir aussi [21, 3.15]), nous allons démontrer un résultat plus précis que 7.2.1 et 7.2.4, qu'on retrouve en appliquant $\varepsilon_{A_1^\vee}$ aux facteurs extrêmes. On reprend les notations de 7.2.1.

7.2.6. **Proposition.** *Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, notons $\ell_1(\sigma)$ la longueur du cycle σ_1 de σ ayant 1 dans son support. On a*

$$\iota_{A_1A_1}\big((1_{A_1^\vee} \bullet \varepsilon_{A_n^\vee\bullet\cdots\bullet A_2^\vee} \bullet 1_{A_1})(\iota^{-1}_{A_1\bullet\cdots\bullet A_n, A_1\bullet\cdots\bullet A_n}(\sigma^{-1}\circ f_1 \bullet \cdots \bullet f_n))\big) \\ = t_\sigma . f_{\sigma_1^{\ell_1-1}(1)} \circ \cdots \circ f_{\sigma_1(1)} \circ f_1, \tag{7.12}$$

où $t_\sigma = 1$ si σ est cyclique ($\ell_1 = n$), et $t_\sigma \in K$ est un produit de traces de monômes non triviaux en les f_i si σ n'est pas cyclique.

A fortiori, si $A_1 = \ldots = A_n = A$ et $f_1 = \ldots = f_n = f \in \mathcal{A}(A, A)$, et si $n!$ est inversible dans K, on obtient

$$\iota_{AA}\big((1_{A^\vee} \bullet \varepsilon_{A^{\bullet(n-1)}} \bullet 1_A) \circ (\iota^{-1}_{A^{\bullet n}, A^{\bullet n}}(\Lambda^n f))\big) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} t'_\sigma f^{\ell_1(\sigma)} \tag{7.13}$$

$$\iota_{AA}\big((1_{A^\vee} \bullet \varepsilon_{A^{\bullet(n-1)}} \bullet 1_A) \circ (\iota^{-1}_{A^{\bullet n}, A^{\bullet n}}(\mathbf{S}^n f))\big) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} t"_\sigma f^{\ell_1(\sigma)} \tag{7.14}$$

où $t'_\sigma = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$ si σ est cyclique, et $t'_\sigma = \pm\frac{1}{n!}\times$ un produit de traces de puissances non nulles de f sinon (resp. mêmes formules pour $t"_\sigma$, sans les signes).

Démonstration. Abrégeons provisoirement ι_{AA} en ι_A, et

$$(1_{A_1^\vee} \bullet \varepsilon_{A_n^\vee\bullet\cdots\bullet A_2^\vee} \bullet 1_{A_1}) \circ \iota^{-1}_{A_1\bullet\cdots\bullet A_n, A_1\bullet\cdots\bullet A_n}(-)$$

en $\Theta_{A_1\ldots A_n}(-)$.

Soit $\beta \in \mathfrak{S}_n$ une permutation telle que $\beta(1) = 1$. Compte tenu de (7.5), (7.6) et (7.7), on a

$$\begin{aligned}\iota_{A_1A_1}&\big(\Theta_{A_1A_{\beta(1)}\ldots A_{\beta(n)}}(\beta\sigma^{-1}\beta^{-1}\circ(f_1\bullet f_{\beta(2)}\bullet\cdots\bullet f_{\beta(n)}))\big)\\ &= \iota_{A_1A_1}\big(\Theta_{A_1A_{\beta(2)}\ldots A_{\beta(n)}}(\beta\circ\sigma^{-1}\circ(f_1\bullet\cdots\bullet f_n)\circ\beta^{-1})\big)\\ &= \iota_{A_1A_1}\big(\Theta_{A_1\ldots A_n}(\sigma^{-1}\circ(f_1\bullet\cdots\bullet f_n))\big).\end{aligned}$$

Comme dans la preuve de 7.2.1, et parce que σ_1 est choisi de telle sorte que 1 soit dans son support, cette formule permet de se ramener au cas où les I_k forment une partition croissante de $\{1, \ldots, n\}$ et où, de plus, pour tout k, σ_k est le cycle “croissant”

$$\sigma_k = (\ell_1 + \cdots + \ell_{k-1} + 1, \cdots, \ell_1 + \cdots + \ell_k),$$

ce qui permet d'écrire

$$\sigma^{-1}\circ f_1 \bullet \cdots \bullet f_n = (\sigma_1^{-1}\circ f_1 \bullet \cdots \bullet f_{\ell_1}) \bullet \cdots \bullet (\sigma_p^{-1}\circ f_{n-\ell_p} \bullet \cdots \bullet f_n).$$

Compte tenu de (6.1) et (6.13), on en tire

$$\begin{aligned}&\iota_{A_1}\big(\Theta_{A_1\dots A_n}(f_1\bullet\cdots\bullet f_n)\big)\\ &\quad=\iota_{A_1}\big((1_{A_1^\vee}\bullet\varepsilon_{A_{\ell_1}^\vee\bullet\cdots\bullet A_2^\vee}\bullet 1_{A_1})(\iota^{-1}_{A_1\bullet\dots\bullet A_{\ell_1}}(\sigma_1^{-1}\circ f_1\bullet\cdots\bullet f_{\ell_1}))\bullet\\ &\quad\quad\varepsilon_{A_{\ell_1+\ell_2}^\vee\bullet\cdots\bullet A_{\ell_1+1}^\vee}(\iota^{-1}_{A_{\ell_1+1}\bullet\dots\bullet A_{\ell_1+\ell_2}}(\sigma_2^{-1}\circ f_{\ell_1+1}\bullet\cdots\bullet f_{\ell_1+\ell_2}))\bullet\\ &\quad\quad\quad\dots\bullet\varepsilon_{A_n^\vee\bullet\cdots\bullet A_{n-\ell_p}^\vee}(\iota^{-1}_{A_{n-\ell_p}\bullet\dots\bullet A_n}(\sigma_p^{-1}\circ f_{n-\ell_p}\bullet\cdots\bullet f_n))\big)\end{aligned}$$

ce qui n'est autre que

$$(f_{\ell_1}\circ\cdots\circ f_1).tr(f_{\ell_1+\ell_2}\circ\cdots\circ f_{\ell_1+1}).\cdots.tr(f_n\circ\cdots\circ f_{n-\ell_p})$$

par (7.8) et (7.9). Ceci démontre la première assertion, et la seconde s'ensuit immédiatement. □

7.2.7. **Proposition.** *Soit $A\not\cong 0$ un objet de $\mathcal{A}$. On suppose qu'il existe un entier $n>0$ tel que $n!$ soit inversible dans K et tel que tel que $\Lambda^n A=0$ (resp. que $\mathbf{S}^n A=0$). Alors*
i) $\mathcal{N}(A,A)$ est un nil-idéal de $\mathcal{A}(A,A)$ d'échelon de nilpotence $\leq n$. C'est même un idéal nilpotent de $\mathcal{A}(A,A)$, d'échelon de nilpotence borné en fonction de n. En particulier, l'image de A n'est pas nulle dans $\mathcal{A}/\mathcal{N}$.
ii) Si K est intègre de caractéristique nulle, la dimension de A (resp. l'opposé de la dimension de A) est un entier naturel $\leq n$.

Démonstration. i) la formule (7.13) nous dit que

$$\iota_A(1_{A^\vee}\bullet\varepsilon_{A^{\bullet(n-1)}}\bullet 1_A)(\iota^{-1}_{A^{\bullet n}}(\Lambda^n f))=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}t'_\sigma f^{\ell_1(\sigma)},$$

où $t'_\sigma=\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$ si σ est cyclique, et $t'_\sigma=\pm\frac{1}{n!}\times$ un produit de traces de puissances non nulles de f sinon. Pour $f\in\mathcal{N}$, ces derniers termes s'annulent, et on a donc

$$\iota_A(1_{A^\vee}\bullet\varepsilon_{A^{\bullet(n-1)}}\bullet 1_A)(\iota^{-1}_{A^{\bullet n}}(\Lambda^n f))=\frac{(-1)^{n-1}}{n}f^n.$$

Mais $\Lambda^n f=0$ si $\Lambda^n A=0$, et on trouve finalement que $f^n=0$. De même avec S^n au lieu de Λ^n. La nilpotence de $\mathcal{N}(A,A)$ résulte alors du théorème de Nagata-Higman [42, 23], rappelé ci-dessous pour la commodité du lecteur.

La troisième assertion de i) est immédiate.

ii) D'après la proposition 7.2.4, la dimension de $\Lambda^n A$ est donnée par le coefficient binômial $\binom{\dim A}{n}$, qui ne s'annule que si $\dim A$ est un entier naturel $\leq n$.

Le cas d'une puissance symétrique se traite de même. □

7.2.8. **Lemme** (Nagata-Higman)**.** *Soient n un entier >0 et K un anneau commutatif unitaire dans lequel $n!$ est inversible. Soit R une K-algèbre associative non unitaire telle que tout élément $x\in R$ vérifie $x^n=0$. Alors $R^{2^n-1}=0$.*

Démonstration. (d'après P. Higgins) On raisonne par récurrence sur n, en posant $R = R_n$. Posons

$$\xi(x,y) = \sum_{i=0}^{n-1} x^i y x^{n-1-i} \text{ et } \eta(x,y,z) = \sum_{i,j=0}^{n-1} x^i z y^j x^{n-i-1} y^{n-j-1}.$$

En écrivant $(x+iy)^n = 0$ pour $i = 0, \dots n-1$, on obtient par Van der Monde (compte tenu de ce que $(n-1)!$ est inversible dans K) que $\xi(x,y)$ est identiquement nul sur $R_n \times R_n$. Donc $\eta(x,y,z) = \sum_{j=0}^{n-1} \xi(x, zy^j) y^{n-1-j} = 0$, mais $\eta(x,y,z)$ se réécrit $nx^{n-1}zy^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} x^j z \xi(y, x^{n-1-j})$, d'où $x^{n-1}zy^{n-1} = 0$ (compte tenu de ce que n est inversible dans K). Soit I_{n-1} l'idéal de R_n engendré par les puissances $(n-1)$-ièmes. La K-algèbre $R_{n-1} = R_n/I_{n-1}$ est nil d'échelon $n-1$. Par récurrence, $R_{n-1}^{2^{n-1}-1} = 0$, *i.e.* $R_n^{2^{n-1}-1} \subset I_{n-1}$, et on conclut de ce qui précède que

$$R_n^{2^n-1} = R_n^{2^{n-1}-1}.R_n.R_n^{2^{n-1}-1} \subset I_{n-1} \cdot R_n \cdot I_{n-1} = 0.$$

□

7.3. **Trace des endomorphismes nilpotents.** Nous ignorons si un endomorphisme nilpotent est toujours de trace nilpotente, sans hypothèse supplémentaire. Nous allons néanmoins le démontrer dans deux cas particuliers.

7.3.1**. Proposition.** *Supposons que $\mathcal{A}$ soit pseudo-abélienne et que la dimension de tout objet de $\mathcal{A}$ soit un entier naturel. Soit A un objet de dimension n telle que $n!$ soit inversible dans K. Alors tout endomorphisme nilpotent de A est de trace nilpotente dans K.*

Démonstration. Par le théorème de Krull et par extension des scalaires (naïve), on se ramène au cas où K est un corps. Par extension des scalaires de K à $K[t]$, la formule (7.11) donne $tr(\Lambda^n(1+tf)) = \sum_{i=0}^n t^i tr(\Lambda^i f)$. Pour montrer que $tr(f) = 0$ pour tout f nilpotent, il suffit donc d'établir que $tr(\Lambda^n(1+f)) = 1$ pour tout tel f. Or par la proposition 7.2.4, le rang de $\Lambda^n A$ est 1. Il suffit donc de démontrer que pour tout objet B de rang 1, $(\mathcal{A}/\mathcal{N})(B,B) = K.1_B \xrightarrow{tr\,\cong} K$, compte tenu de ce que K est un corps. Cela découle du lemme suivant, qui est une conséquence immédiate de 7.1.3 :

7.3.2**. Lemme.** *Supposons que K soit un corps, que $\mathcal{A}$ soit pseudo-abélienne et que la dimension de tout objet soit un entier naturel. Alors tout objet de dimension 0 de $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ est nul, et pour tout objet B de $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ de dimension 1, le morphisme canonique $\eta_B : \mathbf{1} \to B^\vee \bullet B$ est un isomorphisme.* □

7.3.3**. Proposition** (*cf.* [10, 1.4.3])**.** *Supposons qu'il existe un foncteur monoïdal symétrique H de $\mathcal{A}$ vers une catégorie abélienne monoïdale symétrique rigide $\mathcal{V}$; supposons en outre que l'application $K \to \mathcal{V}(\mathbf{1},\mathbf{1})$ soit injective. Alors tout endomorphisme nilpotent est de trace nulle.*

Démonstration. On se ramène au cas $\mathcal{A} = \mathcal{V}$, donc à supposer $\mathcal{A}$ abélienne. Cela permet de factoriser $f = m \circ e$ en épi suivi de mono. Si $f^n = 0$, on a donc

$$0 = (me)^n = m(em)^{n-1}e$$

d'où $(em)^{n-1} = 0$ puisque m (*resp.* e) est simplifiable à gauche (*resp.* à droite). On écrit alors $tr(me) = tr(em)$, et on conclut par récurrence sur l'échelon de nilpotence. □

7.3.4**. Remarque.** Dans 7.3.1, contrairement à 7.3.3, on ne peut remplacer “trace nilpotente” par “trace nulle” si K n'est pas réduit : la catégorie $\mathcal{A}$ des modules libres de type fini sur l'algèbre des nombres duaux $D = K[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ est monoïdale, D-linéaire, symétrique, rigide, et vérifie $End\,\mathbf{1} = D$ (mais n'est pas abélienne). Or $\varepsilon.1_{\mathbf{1}}$ est un endomorphisme nilpotent de trace non nulle.

7.4. $\otimes$**-Radicaux.** On suppose toujours $\mathcal{A}$ monoïdale symétrique rigide.

7.4.1**. Définition.** Soit $\mathcal{J}$ un idéal monoïdal de $\mathcal{A}$. Le $\otimes$-radical de $\mathcal{J}$ est défini par :

$$\sqrt[\otimes]{\mathcal{J}}(A,B) = \{f \in \mathcal{A}(A,B), \exists n \in \mathbf{N}, f^{\bullet n} \in \mathcal{J}(A^{\bullet n}, B^{\bullet n})\}.$$

7.4.2**. Lemme.** *i) $\sqrt[\otimes]{\mathcal{J}}$ est un idéal monoïdal.*
ii) Pour tout objet A, l'idéal $\sqrt[\otimes]{0}(A,A)$ est nil. Qui plus est, l'idéal bilatère engendré par un élément quelconque de $\sqrt[\otimes]{0}(A,A)$ est nilpotent.
iii) $\sqrt[\otimes]{0}$ est contenu dans $\mathcal{R} \cap \mathcal{N}$ (rappelons que $\mathcal{R}$ désigne le radical de $\mathcal{A}$.)

Démonstration. $i)$ Pour montrer que $\sqrt[\otimes]{\mathcal{J}}$ est un idéal monoïdal, le seul point non trivial est de vérifier que $\sqrt[\otimes]{\mathcal{J}}(A,B)$ est stable par addition. Soient f et g deux éléments de cet ensemble. Il existe donc $n \in \mathbf{N}$ tel que $f^{\bullet n} = g^{\bullet n} \in \mathcal{J}$, et l'on voit alors que $(f+g)^{\bullet 2n} \in \mathcal{J}$ puisque $\mathcal{J}$ est un idéal monoïdal.

$ii)$ (*cf.* [32, dém. de la prop. 2.16]). Soit $f \in \sqrt[\otimes]{0}(A,A)$. Pour tous $g_1, \dots, g_{n+1} \in \mathcal{A}(A,A)$, on a $g_{n+1} \bullet f \bullet g_n \bullet \dots \bullet f \bullet g_1 = 0$ (appliquer le tressage), d'où, par (7.8),

$$\begin{aligned}&\iota_{AA}^{-1}(g_1 \circ f \circ g_2 \circ \dots \circ f \circ g_{n+1}) = \\ &(1_{A^\vee} \bullet \varepsilon_{A^\vee \bullet \dots \bullet A^\vee} \bullet 1_A) \circ \iota^{-1}_{A^{\bullet 2n+1}, A^{\bullet 2n+1}}(\sigma^{-1} \circ (g_{n+1} \bullet f \bullet g_n \bullet \dots \bullet f \bullet g_1))\end{aligned}$$

où σ est la permutation cyclique de $\{1, \dots, 2n+1\}$. On obtient donc que $g_1 \circ f \circ g_2 \circ \dots \circ f \circ g_{n+1} = 0$.

$iii)$ $\sqrt[\otimes]{0} \subset \mathcal{R}$ suit immédiatement de $ii)$. Pour $\sqrt[\otimes]{0} \subset \mathcal{N}$, on utilise la formule (7.4) : $tr(f^{\bullet n}) = tr(f)^n$. □

7.4.3**. Exemple.** Dans le cas de l'exemple 6.3.1 (motifs), l'idéal monoïdal $\sqrt[\otimes]{0}$ correspond à l'équivalence de smash-nilpotence sur les cycles algébriques, introduite par V. Voevodsky [59]. Sa conjecture principale (loc. cit.) revient à dire que $\sqrt[\otimes]{0} = \mathcal{N}$ (dans le cas où le corps de coefficients est de caractéristique nulle).

Par ailleurs, dans [58], Thomason calcule $\sqrt[\otimes]{0}$ dans le cas des catégories dérivées de catégories de faisceaux cohérents.

7.4.4**. Remarque.** La compatibilité de $\sqrt[\otimes]{0}$ vis-à-vis de l'extension des scalaires (naïve) est immédiate.

8. Théorèmes de structure

Dans ce paragraphe, nous tirons les fruits des calculs précédents, pour obtenir des théorèmes de structure : ceux-ci sont rassemblés dans 8.2. Dans tout le paragraphe, *K est un corps et $\mathcal{A}$ est une catégorie K-linéaire monoïdale symétrique rigide, avec $End(\mathbf{1}) = K$.*

On note $\mathcal{R}$ le radical, et $\mathcal{N}$ le plus grand idéal monoïdal distinct de $\mathcal{A}$. (*cf.* 7.1.4).

8.1. **Structure de $\mathcal{A}/\mathcal{N}$.**

8.1.1**. Proposition.** *On suppose qu'il existe un foncteur $F : \mathcal{A} \to Vec_L$ vers la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur une extension L de K, vérifiant $F(\mathbf{1}) \not\models 0$.*
a) Alors les morphismes de $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ forment des K-espaces de dimension finie. Plus précisément,

$$\dim_K(\mathcal{A}/\mathcal{N})(A, B) \leq \dim_L F(A^\vee \otimes B). \dim_L F(\mathbf{1}).$$

En particulier, $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ est semi-primaire.
b) Si F est la composée $G \circ H$ d'un foncteur monoïdal symétrique H de $\mathcal{A}$ vers une catégorie abélienne monoïdale symétrique rigide $\mathcal{V}$, et d'un foncteur $G : \mathcal{V} \to Vec_L$, alors $\mathcal{R} \subset \mathcal{N}$ et $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ est semi-simple.

Démonstration. $a)$ On va donner deux preuves, la première valable seulement si F est K-linéaire.

1) Comme $(\mathcal{A}/\mathcal{N})(A, B) \otimes_K L \simeq (\mathcal{A}_L/\mathcal{N}_L)(A, B)$ (*cf.* remarque 7.1.9), on peut supposer $L = K$. D'autre part, par rigidité, on peut supposer que $A = \mathbf{1}$. Considérons alors l'application K-linéaire définie par F :

$$F : \mathcal{A}(\mathbf{1}, B) \to Hom_K(F(\mathbf{1}), F(B)).$$

Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbf{1}, B)$ tel que $F(f) = 0$. Pour tout $g \in \mathcal{A}(B, \mathbf{1})$, on a $F(gf) = 0$, donc $gf = 0$: en effet, $F : K = End(\mathbf{1}) \to End_K(F(\mathbf{1}))$ est injectif puisque $F(\mathbf{1}) \not\models 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} F \subset \mathcal{N}(\mathbf{1}, B)$. On a donc

$$\dim \mathcal{A}/\mathcal{N}(\mathbf{1}, B) \leq \dim \mathcal{A}(\mathbf{1}, B)/\operatorname{Ker} F \leq \dim Hom(F(\mathbf{1}), F(B)).$$

2) Soit V le sous-L-espace de $Hom_L(F(A^\vee \bullet B), F(\mathbf{1}))$ engendré par $F(\mathcal{A}(A^\vee \bullet B, \mathbf{1}))$. On peut donc trouver des éléments $b_1, \ldots, b_n$ de $\mathcal{A}(A^\vee \bullet B, \mathbf{1})$, avec $n \leq \dim_L F(A^\vee \bullet B). \dim_L F(\mathbf{1})$, qui engendrent V. Soit $a \in \mathcal{A}(A, B) \cong \mathcal{A}(\mathbf{1}, A^\vee \bullet B)$. Dire que $a \in \mathcal{N}(A, B) \cong \mathcal{N}(\mathbf{1}, A^\vee \bullet B)$, c'est dire que $b \circ a = 0$ dans $K = End(\mathbf{1})$ pour tout $b \in \mathcal{A}(A^\vee \bullet B, \mathbf{1})$. Comme F est un foncteur, cela revient à dire que $V \circ F(a) = 0 \in L$. Comme les $F(b_i)$ engendrent V sur L, cela revient finalement à dire que $b_i \circ a = 0$ pour $i = 1, \ldots n$. Ainsi $a \mapsto (b_i \circ a)_i$ définit un plongement K-linéaire de $(\mathcal{A}/\mathcal{N})(A, B) \cong (\mathcal{A}/\mathcal{N})(\mathbf{1}, A^\vee \bullet B)$ dans K^n.

$b)$ Comme $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ est semi-primaire, toutes les K-algèbres d'endomorphismes $\mathcal{A}/\mathcal{N}(C, C)$ sont semi-primaires, donc leurs radicaux sont nilpotents. D'après 7.3.3, tout élément de ce radical est donc de trace nulle. En appliquant ceci à $C = A \oplus B$, on voit que $\mathcal{R}(A, B) \subset \mathcal{N}(A, B)$. Donc $\mathcal{R} \subset \mathcal{N}$, et $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ est semi-simple puisque semi-primaire et de radical nul. □

8.1.2**. Remarques.** 1) La preuve de $a)$ est une variante abstraite de la preuve classique de la finitude des cycles algébriques modulo l'équivalence numérique. L'hypothèse est très faible, mais non superflue : on peut montrer que l'exemple de [14, 2.19] (il s'agit d'une ind-catégorie obtenue à partir de la catégorie monoïdale symétrique rigide $\mathcal{A}$ librement engendrée par un objet X de dimension transcendante sur **Q**) vérifie nos conditions et est même abélienne, mais que $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ n'est pas semi-primaire (en fait, il découle du calcul de $\mathcal{A}(X,X)$ fait dans *loc. cit.* que $\mathcal{N}(X,X)=0$).

2) Le même énoncé (sans les inégalités de dimensions) vaut si l'on suppose seulement que L est une K-algèbre semi-simple commutative plutôt qu'un corps. En effet, on se ramène à la proposition 8.1.1 en projetant sur la catégorie Vec_{L_i}, où L_i est un facteur simple de L tel que $F(\mathbf{1})\otimes_L L_i \neq 0$.

Voici un autre énoncé qui va dans le même sens :

8.1.3**. Proposition.** *On suppose que $\mathcal{A}$ est pseudo-abélienne et que les dimensions des objets sont des entiers naturels.*
$a)$ *Alors les morphismes de $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ forment des K-espaces de dimension finie. On a plus précisément, pour tout objet A :*

$$\dim_K(\mathcal{A}/\mathcal{N})(A,A) \le (\dim A)^2.$$

$b)$ *En fait $\mathcal{R}\subset\mathcal{N}$, et $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ est semi-simple.*

Démonstration. $a)$ Comme $\mathcal{A}$ est K-linéaire, on se ramène au cas des endomorphismes. Choisissons n endomorphismes $f_1,\dots,f_n$ dont les images dans

$\mathcal{A}(A,A)/\mathcal{N}(A,A)$ sont linéairement indépendantes. Il s'agit de voir que $n\le (\dim\, A)^2 = \dim\, A^\vee \bullet A$. Au lemme 7.1.3, on a vu que les $f_1,\dots,f_n$ donnent lieu à un facteur direct $\mathbf{1}^n$ dans $A^\vee\bullet A$ dans la catégorie monoïdale pseudo-abélienne $\mathcal{A}/\mathcal{N}$. Tout supplémentaire sera de dimension un entier naturel par hypothèse, d'où l'inégalité voulue.

$b)$: comme dans la proposition précédente, mais en invoquant 7.3.1 au lieu de 7.3.3. □

8.2. Radical, traces, semi-simplicité. Trois théorèmes de structure.

Comme dans le sous-paragraphe précédent, on suppose que K *est un corps, et que $\mathcal{A}$ est une catégorie K-linéaire monoïdale symétrique rigide, avec $End(\mathbf{1}) = K$.*

8.2.1**. Théorème.** *On suppose K de caractéristique nulle et $\mathcal{A}$ munie d'un foncteur monoïdal symétrique fidèle $H:\mathcal{A}\to L$-$Modf$, où L est une K-algèbre commutative semi-simple. Alors $\mathcal{A}$ est de Wedderburn et H a les propriétés énumérées dans le corollaire 4.1.7 b).*

Démonstration. Comme dans la remarque 4.1.8, on se ramène au cas où L est un corps. D'après le corollaire 4.1.7, il suffit alors de vérifier que, pour tout $a\in\mathcal{A}(A,A)$, le polynôme caractéristique de $H(a)$ est à coefficients dans K. Or, comme $\operatorname{car} K = 0$, ces coefficients s'expriment comme polynômes à coefficients rationnels en les $tr(H(a^i))$. Puisque H est monoïdal symétrique, on a $tr(H(a^i)) = H(tr(a^i)) \in H(End(\mathbf{1})) = K$. □

Au vu de l'exemple 7.1.2, le point $a)$ de l'énoncé suivant peut être considéré comme une version abstraite des résultats de Jannsen [25] (*cf.* [1]).

8.2.2**. Théorème.** *a) On suppose qu'il existe un foncteur monoïdal symétrique H de $\mathcal{A}$ vers une catégorie abélienne monoïdale symétrique $\mathcal{V}$, et un foncteur $G : \mathcal{V} \to L\text{-}Modf$ vérifiant $G(\mathbf{1}) \neq 0$, où L est une K-algèbre commutative semi-simple. Alors*

(i) $\mathcal{R} \subset \mathcal{N}$,

(ii) *$\mathcal{A}/\mathcal{N}$ est semi-simple,*

(iii) *le seul idéal monoïdal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ soit semi-simple est $\mathcal{I} = \mathcal{N}$.*

b) Supposons de plus que K soit de caractéristique nulle, que $G = Id$ et que H soit fidèle. Alors

(i) $\mathcal{R} = \mathcal{N}$,

(ii) *$\mathcal{A}$ est de Wedderburn,*

(iii) *$\mathcal{A}$ est pseudo-abélienne si et seulement si $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ est abélienne.*

Démonstration. a) (i) et (ii) suivent de la proposition 8.1.1 b) et de la remarque 8.1.2 2) ; (iii), indiqué pour mémoire, a déjà été vu dans la proposition 7.1.4 c).

b) Pour (i), il faut voir que $\mathcal{N} \subset \mathcal{R}$. On remarque que, via H, la trace monoïdale tr s'interprète comme une "vraie" trace au sens de l'algèbre linéaire. Comme K est supposé de caractéristique nulle, un endomorphisme d'un L-module de type fini dont toutes les puissances strictement positives sont de trace nulle est nilpotent, et on déduit de là que $\mathcal{N}(A, A)$ est un nil-idéal, donc contenu dans $\mathcal{R}(A, A)$, pour tout objet A de $\mathcal{A}$. Le point (ii) découle du théorème précédent. Enfin, (iii) résulte de ceci et de la proposition 2.3.4 b). □

8.2.3**. Remarques.** 1) Si $\mathcal{A}$ est tannakienne et que K est de caractéristique nulle, on verra dans la proposition 18.1.1 que $\mathcal{A}/\mathcal{R}$ est encore tannakienne (neutre si $\mathcal{A}$ l'est). Par contre, on verra aussi que l'hypothèse de caractéristique nulle est nécessaire (contre-exemple 10.1.2, ou remarque 19.5.4 1).

2) Par ailleurs, il ne suffirait pas dans le théorème 8.2.2 de supposer que H est un foncteur fibre $\mathbf{Z}/2$-gradué, *cf.* contre-exemple 10.1.1 ci-dessous.

8.2.4**. Théorème.** *Supposons K de caractéristique nulle et $\mathcal{A}$ pseudo-abélienne. Considérons les propriétés suivantes :*

a) pour tout objet A de $\mathcal{A}$, il existe un entier $n > 0$ tel que $\Lambda^n A = 0$,

b) $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ est semi-simple, et pour tout objet A de $\mathcal{A}$, $\mathcal{N}(A, A)$ est un idéal nilpotent,

c) $\mathcal{R} = \mathcal{N}$,

d) $\mathcal{A}$ ne contient pas d'objet fantôme, i.e. d'objet non nul dont l'image dans $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ est nulle,

e) $\mathcal{A}$ est de Wedderburn,

f) $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ est tannakienne semi-simple.

g) la dimension de tout objet de $\mathcal{A}$ est un entier naturel,

Alors

(i) $a) \implies b) \implies c) \implies d) + e)$ *et* $a) \implies f) + g)$,

(ii) *sous* $g)$, *on a* $a) \iff b) \iff c) \iff d)$.

8.2.5**. Remarques.** 1) La propriété $a)$ présente l'avantage sur les suivantes d'être testable sur des "générateurs tensoriels" de $\mathcal{A}$: soit (A_α) une famille d'objets A_α de $\mathcal{A}$ tels que tout objet de $\mathcal{A}$ soit isomorphe à un facteur direct d'une somme directe de $\bullet$-monômes en les A_α ; on peut montrer que $a)$ est vérifié dès que pour tout α, il existe n_α tel que $\Lambda^{n_\alpha} A_\alpha = 0$.
2) Les propriétés $a), f)$ et $g)$ dépendent du tressage, alors que $b), c), d)$ et $e)$ n'en dépendent pas.
3) Nous verrons en 10.1.1 que $g) + e)$ ne suffit pas à impliquer $\mathcal{R} = \mathcal{N}$).
4) Les propriétés du théorème sont par exemple vérifiées dans le cas de la catégorie monoïdale des fibrés vectoriels sur une variété projective géométriquement connexe sur K.

Démonstration. Séparons $b)$ en $b_1)$: $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ est semi-simple, et $b_2)$: $\forall \mathcal{A}$, $\mathcal{N}(A, A)$ est un idéal nilpotent. Nous allons démontrer que $a) \implies b_2)$, $b_1) + b_2) \implies c) \implies d)$, $a) \implies g) \implies b_1)$, $b_1)+b_2)+c) \implies e)$, $a)+b_1)+b_2) \implies f)$ et $d)+g) \implies a)$.

$a) \implies b_1)$ suit de la proposition 7.2.7 i).

$b_1) + b_2) \implies c)$: l'inclusion $\mathcal{R} \supset \mathcal{N}$ vient grâce au fait que le radical d'une K-algèbre contient tout nilidéal. L'inclusion opposée de la semi-simplicité de $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ (1.4.7).

$c) \implies d)$: en effet, la projection $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{R}$ étant conservative, elle ne peut envoyer un objet non nul sur un objet nul.

$a) \implies g)$: cela résulte de la proposition 7.2.7 ii).

$b_1) + b_2) + c) \implies e)$: immédiat.

Il reste à montrer que $a) + b_1) + b_2) \implies f)$. Par $b_2)$, $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ est pseudo-abélienne tout comme $\mathcal{A}$ (lemme 2.3.3). Par $b_1)$, elle est donc abélienne (*cf.* A.2.10). Comme elle vérifie aussi $a)$, le théorème de Deligne [14, 7.1] montre qu'elle est tannakienne.

$g) \implies b)$: cela résulte de la proposition 8.1.3.

$d) + g) \implies a)$: Soit A un objet de dimension d. Notons $\bar{A}$ son image dans $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ et posons $B := \Lambda^{d+1} A$. Montrons que $B = 0$. Par $d)$, il suffit de montrer que son image $\bar{B}$ dans $\mathcal{A}/\mathcal{N}$, qui n'est autre que $\Lambda^{d+1}\bar{A}$, est nulle. Notons que $\bar{B}$ est de dimension $\binom{d}{d+1} = 0$. Par $g)$, et d'après 7.3.2, on a bien $\bar{B} = 0$ puisque $\mathcal{A}$ est pseudo-abélienne. □

8.3. **Variante Z/2-graduée.** En théorie des motifs, la catégorie monoïdale des motifs purs modulo l'équivalence numérique est parfois appelée la "fausse" catégorie des motifs. La raison en est que cette catégorie ne peut pas être tannakienne car la dimension d'un objet M est un entier éventuellement négatif : si H est une cohomologie de Weil et si $\tilde{M}$ est un relèvement de M à la catégorie des motifs modulo l'équivalence H-homologique, alors $\dim M = \dim \tilde{M} = \sum_{i \in \mathbf{Z}} (-1)^i H^i(M)$. En particulier, la condition g) du théorème 8.2.4 ne s'applique pas dans ce contexte.

Pour corriger ce défaut, on fait la conjecture standard que les projecteurs de Künneth de tout motif M (relatifs à H) sont algébriques, ce qui permet de modifier la contrainte de commutativité de façon à obtenir la formule $\dim M =$

$\sum_{i\in\mathbf{Z}} H^i(M) \geq 0$. Pour y parvenir, il suffit en fait que la somme des projecteurs de Künneth pairs (ou impairs, de manière équivalente), soit algébrique.

Faute de savoir démontrer cette conjecture standard en général, on peut se limiter à la sous-catégorie pleine formée des motifs M pour lesquelles elle est vraie : c'est le point de vue adopté dans [1]. (C'est une sous-catégorie monoïdale qui contient au moins les motifs attachés aux courbes, aux surfaces et aux variétés abéliennes, et qui contient tous les motifs si le corps de base est un corps fini.) Le formalisme de la modification de la contrainte de commutativité est abstrait dans la proposition suivante :

8.3.1**. Proposition.** *Supposons K de caractéristique nulle, et soit L une K-algèbre semi-simple commutative. Supposons $\mathcal{A}$ munie d'un foncteur monoïdal symétrique fidèle H vers la catégorie monoïdale symétrique $Modf_L^\pm$ des L-modules de type fini $\mathbf{Z}/2$-gradués munie de la règle de Koszul. Considérons, pour tout $A \in \mathcal{A}$, la projection $p_A^+ \in End(H(A))$ sur le facteur $H^+(A)$. Soit $\mathcal{A}^\pm$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$ formée des objets A tels que $p_A^+ = H(\pi_A^+)$ pour un $\pi_A^+ \in \mathcal{A}(A, A)$. On note $\mathcal{R}^\pm, \mathcal{N}^\pm$ la restriction de $\mathcal{R}, \mathcal{N}$ à $\mathcal{A}^\pm$. Alors*

(i) *$\mathcal{A}^\pm$ est une sous-catégorie K-linéaire monoïdale de $\mathcal{A}$, stable par facteurs directs et rigide.*

(ii) *Il existe sur $\mathcal{A}^\pm$ une contrainte de commutativité telle que le foncteur monoïdal composé*

$$\mathcal{A}^\pm \to \mathcal{A} \xrightarrow{H} Vec_L^\pm \to Vec_L,$$

où le dernier foncteur est le foncteur d'oubli, soit symétrique.

En particulier, $\mathcal{A}^\pm$ est de Wedderburn, $\mathcal{R}^\pm = \mathcal{N}^\pm$, et $\mathcal{A}^\pm/\mathcal{N}^\pm$ est semi-simple.

Démonstration. Vérification immédiate pour (i) : si $A, B \in \mathcal{A}^\pm$, $\pi_{A\bullet B}^+$ est donné par $\pi_A^+ \bullet \pi_B^+ + (1-\pi_A^+) \bullet (1-\pi_B^+)$. De même, si $A^\vee$ est le dual de $A \in \mathcal{A}^\pm$, $\pi_{A^\vee}^+$ est donné par le transposé $(\pi_A^+)^t$. Pour $A \in \mathcal{A}^\pm$, posons $\varepsilon_A = 2\pi_A^+ - 1$: on a $\varepsilon_A^2 = 1$. Pour $A, B \in \mathcal{A}$, soit $R_{A,B} : A \bullet B \to B \bullet A$ la contrainte de commutativité. Si $A, B \in \mathcal{A}^\pm$, posons

$$R'_{A,B} = R_{A,B}\varepsilon_A \bullet \varepsilon_B. \tag{8.1}$$

On voit tout de suite que R' est une nouvelle contrainte de commutativité, vérifiant la condition (ii) : pour la naturalité, cela résulte du fait que π_A^+, donc ε_A, est naturel en A, et la vérification des identités de tressage symétrique est immédiate. La dernière affirmation résulte du théorème 8.2.2. $\square$

Si l'on est dans la situation de la proposition 8.3.1, on peut appliquer le théorème 8.2.4 à $\mathcal{A}^\pm$ munie de la nouvelle contrainte de commutativité. En exprimant tout en termes de l'ancienne contrainte, cela revient à utiliser au lieu des puissances extérieures les “super-puissances extérieures” d'un objet $A = A_+ \oplus A_-$ de $\mathcal{A}^\pm$, définies par

$$s\Lambda^n A = \bigoplus_{i+j=n} \Lambda^i A_+ \bullet \mathbf{S}^j A_-.$$

Nous reviendrons sur ces super-puissances extérieures dans la section suivante 9, où nous démontrerons que la catégorie $\mathcal{A}^{\pm}$ de la proposition 8.3.1 est *intrinsèque* (*i.e.* indépendante de H).

9. Le Pair et l'Impair

La catégorie $\mathcal{A}$ est toujours K-linéaire monoïdale symétrique rigide, qu'on suppose en outre *pseudo-abélienne* ; K est un corps de caractéristique nulle.

9.1. **Fondements.**

9.1.1**. Définition.** a) Un objet $A \in \mathcal{A}$ est *pairement de dimension finie au sens de Kimura* s'il existe un entier $n > 0$ tel que $\Lambda^n(A) = 0$.
b) Un objet $A \in \mathcal{A}$ est *impairement de dimension finie au sens de Kimura* s'il existe un entier $n > 0$ tel que $\mathbf{S}^n(A) = 0$.
c) Un objet $A \in \mathcal{A}$ est *de dimension finie au sens de Kimura* s'il admet une décomposition en somme directe $A = A_+ \oplus A_-$ telle que A_+ soit pairement de dimension finie et A_- soit impairement de dimension finie.

Cette définition a été introduite par Kimura dans [32] pour les motifs de Chow. Un grand nombre de ses résultats sont valables, avec leur démonstration, dans notre cadre général. Pour les démonstrations de ce qui suit, nous renvoyons donc à Kimura, sauf pour les énoncés qui ne figurent pas chez lui.

9.1.2**. Notation.** Si A est pairement (*resp.* impairement) de dimension finie au sens de Kimura, on note $\mathrm{kim}(A)$ le plus petit entier $n > 0$ tel que $\Lambda^{n+1}(A) = 0$ (*resp.* tel que $\mathbf{S}^{n+1}(A) = 0$).

Cette notation abusive ne prêtera pas à confusion car nous préciserons à chaque fois si l'on est dans le cas pair ou impair [47][15].

9.1.3**. Exemple.** L'objet unité **1** est pairement de dimension finie ; on a $\mathrm{kim}(\mathbf{1}) = 1$.

9.1.4**. Proposition.** *a) Toute somme directe, tout facteur direct d'un objet pairement (resp. impairement) de dimension finie est pairement (resp. impairement) de dimension finie.*
b) Soient $A, B \in \mathcal{A}$, pairement ou impairement de dimension finie. Alors $A \bullet B$ est pairement de dimension finie si A et B sont de même parité, impairement de dimension finie sinon. De plus, $\mathrm{kim}(A \bullet B) \leq \mathrm{kim}(A)\mathrm{kim}(B)$.
c) Le dual d'un objet pairement (resp. impairement) de dimension finie est pairement (resp. impairement) de dimension finie.
d) Si A est pairement de dimension finie, il en est de même de toutes ses puissances extérieures.
e) Si A est impairement de dimension finie, il en est de même de ses puissances symétriques d'ordre impair, tandis que ses puissances symétriques d'ordre pair sont pairement de dimension finie.

[15] Du reste, on verra ultérieurement qu'un objet à la fois pairement et impairement de dimension finie est nul.

Démonstration. a) résulte des isomorphismes

$$\Lambda^n(A \oplus B) \simeq \bigoplus_{p+q=n} \Lambda^p(A) \bullet \Lambda^q(B)$$

$$\mathbf{S}^n(A \oplus B) \simeq \bigoplus_{p+q=n} \mathbf{S}^p(A) \bullet \mathbf{S}^q(B).$$

b) : *cf.* [32, prop. 5.10].

c) résulte des isomorphismes $\mathfrak{S}_n$-(anti-)équivariants

$$(A^\vee)^{\bullet n} \simeq (A^{\bullet n})^\vee.$$

d) et e) résultent immédiatement de a) et b). $\square$

9.1.5**. Lemme.** *a) Soit $A \in \mathcal{A}$, pairement de dimension finie. Alors $\dim A$ est un entiernaturel $\leq \mathrm{kim} A$.*
b) Soit $A \in \mathcal{A}$, impairement de dimension finie. Alors $-\dim A$ est un entier naturel $\leq \mathrm{kim} A$.

Démonstration. C'est une reformulation de la proposition 7.2.7 ii). $\square$

9.1.6**. Proposition.** *Soit $A \in \mathcal{A}$, pairement ou impairement de dimension finie. Supposons que $\dim A = 0$. Alors $A = 0$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ la plus petite sous-catégorie pleine rigide épaisse (*i.e.* stable par facteurs directs) de $\mathcal{A}$ contenant $A \bullet A^\vee$. D'après la proposition 9.1.4, tout objet de $\mathcal{B}$ est pairement de dimension finie. D'après le lemme 9.1.5, cela implique que la dimension de tout objet de $\mathcal{B}$ est un entier naturel. De plus, $\dim(A \bullet A^\vee) = \dim(A)^2 = 0$. D'après la proposition 7.2.7 i), $\mathcal{N}(A, A)$ est donc un idéal nilpotent de $\mathcal{A}(A, A) = \mathcal{B}(A, A)$, et d'après la proposition 8.1.3 a), $\mathcal{B}/\mathcal{N}(A, A) = 0$. Il en résulte bien que $A = 0$. $\square$

9.1.7**. Théorème.** *a) Soit $A \in \mathcal{A}$ pairement de dimension finie. Alors $\mathrm{kim} A = \dim A$.*
b) Soit $A \in \mathcal{A}$ impairement de dimension finie. Alors $\mathrm{kim} A = -\dim A$.

Démonstration. a) Soit $m' = \dim A$. Vu le lemme 9.1.5 a), il suffit de montrer que $\Lambda^{m'+1}(A) = 0$. Mais d'après la proposition 7.2.4, on a $\dim \Lambda^{m'+1}(A) = \binom{m'}{m'+1} = 0$. L'assertion résulte donc de la proposition précédente.

b) Même démonstration, en utilisant une puissance symétrique. $\square$

Le corollaire suivant n'est pas démontré chez Kimura.

9.1.8**. Corollaire.** *a) Si A et B sont pairement de dimension finie, alors $\mathrm{kim}(A \oplus B) = \mathrm{kim} A + \mathrm{kim} B$.*
b) Si A et B sont impairement de dimension finie, alors $\mathrm{kim}(A \oplus B) = \mathrm{kim} A + \mathrm{kim} B$. $\square$

9.1.9**. Proposition.** *Soient A_+ (resp. A_-) un objet de $\mathcal{A}$ pairement (resp. impairement) de dimension finie. Soient $m = \mathrm{kim} A_+$ et $n = \mathrm{kim} A_-$. Alors pour tout $f \in \mathcal{A}(A_+, A_-)$ et tout $g \in \mathcal{A}(A_-, A_+)$, on a $f^{\bullet(mn+1)} = 0$, $g^{\bullet(mn+1)} = 0$.*

Démonstration. Voici une variante de [32, dém de la prop. 6.1], un peu plus simple : grâce à la proposition 9.1.4 b) et par dualité, on se ramène à traiter le cas de f avec $A_+ = \mathbf{1}$. Le morphisme $f^{\bullet(n+1)} : \mathbf{1} = \mathbf{1}^{\bullet(n+1)} \to A_-^{\bullet(n+1)}$ est $\mathfrak{S}_n$-équivariant, ce qui implique qu'il se factorise à travers $\mathbf{S}^{n+1}(A_-) = 0$. □

9.1.10**. Proposition.** *Soit A un objet de dimension finie au sens de Kimura, et supposons données deux décompositions $A \simeq A_+ \oplus A_- \simeq B_+ \oplus B_-$, avec A_+, B_+ pairement de dimension finie et A_-, B_- impairement de dimension finie. Alors $A_+ \simeq B_+$ et $A_- \simeq B_-$.*

Démonstration. *cf.* [32, dém. de la prop. 6.3]. On remarquera que cette démonstration utilise le corollaire 9.1.8 a). □

9.1.11**. Lemme.** *Soit $A \in \mathcal{A}$, et soit $A = A_+ \oplus A_-$ une décomposition en somme directe. Posons*
$$s\Lambda^n(A_+, A_-) = \bigoplus_{i+j=n} \Lambda^i A_+ \bullet \mathbf{S}^j A_-.$$
Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *Il existe un entier $n > 0$ tel que $s\Lambda^n(A_+, A_-) = 0$.*

(ii) *A_+ est pairement de dimension finie et A_- est impairement de dimension finie.*

De plus, dans (i), on peut prendre $n = \mathrm{kim} A_+ + \mathrm{kim} A_- + 1$, et ceci est le plus petit choix possible.

Démonstration. Laissée au lecteur (pour voir que $\mathrm{kim} A_+ + \mathrm{kim} A_- + 1$ est le plus petit choix possible, observer que
$$\dim s\Lambda^{\mathrm{kim} A_+ + \mathrm{kim} A_-}(A_+, A_-) = \dim s\Lambda^{\dim A_+ - \dim A_-}(A_+, A_-) = 1,$$
en utilisant le corollaire 9.1.8). □

9.1.12**. Proposition** ([32, prop. 6.9])**.** *Tout facteur direct d'un objet de dimension finie est de dimension finie.* □

9.1.13**. Définition.** Soit A un objet de dimension finie au sens de Kimura. On définit
$$\mathrm{kim} A = \mathrm{kim} A_+ + \mathrm{kim} A_- = \dim A_+ - \dim A_-$$
$$s\Lambda^n A = \bigoplus_{i+j=n} \Lambda^i A_+ \bullet \mathbf{S}^j A_-$$
où $A = A_+ \oplus A_-$ est une décomposition de A en somme d'un objet pairement de dimension finie et d'un objet impairement de dimension finie.

La proposition 9.1.10 montre que $\mathrm{kim} A$ *ne dépend que de A et que $s\Lambda^n A$ ne dépend que de A à isomorphisme près.*

On a maintenant la généralisation suivante de la proposition 7.2.7 :

9.1.14**. Proposition.** *Soit $A \in \mathcal{A}$ un objet de dimension finie au sens de Kimura. Alors $\mathcal{N}(A, A)$ est un idéal nilpotent de $\mathcal{A}(A, A)$, d'échelon borné en termes de $\mathrm{kim}(A)$. En particulier, pour $A \not\simeq 0$, l'image de A n'est pas nulle dans $\mathcal{A}/\mathcal{N}$.*

Démonstration. D'après 7.2.8, il suffit de faire voir que $\mathcal{N}(A,A)$ est un nilidéal d'échelon borné en termes de $\mathrm{kim}(A)$. L'argument est analogue à celui de [32, prop. 7.5] : tout élément f de $\mathcal{N}(A,A)$ peut s'écrire comme une matrice 2×2 sur la décomposition $A = A_+ \oplus A_-$. On écrit $f = f_+ + f_- + f_\pm$, où f_+ est le terme préservant A_+, f_- le terme préservant A_- et $f_\pm$ est la somme des deux termes antidiagonaux. Comme $f_+f_- = f_-f_+ = 0$, un monôme typique intervenant dans le développement de f^n est de la forme

$$m = f_{\varepsilon_1}^{k_1} \circ f_\pm \circ f_{\varepsilon_2}^{k_2} \circ f_\pm \circ \cdots \circ f_\pm \circ f_{\varepsilon_r}^{k_r}$$

avec $\varepsilon_i \in \{+,-\}$.

D'après la proposition 7.2.7, on a $m = 0$ dès que l'un des k_i est assez grand. D'autre part, d'après la proposition 9.1.9 et le lemme 7.4.2 i), on a $f_\pm^{\bullet N} = 0$ pour N assez grand (indépendamment de f), ce qui implique (lemme 7.4.2 ii)) que $m = 0$ dès que le nombre de fois où $f_\pm$ apparaît est $\geq N$. Ceci conclut la démonstration.□

9.1.15**. Remarque.** On pourrait aussi utiliser le raisonnement de la démonstration de la proposition 2.3.4 c) à partir de la proposition 7.2.7. Ceci donne l'estimation suivante pour l'échelon de nilpotence N de $\mathcal{N}(A,A)$:

$$N \leq 2^{\mathrm{kim}A_+ +1} + 2^{\mathrm{kim}A_- +1} \leq 2^{\mathrm{kim}A+1} + 1$$

bien meilleure que celle fournie par la démonstration ci-dessus.

9.1.16**. Définition.** Une *catégorie de Kimura*[16] sur un corps de caractéristique nulle K est une catégorie K-linéaire monoïdale symétrique rigide, vérifiant $End(\mathbf{1}) = K$, pseudo-abélienne, et dont tout objet est de dimension finie au sens de Kimura.

9.2. **Catégories de Kimura et "projecteurs de Künneth".**

Soient K un corps de caractéristique nulle et $\mathcal{A}$ une catégorie K-linéaire monoïdale symétrique rigide, vérifiant $End(\mathbf{1}) = K$, pseudo-abélienne. Soit $\mathcal{A}_{\mathrm{kim}}$ la plus grande sous-catégorie de Kimura de $\mathcal{A}$, *i.e.* la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$ formée des objets de dimension finie au sens de Kimura : c'est une sous-catégorie épaisse et rigide de $\mathcal{A}$, d'après les propositions 9.1.4 et 9.1.12.

9.2.1**. Théorème.** *Supposons que* $\sqrt[\otimes]{0} = 0$. *Alors*
a) La catégorie $\mathcal{A}_{\mathrm{kim}}$ *est munie d'une* $\mathbf{Z}/2$*-graduation compatible à la structure monoïdale.*
b) Pour tout $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{kim}}$*, notons* π_A^+ *le projecteur de* A *définissant* A_+ *et* $\varepsilon_A = 2\pi_A^+ - 1$ *: on a* $\varepsilon_A^2 = 1$*. Définissons une nouvelle contrainte de commutativité* R' *sur* $\mathcal{A}_{\mathrm{kim}}$ *par la formule* (8.1). *Alors*

(i) *Pour tout* $n \geq 0$*, l'objet* $s\Lambda^n(A)$ *est la* n*-ième puissance symétrique de* A *relative à* R'.

(ii) *La dimension de* A *relative à* R' *est égale à* $\mathrm{kim}A$ *; en particulier, c'est un entier* ≥ 0.

[16]Cette notion a été introduite indépendamment par P. O'Sullivan sous le nom de "semi-positive category", comme nous l'avons appris après la soumission de ce texte à publication (*cf.* postscriptum à l'introduction générale).

Cette propriété caractérise d'ailleurs la graduation dont il est question en a).

c) Soient L une K-algèbre semi-simple commutative et $H : \mathcal{A} \to Modf_L^{\pm}$ un foncteur vérifiant les hypothèses de la proposition 8.3.1. Alors avec les notations de loc. cit. , on a $\mathcal{A}_{\mathrm{kim}} = \mathcal{A}^{\pm}$. Munie de la contrainte induite par R', le quotient de $\mathcal{A}_{\mathrm{kim}}$ par son radical est un catégorie tannakienne semi-simple.

Démonstration. a) Puisque $\sqrt[\otimes]{0} = 0$, la proposition 9.1.9 montre que si A et B sont ε-ment de dimension finie à la Kimura avec des parités différentes, alors $\mathcal{A}(A, B) = 0$. Ceci permet de renforcer la proposition 9.1.10 en l'énoncé suivant : si $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{kim}}$, la décomposition de A en somme directe d'un objet pair et d'un objet impair est *unique*. Il en résulte immédiatement que cette décomposition est fonctorielle en A ; les autres propriétés résultent de la proposition 9.1.4.

b) ne présente pas de difficulté.

c) Pour voir l'inclusion $\mathcal{A}_{\mathrm{kim}} \subset \mathcal{A}^{\pm}$, il suffit de voir que $H(\pi_A^+) = p_A^+$ (avec les notations de la proposition 8.3.1). En effet, on voit immédiatement que $H(A_+)$ est pair et que $H(A_-)$ est impair (*cf.* [32, dém. de la prop. 3.9]). Pour voir l'inclusion opposée, il suffit de voir que si $A = A_+ \oplus A_- \in \mathcal{A}^{\pm}$, alors A_+ est pairement de dimension finie et A_- est impairement de dimension finie. Choisissons n tel que $H(\Lambda^n(A_+)) = \Lambda^n(H(A_+)) = 0$. Comme H est fidèle, cela entraîne que le morphisme identité de

$\Lambda^n(A_+)$ est nul, donc $\Lambda^n(A_+) = 0$; de même pour A_-. Le changement de contrainte de commutativité comme en 8.3.1 ramène à la situation du théorème 8.2.4, qui permet de conclure que la catégorie quotient par $\mathcal{R} = \mathcal{N}$ munie de la contrainte induite par R' est tannakienne semi-simple. □

9.2.2**. Théorème.** *Toute catégorie de Kimura $\mathcal{A}$ est de Wedderburn. Son radical $\mathcal{R}$ est le plus grand idéal monoïdal distinct de $\mathcal{A}$. Le quotient de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{R}$ est une catégorie tannakienne semi-simple (après changement approprié de la contrainte de commutativité).*

Démonstration. On a $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathrm{kim}}$. La première affirmation résulte de la proposition 9.1.14. Pour le reste, on se ramène au théorème 9.2.1 en quotientant par $\sqrt[\otimes]{0}$ (*cf.* le lemme 7.4.2 iii)) □

9.2.3**. Remarque.** Étant donné une catégorie de Kimura $\mathcal{A}$, le théorème 9.2.2 nous permettra d'appliquer les théorèmes de scindage monoïdal 13.2.1 et 15.3.5 à la projection $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{R}$. En particulier, *on pourra munir $\mathcal{A}$ d'une $\mathbf{Z}/2$-graduation compatible à celle de $\mathcal{A}/\sqrt[\otimes]{0}$, unique à équivalence monoïdale près*. Voir le théorème 16.1.1.

9.2.4**. Exemple.** Kimura [32, 7.1] conjecture que tout motif de Chow est de dimension finie en son sens (c'est-à-dire, avec la terminologie ci-dessus, que la catégorie des motifs de Chow est une **Q**-catégorie de Kimura). Cette conjecture implique donc que tout motif "fantôme", *i.e.* numériquement nul, est nul. Réciproquement, modulo l'existence pour chaque motif de Chow A d'un projecteur π_A^+ qui s'envoie sur le projecteur de Künneth pair p_A^+, la non-existence de motifs fantômes non nuls implique la conjecture de Kimura (considérer le motif $s\Lambda^n A$ pour n assez grand).

Par ailleurs, la conjecture de Murre mentionnée en 7.1.8 implique l'existence d'un tel p_A^+, et, jointe aux conjectures standard de Grothendieck (équivalence homologique = équivalence numérique), implique la non-existence de motifs fantômes non nuls. On voit ainsi que la conjecture de Murre (ou, ce qui est équivalent, la conjecture de Bloch-Beilinson) jointe aux conjectures standard implique la conjecture de Kimura.

10. Exemples et compléments

10.1. **Trois contre-exemples.** Voici trois exemples de catégories monoïdales K-linéaires symétriques et rigides, vérifiant $End(\mathbf{1}) = K$, abéliennes, de Wedderburn, mais *dont le radical n'est pas un idéal monoïdal*.

10.1.1**. Contre-exemple.** Partons de $D = K[\varepsilon], \varepsilon^2 = 0$, vue comme super-algèbre (ε placé en degré impair). On considère le super-groupe algébrique $GL(1|1, D)$. Son groupe de points est donné par les matrices 2×2 inversibles du type

$$\begin{pmatrix} a & \varepsilon b \\ \varepsilon c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in K, a \neq 0, d \neq 0$$

cf. [15, ch. 1]. On prend pour $\mathcal{A}$ la catégorie des représentations de $GL(1|1, D)$. C'est une sous-catégorie K-linéaire monoïdale rigide non pleine de la catégorie monoïdale symétrique rigide des super-D-modules.

La représentation standard de $GL(1|1, D)$ est le super-D-module $D^{1|1} = D \times \Pi D$ (où Π est le foncteur changement de parité). Un endomorphisme de $D^{1|1}$ est donné par une matrice $\begin{pmatrix} a & \varepsilon b \\ \varepsilon c & d \end{pmatrix}$ comme ci-dessus ; s'il commute à tout élément $\begin{pmatrix} a' & \varepsilon b' \\ \varepsilon c' & d' \end{pmatrix} \in GL(1|1, D)$, on trouve que $ba' + db' = ab' + bd', ca' + dc' = ac' + cd'$ pour tous $a', b', c', d' \in K, a' \neq 0, d' \neq 0$, d'où, $b = c = 0, a = d$. Donc $\mathcal{A}(D^{1|1}, D^{1|1}) \cong K$ est réduit aux homothéties, et son radical est nul.

La trace monoïdale de $\begin{pmatrix} a & \varepsilon b \\ \varepsilon c & d \end{pmatrix}$ est la supertrace $a - d$. Elle s'annule donc pour toute homothétie, ce qui montre que $\mathcal{N}(D^{1|1}, D^{1|1}) = \mathcal{A}(D^{1|1}, D^{1|1})$. En d'autres termes, $D^{1|1}$ est un objet "fantôme" : il s'envoie sur l'objet nul dans $\mathcal{A}/\mathcal{N}$.

On a donc $0 \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{A}$ et toutes les inclusions sont strictes (*cf.* théorème 8.2.2 et corollaire 7.1.7) ; en particulier $\mathcal{A}$ n'est ni semi-simple, ni de Kimura. Elle est en revanche de Wedderburn (finitude des espaces d'homomorphismes), et la dimension de tout objet est un entier naturel ($\mathcal{A}/\mathcal{N} \sim Vec_K$).

10.1.2**. Contre-exemple.** K est maintenant supposé de caractéristique $p > 0$, et on prend pour $\mathcal{A} = Rep_K(GL_p)$ la catégorie des représentations de dimension finie de GL_p. Soit V la représentation standard. On a $\mathcal{A}(V, V) = K$, $\mathcal{R}(V, V) = 0$ et, comme toute homothétie de V est de trace nulle, $\mathcal{N}(V, V) = K$. Ici encore, V est un objet "fantôme", *i.e.* nul modulo $\mathcal{N}$.

10.1.3. **Contre-exemple.** K est maintenant supposé de caractéristique 3, et on prend $\mathcal{A} = Rep_K(SL_2)$. Soit V la représentation standard. On a $V^{\otimes 2} \cong \mathbf{1} \oplus S^2V$, et on vérifie comme ci-dessus que S^2V est un objet “fantôme”. On en déduit que la catégorie monoïdale symétrique rigide $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ est équivalente à celle des K-super-espaces de dimension finie.

10.2. **Complément : l’algèbre commutative $HH_0(\mathcal{A})$.** Soient $\mathcal{A}$ une petite K-catégorie et $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{A}$.

On note $H_0(\mathcal{A},\mathcal{I})$ le K-module[17] engendré par les classes d’isomorphismes de couples (A,h) où A est un objet de $\mathcal{A}$ et $h \in \mathcal{I}(A,A)$, quotienté par les relations suivantes :

– l’application canonique $\mathcal{I}(A,A) \to H_0(\mathcal{A},\mathcal{I})$ est K-linéaire,

– pour tout $f \in \mathcal{I}(A,B)$ et tout $g \in \mathcal{A}(B,A)$, les classes de (A,gf) et (B,fg) coïncident dans $H_0(\mathcal{A},\mathcal{I})$.

Cette construction est fonctorielle en $(\mathcal{A},\mathcal{I})$.

On note $[A,h]$ la classe de (A,h). Notons que si $\mathcal{A}$ est K-linéaire, et si A, A' sont deux objets, on a $[A, 1_A = pi] = [A \oplus A', ip]$ avec les notations i,p de (1.1).

On note encore $H_0(\mathcal{A},\mathcal{A}) = HH_0(\mathcal{A})$. Ce K-module est le réceptacle universel des traces abstraites, *i.e.* des applications $t : A \to M$ vérifiant $t(fg) = t(gf)$ pour tout couple de morphismes allant en directions opposées. Il apparaît en théorie des nœuds, *cf.* [60, 2], dans le cadre monoïdal comme ci-dessous.

Supposons maintenant $\mathcal{A}$ monoïdale. Par fonctorialité, la loi $\bullet$ induit sur $HH_0(\mathcal{A})$ une structure de K-algèbre, commutative si $\mathcal{A}$ est munie d’un tressage symétrique[18]. Si $\mathcal{I}$ est monoïdal, $H_0(\mathcal{A},\mathcal{I})$ est un idéal de $HH_0(\mathcal{A})$, et le quotient $HH_0(\mathcal{A})/H_0(\mathcal{A},\mathcal{I})$ s’identifie à $HH_0(\mathcal{A}/\mathcal{I})$. Par exemple, $H_0(\mathcal{A}, \sqrt[\otimes]{0})$ est un nil-idéal de $HH_0(\mathcal{A})$ (par définition, tout élément de $\sqrt[\otimes]{0}(\mathcal{A},\mathcal{A})$ est $\bullet$-nilpotent).

Les traces abstraites à valeurs dans une K-algèbre commutative R vérifiant de plus $t(f \bullet g) = t(f)t(g)$ pour tout couple d’endomorphismes (f,g) sont en bijection avec les R-points de $\operatorname{Spec} HH_0(\mathcal{A})$. Si $\mathcal{A}$ est rigide, la transposition définit une involution de $HH_0(\mathcal{A})$; la trace monoïdale tr définit un K-*point canonique* de $\operatorname{Spec} HH_0(\mathcal{A})$ ou encore une *augmentation* de la K-algèbre $HH_0(\mathcal{A})$, compatible avec l’involution.

Supposons de plus que $\mathcal{A}$ vérifie les hypothèses du théorème 8.2.2. On a donc $\mathcal{R} = \mathcal{N}$. Posons $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/\mathcal{R} = \mathcal{A}/\mathcal{N}$. Le raisonnement de la démonstration de la proposition 7.3.3 montre que toute trace abstraite s’annule sur tout endomorphisme nilpotent, donc sur les $\mathcal{R}(A,A)$. Donc le K-dual de $HH_0(\mathcal{A})$ coïncide avec le K-dual de $HH_0(\bar{\mathcal{A}})$, et finalement $HH_0(\mathcal{A}) \cong HH_0(\bar{\mathcal{A}})$.

10.2.1. **Exemple.** Supposons $\mathcal{A}$ tannakienne semi-simple neutre sur un corps K algébriquement clos de caractéristique nulle, de sorte que $\mathcal{A}$ est équivalente à la catégorie des K-représentations de dimension finie d’un K-groupe pro-réductif G.

[17] L’explication de cette notation apparaîtra au paragraphe suivant.

[18] Là encore, il suffirait que $\mathcal{A}$ soit munie d’une structure de tortil, la symétrie du tressage n’étant pas vraiment nécessaire.

Par linéarité, les éléments $HH_0(\mathcal{A})$ sont des K-combinaisons d'objets $[A, h]$ avec A simple ; par le lemme de Schur, on peut même supposer $h = 1_A$. On en déduit que

$$HH_0(\mathcal{A}) \cong R_K(G) \otimes_{\mathbf{Z}} K,$$

où $R_K(G)$ désigne l'anneau des représentations de G.

III. Sections

L'objectif de cette partie est d'établir des analogues catégoriques du théorème de Wedderburn, qui affirme l'existence de sections pour la projection d'une algèbre de dimension finie sur un corps parfait vers son quotient par le radical. On établit de tels analogues tant dans le cadre linéaire général que dans le cadre monoïdal ou monoïdal tressé.

11. Cohomologie de Hochschild-Mitchell

11.1. **Produit tensoriel de K-catégories.** Ici, K désigne de nouveau un anneau commutatif unitaire quelconque.

11.1.1**. Définition.** (*cf.* [38, §11]). Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux K-catégories. Le *produit tensoriel* de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{B}$ est la K-catégorie $\mathcal{A} \boxtimes_K \mathcal{B}$ dont les objets sont les couples (A, B) ($A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$), avec

$$(\mathcal{A} \boxtimes_K \mathcal{B})((A,B),(A',B')) = \mathcal{A}(A,A') \otimes_K \mathcal{B}(B,B').$$

On a des isomorphismes canoniques

$$\mathcal{A} \boxtimes_K \mathcal{B} \cong \mathcal{B} \boxtimes_K \mathcal{A}, \quad (\mathcal{A}\text{-}Mod)^{\mathcal{B}} \cong (\mathcal{B}\text{-}Mod)^{\mathcal{A}} \cong (\mathcal{A} \boxtimes_K \mathcal{B})\text{-}Mod.$$

Par ailleurs, on note $\mathcal{A}^o$ la catégorie opposée de $\mathcal{A}$ et on pose $\mathcal{A}^e = \mathcal{A}^o \boxtimes_K \mathcal{A}$. Les $\mathcal{A}^e$-modules (à gauche) sont parfois appelés $\mathcal{A}$-bimodules. Alors $\mathcal{A}$ définit de manière évidente un $\mathcal{A}$-bimodule (par la loi $(X, Y) \mapsto \mathcal{A}(X, Y)$) qu'on identifie à $\mathcal{A}$; un idéal (bilatère) de $\mathcal{A}$ (*cf.* §1) n'est autre qu'un sous-bimodule de $\mathcal{A}$.

11.1.2**. Lemme.** *Supposons que K soit un corps. Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont séparables (cf. définition 2.2.6), alors il en est de même de $\mathcal{A} \boxtimes_K \mathcal{B}$. A fortiori $\mathcal{A} \boxtimes_K \mathcal{B}$ (et en particulier $\mathcal{A}^e$) est semi-simple.*

Cela résulte du lemme 2.2.5. □

11.1.3**. Lemme.** *Supposons seulement que les K-catégories $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ soient de Wedderburn (cf. définition 2.4.1). Alors il en est de même de $\mathcal{A} \boxtimes_K \mathcal{B}$.*

Démonstration. En effet, il découle du lemme précédent que pour tout objet A de $\mathcal{A}$ et tout objet B de $\mathcal{B}$, le quotient de la K-algèbre $(\mathcal{A} \boxtimes_K \mathcal{B})((A,B),(A,B))$ par l'idéal bilatère

$$\operatorname{rad}(\mathcal{A})(A,A) \otimes_K \mathcal{B}(B,B) + \mathcal{A}(A,A) \otimes_K \operatorname{rad}(\mathcal{B})(B,B)$$

est séparable, donc semi-simple. Il en découle que cet idéal contient le radical. Par ailleurs, il est clair que c'est un nil-idéal, donc contenu dans le radical, donc finalement égal à $\operatorname{rad}(\mathcal{A} \boxtimes_K \mathcal{B})$. D'où le résultat. □

La caractérisation suivante des catégories de Wedderburn est celle qui nous servira effectivement dans cette partie.

11.1.4. **Proposition.** *On suppose que K est un corps. Une K-catégorie $\mathcal{A}$ est de Wedderburn si et seulement si $\mathcal{A}^e$ est semi-primaire et $\mathcal{A}^e/\mathrm{rad}(\mathcal{A}^e) = (\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A}))^e$.*

Démonstration. Le lemme précédent montre que $\mathcal{A}^e$ est semi-primaire et vérifie $\mathcal{A}^e/\mathrm{rad}(\mathcal{A}^e) = (\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A}))^e$ dès lors que $\mathcal{A}$ est de Wedderburn. Réciproquement, si $\mathcal{A}^e$ est semi-primaire et $\mathcal{A}^e/\mathrm{rad}(\mathcal{A}^e) = (\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A}))^e$, on a $\mathrm{rad}(\mathcal{A}^e) \supset id \otimes_K \mathrm{rad}(\mathcal{A})$, donc la condition de nilpotence (dans la définition des catégories semi-primaires) passe de $\mathcal{A}^e$ à $\mathcal{A}$; d'autre part, $\mathcal{A}^e/\mathrm{rad}(\mathcal{A}^e)$ est semi-simple par hypothèse, et on conclut que $(\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A}))^e$ est semi-simple, donc $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ est séparable, *cf.* 2.2.6 . □

Le même exemple que dans la remarque 4.1.2 montre que la condition $\mathcal{A}^e/\mathrm{rad}(\mathcal{A}^e) = (\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A}))^e$ est nécessaire.

11.2. **Complexe de Hochschild-Mitchell.** Soit $\mathcal{A}$ une petite K-catégorie, telle que pour tout $(A,B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, $\mathcal{A}(A,B)$ soit un K-module projectif.

Notons $C_*(\mathcal{A})$ le complexe de Hochschild de $\mathcal{A}$ [38, §17] : c'est un complexe de $\mathcal{A}^e$-modules tel que

$$C_m(\mathcal{A})(A,B)=\bigoplus_{A_0,\dots,A_m} A(A,A_0)\otimes_K\mathcal{A}(A_0,A_1)\otimes_K\cdots\otimes_K\mathcal{A}(A_{m-1},A_m)\otimes_K\mathcal{A}(A_m,B),\quad m\geq 0$$

où $(A_0,\dots,A_m)$ décrit les n-uplets d'objets de $\mathcal{A}$. La différentielle est

$$d_m(f_0\otimes f_1\otimes\cdots\otimes f_{m+1}) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i f_0\otimes f_1\otimes\cdots\otimes f_i f_{i+1}\otimes\cdots\otimes f_{m+1}.$$

Il est connu que $C_*(\mathcal{A})$ est une résolution projective du $\mathcal{A}^e$-module $\mathcal{A}$.

Pour tout $\mathcal{A}^e$-module M, on note $C^*(\mathcal{A},M)$ le complexe de K-modules $Hom_{\mathcal{A}^e}(C_*(\mathcal{A}),M)$. Plus concrètement, pour $m > 0$, un élément de $C^m(\mathcal{A},M)(A,B)$ *équivaut* à la donnée d'un élément de $M(A,B)$ pour chaque m-uplet de flèches composables $(f_1,\dots,f_m)$, f_1 étant de source A et f_m de but B, cette donnée étant K-multilinéaire en $(f_1,\dots,f_m)$; pour $m=0$, c'est la donnée d'un élément de $M(A,A)$ pour tout A.

Voici comment : on obtient une telle donnée en considérant, dans $Hom_{\mathcal{A}^e}(C_*(\mathcal{A}),M)(A_0,A_m)$ le facteur correspondant à $A=A_0, f_0=1_{A_0}, B=A_m, f_m=1_{A_m}$. Réciproquement, une telle donnée fournit une cochaîne de Hochschild grâce à la commutativité du carré (bivariance en (A,B)) :

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{A}^e}(C_*(\mathcal{A}),M)(A,B) & \longrightarrow & M(A,B) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (f_0,f_{m+1})} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (f_0,f_{m+1})} \\ Hom_{\mathcal{A}^e}(C_*(\mathcal{A}),M)(A_0,A_m) & \longrightarrow & M(A_0,A_m). \end{array}$$

Avec cette interprétation, la différentielle de Hochschild prend la forme habituelle

$$\begin{aligned}(d^m\varphi)(f_1,\dots,f_{m+1}) = f_1\varphi(f_2,\dots,f_{m+1})\\ +\sum_1^m(-1)^i\varphi(f_1,\dots,f_if_{i+1},\dots,f_{m+1})\\ +(-1)^{m+1}\varphi(f_1,\dots,f_m)f_{m+1}.\end{aligned}$$

Puisque $C_*(\mathcal{A})$ est une résolution projective du $\mathcal{A}^e$-module $\mathcal{A}$, on a

$$H^i(\mathcal{A},M) := H^i(C^*(\mathcal{A},M)) = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{A},M).$$

Si $\mathcal{A}$ est séparable, $\mathcal{A}^e$ est semi-simple, donc ces groupes de cohomologie sont donc

nuls pour tout M et tout $i > 0$ (*cf.* lemme 11.1.2 et proposition 2.1.2).

La formation de $C_*(\mathcal{A})$ est naturelle en $\mathcal{A}$. Plus précisément, tout K-foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ donne lieu à des applications K-linéaires $C_n(\mathcal{A})(A,B) \to C_n(\mathcal{B})(FA,FB)$, et, pour tout $\mathcal{B}^e$-module N, à un homomorphisme de complexes de K-modules dans l'autre sens

$$C^*(\mathcal{B},N) \to C^*(\mathcal{A},F^*N).$$

11.2.1**. Remarque.** (Homologie de Hochschild) Si M et N sont deux $\mathcal{A}$-bimodules, on peut voir M comme $\mathcal{A}^e$-module à droite, et N comme $\mathcal{A}^e$-module à gauche, ce qui permet de former le K-module $M\otimes_{\mathcal{A}^e} N$ (*cf.* [38, pp. 29, 71]). Cette construction étant fonctorielle en N, on peut bâtir un complexe $M\otimes_{\mathcal{A}^e} C_*(\mathcal{A})$, et on a

$$H_i(\mathcal{A},M) := H_i(M\otimes_{\mathcal{A}^e} C^*(\mathcal{A})) = \mathrm{Tor}_i^{\mathcal{A}^e}(M,\mathcal{A}).$$

En particulier, pour $i = 0$, on retrouve la notion du §10.2.

12. UN "THÉORÈME DE WEDDERBURN À PLUSIEURS OBJETS"

Dans ce paragraphe, on se donne un corps K. On renvoie à la définition 2.4.1 pour la notion de K-catégorie de Wedderburn.

12.1. **Existence et "unicité" de sections.** Le théorème de structure fondamental pour les K-algèbres de Wedderburn (théorème de Wedderburn) dit que toute extension d'une K-algèbre séparable de dimension finie par un idéal nilpotent se scinde. En suivant la preuve cohomologique classique de Hochschild et Whitehead, nous généralisons ce résultat aux algèbres "à plusieurs objets".

12.1.1**. Théorème.** *Soit $\mathcal{A}$ une petite K-catégorie de Wedderburn, de radical $\mathcal{R}$. Posons $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/\mathcal{R}$. Alors :*
a) Le K-foncteur de projection $\pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \bar{\mathcal{A}}$ admet une section s.
b) Si s' est une autre section, il existe une famille $(u_A)_{A\in\mathcal{A}}, u_A \in 1_A + \mathcal{R}(A,A)$, telle que pour tous $A,B\in\mathcal{A}$ et tout $f\in\bar{\mathcal{A}}(A,B)$, on ait $s'(f) = u_B s(f)(u_A)^{-1}$.

Démonstration. $1)$ Supposons d'abord $\mathcal{R}^2 = 0$. Alors $\mathcal{R}$ hérite d'une structure de $\bar{\mathcal{A}}^e$-module par passage au quotient de l'action de $\mathcal{A}$.

Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, choisissons une section K-linéaire

$$\sigma_{A,B} : \bar{\mathcal{A}}(A,B) \to \mathcal{A}(A,B)$$

de la projection naturelle. Si C est un troisième objet de $\mathcal{A}$ et si $(f,g) \in \bar{\mathcal{A}}(A,B) \times \bar{\mathcal{A}}(B,C)$, notons

$$\gamma(g,f) = \sigma_{A,C}(gf) - \sigma_{B,C}(g)\sigma_{A,B}(f).$$

C'est un élément de $\mathcal{R}(A,C)$, et, si D est un quatrième objet et $h \in \bar{\mathcal{A}}(C,D)$, on a la relation

$$\gamma(h,gf) + h\gamma(g,f) = \gamma(hg,f) + \gamma(h,g)f.$$

Ain si γ définit un 2-*cocycle de Hochschild* de $\bar{\mathcal{A}}$ à valeurs dans $\mathcal{R}$. D'après le §11, ce 2-cocycle est un 2-cobord ; autrement dit, il existe une fonction ρ telle que, pour tous f, g composables, on ait

$$\gamma(g,f) = \rho(gf) - g\rho(f) - \rho(g)f.$$

La nouvelle section $s(f) = \sigma(f) - \rho(f)$ vérifie alors $s(gf) = s(g)s(f)$ pour tout couple (f,g) composable.

2) Posons $\delta(f) = s'(f) - s(f) \in \mathcal{R}(A,B)$. On a, pour tout couple (f,g) composable,

$$\delta(gf) = \delta(g)f + \delta(f)g$$

donc δ est un 1-cocycle de Hochschild. C'est donc un cobord $f \mapsto n_B f - f n_A$ pour un choix convenable d'éléments $n_A \in \mathcal{R}(A,A)$. En posant $u_A = 1_A + n_A$, on a bien $s'(f) = u_B s(f)(u_A)^{-1}$.

3) Supposons maintenant $\mathcal{R}$ nilpotent d'échelon $r+1$. On raisonne par récurrence sur r, le cas $r = 1$ étant traité ci-dessus. Soit $\mathcal{A}^{(r)} = \mathcal{A}/\mathcal{R}^r$: le radical $\mathcal{R}^{(r)} = \mathcal{R}/\mathcal{R}^r$ de $\mathcal{A}^{(r)}$ est nilpotent d'échelon r, donc il existe une section $\bar{s} : \bar{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}^{(r)}$ comme dans l'énoncé, et toute autre section s'en déduit par "conjugaison" par une famille de $\bar{u}_A \in 1_A + \mathcal{R}^{(r)}(A,A)$.

Soit $\bar{s}(\bar{\mathcal{A}})$ l'image d'une telle section $\bar{s}$ dans $\mathcal{A}^{(r)}$. Pour tout morphisme f dans $\mathcal{A}$, notons $f^{(r)}$ son image dans $\mathcal{A}^{(r)}$. Posons

$$\tilde{\mathcal{A}}(A,B) = \{f \in \mathcal{A}(A,B) \mid f^{(r)} \in \bar{s}(\bar{\mathcal{A}})(A,B)\}$$
$$\tilde{\mathcal{R}}(A,B) = \mathcal{R}(A,B) \cap \tilde{\mathcal{A}}(A,B).$$

Alors $\tilde{\mathcal{A}}$ est une sous-catégorie (non pleine) de $\mathcal{A}$, $\tilde{\mathcal{R}}$ est son radical, $\tilde{\mathcal{R}}^2 = 0$, et $\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{R}} = \bar{\mathcal{A}}$. Il existe donc une section $\tilde{s} : \bar{s}(\bar{\mathcal{A}}) \to \tilde{\mathcal{A}}$; la composée $s = \iota \circ \tilde{s} \circ \bar{s}$: $\bar{\mathcal{A}} \to \bar{s}(\bar{\mathcal{A}}) \to \tilde{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}$, où ι est l'inclusion canonique, est la section cherchée.

Si s' est une autre section, notons $\bar{s}'$ la composition $\bar{\mathcal{A}} \xrightarrow{s'} \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{(r)}$, et soit $(\bar{u}_A)$ une famille d'éléments de $1_A + \mathcal{A}^{(r)}(A,A)$ tels que $\bar{s}'(f) = \bar{u}_B \bar{s}(f)(\bar{u}_A)^{-1}$ pour tout $f \in \mathcal{A}^{(r)}(A,B)$. Choisissons des relevés u_A des $\bar{u}_A$ dans $\mathcal{A}(A,A)$. Quitte à changer s' en la section conjuguée par les $(u_A)^{-1}$, on se ramène au cas où $\bar{s}' = \bar{s}$. On conclut par l'étape 2).

4) Établissons maintenant l'assertion $a)$ du théorème dans le cas général. Si l'on supposait $\mathcal{A}$ strictement de Wedderburn, il suffirait de la voir comme limite projective des $\mathcal{A}^{(r)}$ du numéro précédent, cette limite étant alors localement stationnaire

sur les Homs, et d'appliquer directement ce numéro. Mais nous supposons $\mathcal{A}$ seulement de Wedderburn, ce qui complique la démonstration.

Considérons l'ensemble des couples $(\mathcal{B}, s)$ formés d'une sous-catégorie pleine $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ et d'une section fonctorielle s de la projection $\mathcal{B} \to \bar{\mathcal{B}}$ ($\bar{\mathcal{B}}$ peut être vue comme sous-catégorie pleine de $\bar{\mathcal{A}}$). Cet ensemble est non vide : d'après les pas précédents, il contient par exemple des couples $(\mathcal{B}, s)$ dès que $Ob(\mathcal{B})$ est fini.

On ordonne cet ensemble en décrétant que $(\mathcal{B}', s') \prec (\mathcal{B}, s)$ si $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ et si s' est la restriction de s à $\bar{\mathcal{B}}'$. Il est clair que cet ensemble ordonné est inductif, donc admet un élément maximal $(\mathcal{B}, s)$ d'après Zorn. Démontrons par l'absurde que $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. Sinon, soit X un objet de $\mathcal{A}$ qui n'est pas dans $\mathcal{B}$. On peut remplacer $\mathcal{A}$ par sa sous-catégorie pleine dont les objets sont X et ceux de $\mathcal{B}$, et il s'agit de construire une extension de s à $\bar{\mathcal{A}}$. Pour cela, on peut derechef remplacer $\mathcal{A}$ par toute sous-catégorie non pleine $\mathcal{A}'$ ayant mêmes objets, et telle que $\mathcal{A}'/(\mathcal{A}' \cap \mathcal{R}) = \bar{\mathcal{A}}$.

Il y a un choix minimal d'une telle $\mathcal{A}'$: celle dont les morphismes sont des sommes finies de compositions de flèches de $s(\mathcal{B})$ et de flèches de $\mathcal{A}$ de source ou de but X. Le radical de cette K-catégorie $\mathcal{A}'$ n'est autre que $\mathcal{A}' \cap \mathcal{R}$: en effet, tous les $(\mathcal{A}' \cap \mathcal{R})(A, A)$ sont des nil-idéaux, ce qui entraîne que $(\mathcal{A}' \cap \mathcal{R}) \subset \operatorname{rad}(\mathcal{A}')$; réciproquement, $\mathcal{A}'/(\mathcal{A}' \cap \mathcal{R}) = \bar{\mathcal{A}}$ est semi-simple, donc $\operatorname{rad}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{A}' \cap \mathcal{R}$.

Le point est que $\mathcal{A}' \cap \mathcal{R}$ est (globalement) nilpotent, ce qui permet, par le pas 3), d'étendre s comme souhaité. En fait, nous allons voir que si n est l'échelon de nilpotence de l'idéal $\mathcal{R}(X, X)$ de $\mathcal{A}(X, X)$, alors $\operatorname{rad}(\mathcal{A}')^{(2n+1)} = 0$. En effet, comme le radical de $s(\mathcal{B})$ est nul, on observe que pour tout couple d'objets (A, B) de $\mathcal{A}$, tout élément de $\operatorname{rad}(\mathcal{A}')(A, B)$ s'écrit comme combinaison linéaire finie $\sum f^i_{XB} \circ g^i_{AX}$, avec $f^i_{XB} \in \mathcal{A}(X, B), g^i_{AX} \in \mathcal{A}(A, X)$. Tout élément de $\operatorname{rad}(\mathcal{A}')^{(2n+1)}(A, B)$ s'écrit comme somme finie de termes de la forme

$$\sum_{i_1, i_3, \dots, i_{2n+1}} f^{i_{2n+1}}_{XB} g^{i_{2n+1}}_{A_{2n}X} \left(\sum_{i_{2n}} f^{i_{2n}}_{XA_{2n}} g^{i_{2n}}_{A_{2n-1}X} \right) f^{i_{2n-1}}_{XA_{2n-1}} \dots \\ \left(\sum_{i_2} f^{i_2}_{XA_2} g^{i_2}_{A_1 X} \right) f^{i_1}_{XA_1} g^{i_1}_{AX}.$$

Or chaque fragment $g^{i_{2k+1}}_{A_{2k}X} (\sum_{i_{2k}} f^{i_{2k}}_{XA_{2k}} g^{i_{2k}}_{A_{2k-1}X}) f^{i_{2k-1}}_{XA_{2k-1}}$ est dans

$$\mathcal{A}(A_{2k}, X) \circ \operatorname{rad}(\mathcal{A}')(A_{2k-1}, A_{2k}) \circ \mathcal{A}(X, A_{2k-1}) \subset \mathcal{R}(X, X).$$

Comme ces fragments apparaissent n fois consécutives, on trouve bien que $\operatorname{rad}(\mathcal{A}')^{(2n+1)}(A, B) = 0$. Ceci achève la preuve de l'assertion a).

5) Un argument analogue s'applique pour l'assertion b). Soient s et s' deux sections fixées. Par Zorn, il existe une sous-catégorie pleine maximale $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ telle que les restrictions de s et s' à $\bar{\mathcal{B}}$ soient conjuguées au sens de l'assertion b). Raisonnant par l'absurde comme ci-dessus, on peut encore supposer que $Ob(\mathcal{A}) = Ob(\mathcal{B}) \cup \{X\}$. Quitte à conjuguer s au-dessus de $\bar{\mathcal{B}}$, on peut supposer que les restrictions de s et s' à $\bar{\mathcal{B}}$ coïncident. On observe alors que s et s' prennent alors leurs valeurs dans la sous-catégorie $\mathcal{A}'$ non pleine de $\mathcal{A}$ définie comme ci-dessus.

Comme on l'a vu, son radical est globalement nilpotent, ce qui permet d'appliquer le pas 3) et de conclure que s et s' sont conjuguées via une famille d'éléments $u_A \in 1_A + \mathcal{R}(A, A)$. □

Le lemme suivant, souvent utile, résulte immédiatement de la proposition 2.3.4 b) et du fait que $\bar{\mathcal{A}}$ est semi-simple :

12.1.2. **Lemme.** *Supposons $\mathcal{A}$ pseudo-abélienne. Soit s une section de $\pi_{\mathcal{A}}$. Les foncteurs $\pi_{\mathcal{A}}$ et s induisent des bijections inverses l'une de l'autre entre les objets indécomposables de $\mathcal{A}$ et les objets irréductibles de $\bar{\mathcal{A}}$.* □

12.1.3. **Remarque.** Supposons K algébriquement clos. Soit A un objet indécomposable. Alors par Schur, $\bar{\mathcal{A}}(A, A) = K$, donc il y a un unique relevé dans la K-algèbre locale $\mathcal{A}(A, A)$. Si B est un indécomposable non isomorphe à A, alors $\pi_{\mathcal{A}}(A)$ et $\pi_{\mathcal{A}}(B)$ sont des irréductibles non isomorphes dans $\bar{\mathcal{A}}$, donc $\bar{\mathcal{A}}(A, B) = 0$. Il en découle que s existe et est unique si les objets de $\mathcal{A}$ sont tous indécomposables et deux à deux non isomorphes.

Voici comment tirer de là une preuve élémentaire (non cohomologique) de l'existence d'une section fonctorielle de $\pi_{\mathcal{B}}$ pour une petite catégorie semi-primaire $\mathcal{B}$ sur un corps algébriquement clos K, dont les K-algèbres d'endomorphismes sont de dimension finie. Supposons d'abord $\mathcal{A}$ K-linéaire et pseudo-abélienne. Il suit de cette hypothèse que tout objet de $\mathcal{B}$ est somme directe finie d'indécomposables. Il résulte du §14.1.1 ci-dessous que l'énoncé du théorème 12.1.1 est invariant par équivalence K-linéaire de catégories et par passage aux complétions K-linéaires et pseudo-abéliennes. Il suffit alors d'appliquer le raisonnement précédent à une sous-catégorie pleine $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}$ dont les objets forment un système de représentants des classes d'isomorphie d'objets indécomposables de $\mathcal{A}$.

12.2. **Variantes relatives.**

12.2.1. **Proposition.** *Soit $T : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ un K-foncteur radiciel entre deux petites K-catégories de Wedderburn. Notons $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$, $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B}/\mathrm{rad}(\mathcal{B})$ et $\bar{T} : \bar{\mathcal{B}} \to \bar{\mathcal{A}}$ le foncteur induit. Soit $s_{\mathcal{A}} : \bar{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}$ (resp. $s_{\mathcal{B}} : \bar{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}$) une section de la projection canonique. Alors il existe un système (u_X) d'éléments de $1_{T(X)} + \mathrm{rad}(\mathcal{A})(T(X), T(X))$ tel que $s_{\mathcal{A}}\bar{T}(h) = u_{X'}Ts_{\mathcal{B}}(h)(u_X)^{-1}$ pour tout $h \in \bar{\mathcal{B}}(X, X')$.*

Démonstration. 1) Posons $\mathcal{R} = \mathrm{rad}(\mathcal{A})$. Commençons par le cas où $\mathcal{R}^2 = 0$. On a $Ts_{\mathcal{B}}(h) - s_{\mathcal{A}}\bar{T}(h) \in \mathrm{rad}(\mathcal{A})$ pour tout $h \in \bar{\mathcal{B}}$. Ceci définit une dérivation de $\bar{\mathcal{B}}$ à valeurs dans le $\bar{\mathcal{B}}^e$-module $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ (1-cocycle de Hochschild). Cette dérivation est intérieure (1-cobord de Hochschild) : il existe une famille $n_X = u_X - 1_{T(X)} \in \mathcal{R}(T(X), T(X))$ vérifiant, pour tout $h \in \bar{\mathcal{B}}(X, X')$,

$$Ts_{\mathcal{B}}(h) - s_{\mathcal{A}}\bar{T}(h) = n_{X'}Ts_{\mathcal{B}}(h) - Ts_{\mathcal{B}}(h)n_X,$$

d'où l'assertion.

2) Supposons maintenant seulement que $\mathcal{R} = \mathrm{rad}(\mathcal{A})$ soit nilpotent d'échelon $r + 1$, et raisonnons par récurrence sur r (le cas $r = 1$ étant acquis). Considérons la composition $\mathcal{B} \xrightarrow{T} \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{(r)} = \mathcal{A}/\mathcal{R}$. En appliquant l'hypothèse

de récurrence au foncteur composé, on trouve un système (u_X) d'éléments de $1_{T(X)} + \mathcal{R}(T(X), T(X))$ tel que

$$s_{\mathcal{A}}\bar{T}(h) \equiv u_{X'} T s_{\mathcal{B}}(h)(u_X)^{-1} \pmod{\mathcal{R}^r}.$$

Quitte à remplacer $s_{\mathcal{A}}$ par la section conjuguée par les $(u_A)^{-1}$, on se ramène au cas où $s_{\mathcal{A}}\bar{T}(h) \equiv T s_{\mathcal{B}}(h)$ modulo $\mathcal{R}^r$. On peut alors remplacer $\mathcal{B}$ par $\bar{\mathcal{B}}$ et $\mathcal{A}$ par la catégorie $\tilde{\mathcal{A}}$ introduite au pas 3) de la preuve du théorème 12.1.1. Comme le radical de cette dernière est de carré nul, on conclut par le pas précédent.

3) Dans le cas général, on applique un raisonnement à la Zorn comme au dernier pas de la preuve du théorème 12.1.1 : brièvement, il existe une sous-catégorie pleine maximale $\mathcal{C}$ de $\mathcal{B}$ telle que la proposition vaille pour $\mathcal{C}$. On peut alors supposer que $\mathcal{B}$ contient un seul objet hors de $\mathcal{C}$, et de même que A contient un seul objet hors de $T(Ob(\mathcal{C}))$. On constate comme ci-dessus que le radical de cette nouvelle catégorie $\mathcal{A}$ est alors (globalement) nilpotent. □

Dans le paragraphe suivant, nous appliquerons la proposition 12.2.1 dans le cas où $\mathcal{A}$ est munie d'une structure monoïdale $\bullet$ et où T est le foncteur canonique $\mathcal{A} \boxtimes_K \mathcal{A} \to \mathcal{A} : X = (A, B) \mapsto A \bullet B$, supposé radiciel (ce qui revient à supposer que le radical est un idéal monoïdal). Pour $h = f \otimes g, s = s_{\mathcal{A}}$, on a alors

$$s_{\mathcal{A}}\bar{T}(h) = s(f \bullet g), T s_{\mathcal{B}}(h) = s(f) \bullet s(g).$$

Le complément de Malcev au théorème de Wedderburn dit qu'on peut choisir un scindage de Wedderburn dont l'image contient une sous-algèbre semi-simple donnée d'une K-algèbre de Wedderburn. En voici une variante à plusieurs objets.

12.2.2. **Corollaire.** *Sous les hypothèses du théorème 12.1.1, supposons donnée en outre une sous-catégorie $\mathcal{B}$* séparable *de $\mathcal{A}$ (non nécessairement pleine), avec $Ob(\mathcal{B}) = Ob(\mathcal{A})$. Alors il existe une section s de $\pi_{\mathcal{A}}$ vérifiant $(s \circ \pi_{\mathcal{A}})|\mathcal{B} = id_{\mathcal{B}}$.*

Démonstration. Partant d'une section de $\pi_{\mathcal{A}}$ (dont l'existence est assurée par le théorème 12.1.1), on la modifie en appliquant la proposition précédente pour obtenir une section fixant $\mathcal{B}$. □

13. Sections monoïdales

13.1. **Foncteurs monoïdaux.** Soient $(\mathcal{B}, \top)$ et $(\mathcal{A}, \bullet)$ deux catégories monoïdales. Rappelons qu'un *foncteur monoïdal* est la donnée $(s, (\tilde{s}_{AB}))$ d'un foncteur $s : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ et d'isomorphismes fonctoriels $\tilde{s}_{AB} : s(A) \bullet s(B) \to s(A \top B)$ vérifiant une compatibilité aux contraintes d'associativité et d'unité (on écrit souvent par abus s au lieu de $(s, (\tilde{s}_{AB}))$ pour abréger). Les foncteurs monoïdaux se composent, avec la règle $\widetilde{s's}_{AB} = s'(\tilde{s}_{AB}) \circ \tilde{s}'_{s(A)s(B)}$.

Un *morphisme de foncteurs monoïdaux* est une transformation naturelle des foncteurs sous-jacents, compatible aux données $\tilde{s}_{AB}, \tilde{s}'_{AB}$, et aux unités, *cf.* [53, I.4.1.1].

En d'autres termes, un tel morphisme est la donnée pour tout $A \in \mathcal{B}$ d'un morphisme $u_A : s(A) \to s'(A)$, naturel en A, tel que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} s(A) \bullet s(B) & \xrightarrow{\tilde{s}_{A,B}} & s(A \top B) \\ {\scriptstyle u_A \bullet u_B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u_{A\top B}} \\ s'(A) \bullet s'(B) & \xrightarrow{\tilde{s}'_{A,B}} & s'(A \top B) \end{array} \tag{13.1}$$

soient tous commutatifs, et tel que le morphisme

$$s(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \xrightarrow{u_{\mathbf{1}}} s'(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \tag{13.2}$$

soit l'identité dans l'anneau commutatif $End(\mathbf{1})$.

Un foncteur monoïdal $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ étant donné, une *section* de π est un foncteur monoïdal $s : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tel que $\pi \circ s = id_{\mathcal{B}}$ (égalité de foncteurs monoïdaux). Deux sections s, s' sont dites *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de foncteurs monoïdaux $s \Rightarrow s'$ tel que $\pi \circ s \Rightarrow \pi \circ s'$ soit le foncteur identique.

Dans une K-catégorie monoïdale, le bifoncteur $\bullet$ est K-bilinéaire. Nous supposerons toujours nos catégories monoïdales non nulles (*i.e.* $End(\mathbf{1}) \neq 0$).

13.2. **Existence et "unicité" de sections monoïdales.** Après ces préliminaires, nous pouvons énoncer la version monoïdale du théorème de Wedderburn à plusieurs objets. On suppose de nouveau que K est un corps.

13.2.1**. Théorème.** *Soit* $(\mathcal{A}, \bullet)$ *une petite* K*-catégorie de Wedderburn monoïdale. Supposons que les* $End(\mathbf{1})$*-bimodules* $\mathcal{A}(A, B)$ *soient commutatifs, i.e. l'action à gauche coïncide avec l'action à droite*[19].
Supposons que $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ *soit monoïdal, d'où une structure monoïdale sur* $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$. *Notons* $\pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \bar{\mathcal{A}}$ *la projection canonique, vue comme foncteur monoïdal. Alors :*
a) Il existe une section monoïdale s *de* π_A*.*
b) Toute autre section monoïdale de $\pi_{\mathcal{A}}$ *est isomorphe à* s*.*

13.3. **Sorites.** Nous allons démontrer le théorème 13.2.1 par réduction au cas strict. Pour cela, quelques sorites sont nécessaires.

13.3.1**. Sorite.** *Soit* $(s, \tilde{s}) : (\mathcal{B}, \top) \to (\mathcal{A}, \bullet)$ *un foncteur monoïdal, et soit* $u : s \Rightarrow t$ *un isomorphisme naturel de* s *sur un autre foncteur* t*. Alors il existe une unique structure monoïdale* $\tilde{t}$ *sur* t *faisant de* u *un morphisme de foncteurs monoïdaux.*

Démonstration. Définissons

$$\tilde{t}_{A,B} = u_{A\top B} \tilde{s}_{A,B} (u_A \bullet u_B)^{-1}$$

(*cf.* (13.1)). Il faut voir que $\tilde{t}$ est compatible avec les contraintes d'associativité et d'unité. Cela résulte de calculs triviaux (d'où le terme "sorite"), ce que nous laissons au lecteur sceptique le soin de vérifier. □

[19]Une catégorie monoïdale vérifiant cette hypothèse est appelée *catégorie de Penrose* dans [9]. C'est par exemple le cas si $End(\mathbf{1}) = K$, ou en présence d'un tressage.

13.3.2**. Sorite.** *Soient* $(\mathcal{A}, \bullet), \bar{\mathcal{A}}, \pi_{\mathcal{A}}$ *comme dans le théorème 13.2.1. Alors le théorème 13.2.1 résulte de l'énoncé plus faible obtenu en remplaçant dans a) et b) le mot "section" par "quasi-section", où une quasi-section monoïdale de* $\pi_{\mathcal{A}}$ *est par définition un foncteur monoïdal* $s_0 : \bar{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}$ *tel que* $\pi_{\mathcal{A}} \circ s_0$ *soit* naturellement isomorphe *à* $Id_{\bar{\mathcal{A}}}$.

Démonstration. Supposons donnée une telle quasi-section monoïdale $(s_0, \tilde{s}_0)$. Soit $\bar{u} : Id_{\bar{\mathcal{A}}} \xrightarrow{\sim} \pi_{\mathcal{A}} s_0$ un isomorphisme naturel. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, choisissons un élément $u_A \in \mathcal{A}(A, s_0(A))$ se projetant sur $\bar{u}_A$, avec $u_{\mathbf{1}} = 1_{\mathbf{1}}$. Définissons un foncteur $s : \bar{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}$ par les formules :

$$s(A) = A$$
$$s(f) = u_B^{-1} s_0(f) u_A$$

pour $f \in \bar{\mathcal{A}}(A, B)$. Alors s est une section de $\pi_{\mathcal{A}}$ naturellement isomorphe à s_0 via $u = (u_A)$, et le sorite 13.3.1 montre qu'il lui est associé une unique structure monoïdale faisant de u un morphisme de foncteurs monoïdaux. Ceci fournit la partie a) du théorème 13.2.1, et le point concernant la partie b) est trivial. □

13.3.3**. Sorite.** *Soient* $(\mathcal{A}, \bullet), \bar{\mathcal{A}}, \pi_{\mathcal{A}}$ *et* $(\mathcal{B}, \top), \bar{\mathcal{B}}, \pi_{\mathcal{B}}$ *comme dans le théorème 13.2.1. Soit* $(f, \tilde{f}) : (\mathcal{B}, \top) \to (\mathcal{A}, \bullet)$ *un* K*-foncteur monoïdal tel que* f *soit une équivalence de catégories. Alors* f *est radiciel, et les parties a) et b) du théorème 13.2.1 sont vraies pour* $\mathcal{A}$ *si et seulement si elles sont vraies pour* $\mathcal{B}$.

Démonstration. Le fait que f est radiciel est clair (et ne dépend pas des structures monoïdales). Le reste de l'énoncé résulte du sorite 13.3.2, en remarquant que les conditions dudit sorite sont manifestement invariantes par équivalence monoïdale de catégories monoïdales. □

13.4. **Catégories monoïdales strictes.** Une petite catégorie monoïdale $(\mathcal{B}, \top)$ est dite *stricte* si l'ensemble des objets muni de la loi $\top$ est un monoïde (*i.e.* si $\top$ est strictement associative).

Un foncteur monoïdal $(s, (\tilde{s}_{AB})) : (\mathcal{A}, \bullet) \to (\mathcal{B}, \top)$ est dit *strict* si $s(A) \bullet s(B) = s(A \top B)$ et si $\tilde{s}_{AB}$ est l'identité pour tout couple (A, B). C'est par exemple le cas du foncteur identique.

Dans le cas strict, la situation se simplifie pour les morphismes de foncteurs monoïdaux : si $u : s \Rightarrow s'$ est un tel morphisme, alors il vérifie l'identité

$$u_{A \bullet B} = u_A \top u_B$$

pour tout couple d'objets (A, B).

13.4.1**. Remarque.** Soit $\mathcal{A}^{\mathcal{A}}$ la catégorie des endofoncteurs additifs de $\mathcal{A}$. Munie de la composition, c'est une catégorie monoïdale stricte. Pour toute catégorie monoïdale, le foncteur $A \mapsto A \bullet ?$ de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}^{\mathcal{A}}$ admet une structure monoïdale définie par les contraintes d'associativité et d'unité. *Ce foncteur est strict si et seulement si* $(\mathcal{A}, \bullet)$ *est monoïdale stricte*.

Si $\mathcal{B}$ est monoïdale stricte, il en est alors de même de $\mathcal{B}^{\oplus}$: en effet, rappelons que les objets de $\mathcal{B}^{\oplus}$ sont des suites finies $\underline{A} = (A_1, A_2, \dots, A_r)$ d'objets de $\mathcal{B}$, notées $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_r$ (*cf.* §1.2) ; les composantes de $\underline{A} \top \underline{A}'$ sont par définition les $A_i \top A'_j$, numérotées selon l'ordre lexicographique. Il est clair qu'on obtient ainsi une catégorie monoïdale stricte. Si $\mathcal{B}$ est K-linéaire, les foncteurs évidents $\mathcal{B}^{\oplus} \underset{v^{\oplus}}{\overset{u^{\oplus}}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$ (formation du mot à une lettre, *resp.* parenthésage canonique) sont sous-jacents à des foncteurs monoïdaux stricts (vis-à-vis de $\bullet$).

Tout foncteur monoïdal $s : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, il induit, composante par composante, un foncteur monoïdal $s^{\oplus} : \mathcal{B}^{\oplus} \to \mathcal{A}^{\oplus}$, strict si s l'est.

Une petite catégorie K-linéaire $\mathcal{C}$ sera dite *strictement K-linéaire* si son biproduit $\oplus$ (et l'objet nul) fait de $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale stricte. C'est le cas de $\mathcal{B}^{\oplus}$, pour toute petite K-catégorie $\mathcal{B}$. Dans une catégorie strictement K-linéaire, les sommes directes finies $A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ sont définies sans ambigüité.

13.4.1. *La construction de Mac Lane* [36, XI 3]. À toute petite catégorie monoïdale $(\mathcal{A}, \bullet)$, on associe une petite catégorie monoïdale stricte $(\mathcal{A}^{str}, \top)$, et deux foncteurs monoïdaux $\mathcal{B} \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} \mathcal{A}$, avec u strict, tels que le composé uv soit le foncteur monoïdal identique de $\mathcal{A}$ (les foncteurs sous-jacents à u et v sont donc quasi-inverses).

Rappelons cette construction : on prend pour objets de $\mathcal{A}^{str}$ les mots (finis) dont les lettres sont les objets de $\mathcal{A}$. Les morphismes entre mots sont les morphismes entre les objets de $\mathcal{A}$ correspondants obtenus par parenthésage canonique (toutes les parenthèses commencent au début du mot). Le produit $\top$, souvent omis de la notation, est donné au niveau des objets par la concaténation des mots ; v est donné par la "formation de mots d'une lettre", tandis que u est donné par le "parenthésage canonique" (*e.g.* $u(ABC) = (A \bullet B) \bullet C)$). L'unité est le mot vide : $u(\emptyset) = \mathbf{1}$.

C'est une K-catégorie si $\mathcal{A}$ l'était, et u, v sont alors des K-foncteurs.

Noter que lorsque A est K-linéaire, la construction $\mathcal{A}^{\oplus}$ est un cas particulier de cette construction, en prenant $\bullet = \oplus$.

Si $s : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ est un foncteur, on lui associe canoniquement comme suit un foncteur monoïdal strict $s^{str} : \mathcal{B}^{str} \to \mathcal{A}^{str}$: on associe au mot $w = B_1 \dots B_n$ de $\mathcal{B}^{str}$ le mot $s^{str}(w) = s(B_1) \dots s(B_n)$ de $\mathcal{A}^{str}$ ($s^{str}(\emptyset) = \emptyset$).

On associe à $f \in \mathcal{B}^{str}(w, w') = \mathcal{B}(u(w), u(w'))$ le morphisme $s^{str}(f) = s(f) \in \mathcal{A}(u(s^{str}(w)), u(s^{str}(w'))) = \mathcal{A}^{str}(s^{str}(w), s^{str}(w'))$.

Si s est sous-jacent à un foncteur monoïdal strict, on a $us^{str} = su$ (donc $s = u_{\mathcal{A}} \circ s^{str} \circ v_{\mathcal{B}}$).

Vu la construction de Mac Lane et le sorite 13.3.3, pour démontrer le théorème 13.2.1, on peut supposer $\mathcal{A}$ stricte. Le théorème 13.2.1 résulte alors de la proposition plus précise suivante :

13.4.2. **Proposition.** *Soient $(\mathcal{A}, \bullet), \bar{\mathcal{A}}, \pi_{\mathcal{A}}$ comme dans le théorème 13.2.1. Si en outre $\mathcal{A}$ est monoïdale stricte,*
a) Il existe une section monoïdale stricte s de $\pi_{\mathcal{A}}$.
b) Toute autre section monoïdale stricte de $\pi_{\mathcal{A}}$ est isomorphe à s.

c) Toute section monoïdale de $\pi_{\mathcal{A}}$ est naturellement isomorphe à une section monoïdale stricte de $\pi_{\mathcal{A}}$.

13.5. **Réductions.** Commençons par une réduction du problème en deux lemmes.

13.5.1**. Lemme.** *La proposition 13.4.2 découle de l'énoncé correspondant pour la catégorie monoïdale stricte K-linéaire $\mathcal{A}^{\oplus}$.*

Démonstration. Soit S une section monoïdale stricte de $\pi_{\mathcal{A}^{\oplus}}$. Le foncteur monoïdal strict (pleinement) fidèle $\mathcal{A} \overset{v^{\oplus}}{\to} \mathcal{A}^{\oplus}$ induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{A}} & \xrightarrow{\bar{v}} & \bar{\mathcal{A}}^{\oplus} \\ {\scriptstyle s}\downarrow & & {\scriptstyle S}\downarrow \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{v} & \mathcal{A}^{\oplus}. \end{array}$$

Réciproquement, si s est donnée, on peut prendre $S = s^{\oplus}$. $\square$

En identifiant $(\bar{\mathcal{A}}^{str})^{\oplus}$ et $\overline{(\mathcal{A}^{str})^{\oplus}}$, ce lemme nous ramène à prouver la proposition 13.4.2 dans le cas strictement K-linéaire, strictement monoïdal.

13.5.2**. Lemme.** *Supposons que $\mathcal{A}$ soit strictement K-linéaire, et monoïdale stricte. Soit s une section fonctorielle K-linéaire de $\pi_{\mathcal{A}}$ (vue comme simple K-foncteur).*

Supposons que $s(f \bullet g) = s(f) \bullet s(g)$ pour tout couple d'endomorphismes $(f \in \bar{\mathcal{A}}^{\oplus}(A, A), g \in \bar{\mathcal{A}}^{\oplus}(B, B))$, et que $s(1_{\mathbf{1}}) = 1_{\mathbf{1}}$. Alors $s^{\oplus}$ définit une unique section monoïdale stricte de $\pi_{\mathcal{A}^{\oplus}}$.

Démonstration. Il s'agit de vérifier l'identité $s^{\oplus}(f \bullet g) = s^{\oplus}(f) \bullet s^{\oplus}(g)$ pour tout couple $(f \in \bar{\mathcal{A}}^{\oplus}(w_1, w_1'), g \in \bar{\mathcal{A}}^{\oplus}(w_2, w_2'))$, et
$s^{\oplus}(\emptyset) = 1_{\emptyset}$ (ce second point est immédiat).

Nous utilisons transitoirement la notation w des mots de 13.4, dans le cas où la structure monoïdale est donnée par $\oplus$; au lieu de $u(w)$, la somme directe (dans la catégorie strictement K-linéaire $\mathcal{A}$) des lettres de w sera notée $\overset{\oplus}{w}$ ($\overset{\oplus}{\emptyset} = \mathbf{1}$). Via les identifications canoniques

$$\mathcal{A}^{\oplus}(w, w') = \mathcal{A}(\overset{\oplus}{w}, \overset{\oplus}{w}{}'),$$

on peut écrire $s^{\oplus}(f) = s(f), s^{\oplus}(g) = s(g), s^{\oplus}(f \bullet g) = s(f \bullet g)$.

Les identifications ci-dessus sont compatibles à $\bullet$ ($\overset{\oplus}{\widehat{w_1 \bullet w_2}} = \overset{\oplus}{w} \bullet \overset{\bullet}{p}lusw'$).

On peut donc écrire $s^{\oplus}(f) \bullet s^{\oplus}(g) = s(f) \bullet s(g)$ (en revanche, on prendra garde que s n'est pas supposée stricte vis-à-vis de $\oplus$, *i.e.* on ne suppose pas que le morphisme canonique $\overset{\oplus}{\widehat{s^{\oplus}(w)}} \to s(\overset{\oplus}{w})$ soit l'égalité).

L'hypothèse du lemme se traduit donc par l'identité $s^{\oplus}(f \bullet g) = s^{\oplus}(f) \bullet s^{\oplus}(g)$ dans

$$\mathcal{A}^{\oplus}(w_1 \bullet w_2, w_1 \bullet w_2) = \mathcal{A}(\overset{\oplus}{w_1} \bullet \overset{\oplus}{w_2}, \overset{\oplus}{w_1} \bullet \overset{\oplus}{w_2})$$

pour tout couple d'endomorphismes $(f \in \bar{\mathcal{A}}^{\oplus}(w_1, w_1), g \in \bar{\mathcal{A}}^{\oplus}(w_2, w_2))$.

Or $s^{\oplus}$ est strict vis-à-vis de $\oplus$ par construction (par contraste avec s). Cela permet de ramener l'identité ci-dessus pour tout couple de morphismes

$(f \in \bar{\mathcal{A}}^{\oplus}(w_1, w_1'), g \in \bar{\mathcal{A}}^{\oplus}(w_2, w_2'))$ au cas d'un couple d'endomorphismes en remplaçant w_1 et w_1' par $w_1 \oplus w_1'$, et w_2 et w_2' par $w_2 \oplus w_2'$. □

Ce lemme nous ramène à traiter d'endomorphismes, plutôt que d'homomorphismes.

Notation abrégée. Nous écrirons $\mathcal{A}(A)$ (*resp.* $\mathcal{R}(A)$) au lieu de $\mathcal{A}(A, A)$ (*resp.* $\mathcal{R}(A, A)$) dans ce paragraphe. Pour un objet $A \in \mathcal{A}$ et $a, b \in \mathcal{A}(A)$, nous noterons comme d'habitude $[a, b] = ab - ba$ le commutateur de a et b, et $ad(a)$ l'application $b \mapsto [a, b]$.

13.6. **Au cœur du problème : démonstration de la proposition 13.4.2.** Compte tenu des lemmes précédents, on suppose désormais que $\mathcal{A}$ est une petite catégorie, strictement K-linéaire, monoïdale stricte (notons que $\bar{\mathcal{A}}$ a la même propriété). On procède par étapes. Nous commencerons par démontrer c), cette démonstration étant la plus simple des trois et servant de prototype à celles de a) et b).

13.6.1. *Début de la preuve de c).* Soit s une section K-fonctorielle monoïdale de π_A. On a donc des isomorphismes

$$A \bullet B = s(A) \bullet s(B) \xrightarrow{\tilde{s}_{A,B}} s(A \bullet B) = A \bullet B.$$

Les $\tilde{s}_{A,B}$ appartiennent à $1 + \mathcal{R}(A \bullet B)$ et vérifient la relation de cohérence (dans $1 + \mathcal{R}(A \bullet B \bullet C)$)

$$\tilde{s}_{A \bullet B, C} \circ (\tilde{s}_{A,B} \bullet 1_C) = \tilde{s}_{A, B \bullet C} \circ (1_A \bullet \tilde{s}_{B,C}). \tag{13.3}$$

Nous allons montrer :

13.6.1**. Lemme.** *Il existe une famille double* $(u_A^{(r)})_{A \in \mathcal{A}, r \geq 1}$, *avec* $u_A^{(r)} \in 1 + \mathcal{R}(A)$, *ayant les propriétés suivantes :*

(i) *On a* $u_A^{(r+1)} \equiv u_A^{(r)} \pmod{\mathcal{R}(A)^r}$ *pour tout* $A \in \mathcal{A}$ *et tout* $r \geq 1$.

(ii) *En posant*

$$s_r(f) = u_B^{(r)} \circ s(f) \circ (u_A^{(r)})^{-1}$$

pour $A, B \in \mathcal{A}$ *et* $f \in \bar{\mathcal{A}}(A, B)$, *on a*

$$(\tilde{s}_r)_{A,B} = u_{A \bullet B}^{(r)} \circ \tilde{s}_{A,B} \circ (u_A^{(r)} \bullet u_B^{(r)})^{-1} \in 1 + \mathcal{R}(A \bullet B)^r$$

pour tout couple d'objets (A, B).

Supposons le lemme 13.6.1 démontré. Pour tout A, choisissons un entier $r(A)$ tel que $\mathcal{R}(A)^{r(A)} = 0$. Posons

$$u_A = u_A^{(r(A))} = u_A^{(r(A)+1)} = \cdots \in 1 + \mathcal{R}(A)$$

et

$$s'(f) = u_B \circ s(f) \circ (u_A)^{-1}$$

pour $A \in \mathcal{A}$ et $f \in \bar{\mathcal{A}}(A)$. Pour $A, B \in \mathcal{A}$, on a donc

$$\tilde{s}'_{A,B} = (\tilde{s}_r)_{A,B}$$

dès que $r \geq \sup(r(A), r(B), r(A \bullet B))$. De plus, le membre de droite de cette égalité est égal à $1_{A \bullet B}$. Ainsi, la section s' vérifie les conclusions de c).

Nous allons démontrer le lemme 13.6.1 par récurrence sur r, partant du cas trivial $r=1$ où l'on prend $u_A^{(1)}=1_A$ pour tout A.

13.6.2. *Une relation de cocycle, I.* Supposons $r\geq 1$ et trouvée une famille $u_A^{(r)}$ vérifiant la condition (ii) du lemme 13.6.1. Quitte à remplacer s par s_r, on peut supposer $s_r=s$, $u^{(r)}=1$. On a donc $\tilde{s}_{A,B}\in 1+\mathcal{R}(A\bullet B)^r$ pour tout couple d'objets (A,B). Posons $n_{A,B}=1_{A\bullet B}-\tilde{s}_{A,B}\in\mathcal{R}(A\bullet B)^r$. La relation (13.3) se réécrit alors

$$\begin{aligned}(1_{A\bullet B\bullet C}-n_{A\bullet B,C})\circ((1_{A\bullet B}-n_{A,B})\bullet 1_C)\\ =(1_{A\bullet B\bullet C}-n_{A,B\bullet C})\circ((1_A\bullet(1_{B\bullet C}-n_{B,C}))\end{aligned}$$

d'où

$$n_{A\bullet B,C}+n_{A,B}\bullet 1_C\equiv n_{A,B\bullet C}+1_A\bullet n_{B,C}\pmod{\mathcal{R}(A\bullet B\bullet C)^{r+1}}. \tag{13.4}$$

Nous cherchons une famille $(u_A^{(r+1)})_{A\in\mathcal{A}}$ vérifiant :

(i) $u_A^{(r+1)}\equiv 1 \pmod{\mathcal{R}(A)^r}$ pour tout $A\in\mathcal{A}$.

(ii) $u_{A\bullet B}^{(r+1)}\circ\tilde{s}_{A,B}\circ(u_A^{(r+1)}\bullet u_B^{(r+1)})^{-1}\in 1+\mathcal{R}(A\bullet B)^{r+1}$ pour tout couple d'objets (A,B).

Supposons le problème résolu et posons $m_A=1_A-u_A^{(r+1)}\in\mathcal{R}(A)^r$. On a alors l'identité

$$\begin{aligned}(1_{A\bullet B}-m_{A\bullet B})\circ(1_{A\bullet B}-n_{A,B})\circ((1_A-m_A)\bullet(1_B-m_B))^{-1}\\ \equiv 1\pmod{\mathcal{R}(A\bullet B)^{r+1}}\end{aligned}$$

soit encore

$$n_{A,B}\equiv m_A\bullet 1_B+1_A\bullet m_B-m_{A\bullet B}\pmod{\mathcal{R}(A\bullet B)^{r+1}}. \tag{13.5}$$

Réciproquement, l'existence d'une famille (m_A) vérifiant la congruence (13.5) est clairement équivalenteà l'existence d'une famille $(u_A^{(r+1)})$ comme ci-dessus.

13.6.3. *Une relation de cocycle, II.* La congruence (13.4) fait penser à une relation de 2-cocycle, et la congruence (13.5) à une relation de 2-cobord. Pour donner corps à ces impressions, introduisons encore quelques notations.

Si $w=A_1A_2\dots A_m$ est un mot formé d'objets de $\mathcal{A}$, notons $\overset{\bullet}{w}$ l'objet $A_1\bullet A_2\bullet\dots\bullet A_m$ de $\mathcal{A}$ ou $\bar{\mathcal{A}}$ (notation plus commode que celle $u(w)$ utilisée plus haut) ; notons les formules

$$\overset{\bullet}{\widehat{(\overset{\bullet}{w_1}\overset{\bullet}{w_2})}}=\overset{\bullet}{\widehat{w_1w_2}}$$

$$\overset{\bullet}{\emptyset}=\mathbf{1}.$$

Pour tout $A\in\mathcal{A}$, posons $\mathcal{R}(A)^{[r]}=\mathcal{R}(A)^r/\mathcal{R}(A)^{r+1}$. On peut faire opérer les mots à gauche et à droite sur le K-espace vectoriel

$$\mathcal{R}^{[r]}=\prod_w\mathcal{R}(\overset{\bullet}{w})^{[r]}$$

de la manière suivante :

$$(w_0 \cdot m)(w) = \begin{cases} 1_{\overset{\bullet}{w_0}} \bullet m(w') & \text{si } w \text{ est de la forme } w_0w' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(m \cdot w_1)(w) = \begin{cases} m(w') \bullet 1_{\overset{\bullet}{w_1}} & \text{si } w \text{ est de la forme } w'w_1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(L'expression $m(w)$ désigne la w-composante de m).

Il n'est pas difficile de voir que cette opération est bien définie, et qu'étendue par K-linéarité, elle munit $\mathcal{R}^{[r]}$ d'une structure de $K\langle Ob(\mathcal{A})\rangle$-bimodule (où $K\langle Ob(\mathcal{A})\rangle$ désigne la K-algèbre libre de base les objets de $\mathcal{A}$).

13.6.4. *Une relation de cocycle, III – fin de la preuve de c).* Nous sommes maintenant en mesure d'interpréter (13.4) comme relation de 2-cocycle de Hochschild pour l'algèbre $K\langle Ob(\mathcal{A})\rangle$.

En effet, reprenons la famille $(n_{A,B})$ ci-dessus. Avec les notations précédentes, on a une famille induite

$$\bar{n}_{AB} \in \mathcal{R}(AB)^{[r]}.$$

On définit alors une 2-cochaîne de Hochschild $\bar{n}$ pour $K\langle Ob(\mathcal{A})\rangle$ à valeurs dans le $K\langle Ob(\mathcal{A})\rangle$-bimodule $\mathcal{R}^{[r]}$, en associant à tout couple de mots non vides (w_0, w_1) l'élément $\bar{n}_{w_0,w_1} \in \mathcal{R}^{[r]}$ défini par

$$\bar{n}_{w_0,w_1}(w) = \begin{cases} \bar{n}_{\overset{\bullet}{w_0},\overset{\bullet}{w_1}} & \text{si } w_0w_1 = w, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculons le bord de Hochschild de $\bar{n}$:

$$(d^2(\bar{n}))_{w_0,w_1,w_2} = w_0 \cdot \bar{n}_{w_1,w_2} - \bar{n}_{w_0w_1,w_2} + \bar{n}_{w_0,w_1w_2} - \bar{n}_{w_0,w_1} \cdot w_2.$$

Sa w-composante est nulle, par définition, si $w_0w_1w_2 \neq w$. Si $w_0w_1w_2 = w$, elle est égale à

$$1_{\overset{\bullet}{w_0}} \bullet \bar{n}_{\overset{\bullet}{w_1},\overset{\bullet}{w_2}} - \bar{n}_{\overset{\bullet}{w_0}\bullet\overset{\bullet}{w_1},\overset{\bullet}{w_2}} + \bar{n}_{\overset{\bullet}{w_0},\overset{\bullet}{w_1}\bullet\overset{\bullet}{w_2}} - \bar{n}_{\overset{\bullet}{w_0},\overset{\bullet}{w_1}} \bullet 1_{\overset{\bullet}{w_2}} = 0 \text{ d'après (13.4).}$$

Donc $\bar{n}$ est un 2-cocycle. Comme $K\langle Ob(\mathcal{A})\rangle$ est une K-algèbre *libre*, c'est un 2-*cobord*, *cf.* [11, ch. IX, ex. 2 ou ch. X.5]. En d'autres termes, il existe une famille d'éléments $\bar{m}_w \in \mathcal{R}^{[r]}$ telle que l'on ait l'identité

$$\bar{n}_{w_0,w_1} = w_0 \cdot \bar{m}_{w_1} + \bar{m}_{w_0} \cdot w_1 - \bar{m}_{w_0w_1}.$$

Soient $A, B \in \mathcal{A}$. Pour $w_0 = A$, $w_1 = B$, la composante de cette identité dans $\mathcal{R}(w_0w_1)^{[r]}$ n'est autre que

$$\bar{n}_{AB} = 1_A \bullet \bar{m}_B - \bar{m}_{A\bullet B} + \bar{m}_A \bullet 1_B.$$

En relevant les $\bar{m}_A$ en des $m_A \in \mathcal{R}(A)^r$, on obtient la famille $(u_A^{(r+1)} = 1_A - m_A)$ cherchée.

13.6.5. *Début de la preuve de a).* Soit s une section K-fonctorielle de π_A. L'existence en est garantie par le théorème 12.1.1.

Comme les $End(\mathbf{1})$-bimodules $\mathcal{A}(A,B)$ sont commutatifs par hypothèse, il est loisible de remplacer chaque $s(f)$ par $s(1_{\mathbf{1}})^{-1}\circ s(f)$, et donc de supposer $s(1_{\mathbf{1}}) = 1_{\mathbf{1}}$.

En outre, d'après la proposition 12.2.1 appliquée à $\mathcal{B} = \mathcal{A}\boxtimes_K \mathcal{A}$, il existe une famille $(u_{A,B}\in 1_{A\bullet B}+\mathcal{R}(A\bullet B))$ vérifiant , pour tout $(f,g)\in \bar{\mathcal{A}}(A)\times\bar{\mathcal{A}}(B)$:

$$s(f\bullet g) = u_{A,B}(s(f)\bullet s(g))u_{A,B}^{-1}.$$

Nous allons montrer :

13.6.2**. Lemme.** *Il existe une famille double $(u_A^{(r)})_{A\in\mathcal{A},r\geq 1}$, avec $u_A^{(r)}\in 1+\mathcal{R}(A)$, ayant les propriétés suivantes :*

(i) *On a $u_A^{(r+1)}\equiv u_A^{(r)} \pmod{\mathcal{R}(A)^r}$ pour tout $A\in\mathcal{A}$ et tout $r\geq 1$.*

(ii) *En posant*

$$s_r(f) = u_B^{(r)}\circ s(f)\circ (u_A^{(r)})^{-1}$$

pour $A,B\in\mathcal{A}$ et $f\in\bar{\mathcal{A}}(A,B)$, on a

$$s_r(f\bullet g)\equiv s_r(f)\bullet s_r(g) \pmod{\mathcal{R}(A\bullet B)^r}$$

pour tout couple d'objets (A,B) et tout $(f,g)\in\bar{\mathcal{A}}(A)\times\bar{\mathcal{A}}(B)$.

L e lemme 13.6.2 implique a) de la même manière que le lemme 13.6.1 impliquait c). On procède de nouveau par récurrence sur r.

13.6.6. *Une relation de cocycle, I.* Supposons $r\geq 1$ et trouvée une famille $u_A^{(r)}$ vérifiant la condition (ii) du lemme 13.6.2. Quitte à remplacer s par s_r, on peut supposer $s_r = s$, $u^{(r)} = 1$. Posons

$$n_{A,B} = u_{A,B} - 1_{A\bullet B}.$$

On a alors

$$ad(n_{A,B})(s(f)\bullet s(g))\in\mathcal{R}(A\bullet B)^r$$

pour tout $(f,g)\in\bar{\mathcal{A}}(A)\times\bar{\mathcal{A}}(B)$.

Soit $h\in\bar{\mathcal{A}}(C)$. Nous allons calculer de deux façons $s(f\bullet g\bullet h)$ modulo $\mathcal{R}(A\bullet B\bullet C)^{r+1}$, compte-tenu de l'associativité stricte de $\bullet$.

On a, modulo $\mathcal{R}(A\bullet B\bullet C)^{r+1}$,

$$\begin{aligned}
s((f\bullet g)\bullet h) &= s(f\bullet g)\bullet s(h) + [n_{A\bullet B,C},(s(f)\bullet s(g))\bullet s(h)]\\
&= (s(f)\bullet s(g))\bullet s(h) + [n_{A,B}, s(f)\bullet s(g))]\bullet s(h)\\
&\quad + [n_{A\bullet B,C},(s(f)\bullet s(g))\bullet s(h)]\\
&= (s(f)\bullet s(g))\bullet s(h) + [n_{A,B}\bullet 1_C + n_{A\bullet B,C},(s(f)\bullet s(g))\bullet s(h)]
\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
&s_r(f\bullet(g\bullet h)) =\\
&\qquad s(f)\bullet(s(g)\bullet s(h)) + [1_A\bullet n_{B,C} + n_{A,B\bullet C}, s(f)\bullet(s(g)\bullet s(h))].
\end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{A}$ est monoïdale stricte, on en déduit que

$$(13.6)\quad ad(1_A \bullet n_{B,C} - n_{A\bullet B,C} + n_{A,B\bullet C} - n_{A,B} \bullet 1_C)(s(f \bullet g \bullet h)) \in \mathcal{R}(A \bullet B \bullet C)^{r+1}$$

pour tous endomorphismes f, g, h comme ci-dessus.

D'autre part, si $(u_A^{(r+1)} = 1 + m_A)_{A\in\mathcal{A}}$ est une famille d'éléments comme dans la conclusion du lemme 13.6.2 (donc $m_A \in \mathcal{R}(A)^r$ pour tout A), un calcul analogue donne l'identité

$$(13.7)\quad ad(n_{A,B} - m_A \bullet 1_B - 1_A \bullet m_B + m_{A\bullet B})(s(f) \bullet s(g)) \in \mathcal{R}(A \bullet B)^{r+1}$$

pour $(f, g) \in \bar{\mathcal{A}}(A) \times \bar{\mathcal{A}}(B)$; réciproquement, la donnée d'éléments m_A vérifiant (13.7) implique l'existence d'une famille $u^{(r+1)}$ comme dans l'énoncé du lemme 13.6.2.

13.6.7. *Une relation de cocycle, II.* Pour interpréter (13.6) comme une relation de 2-cocycle et (13.7) comme une relation de cobord, on procède comme ci-dessus en introduisant un $K\langle Ob(\mathcal{A})\rangle$-bimodule approprié.

Notons que l'action de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{R}^{[r]} = \mathcal{R}^r/\mathcal{R}^{r+1}$ se factorise en une action de $\bar{\mathcal{A}}$. En particulier, on peut se dispenser d'écrire la section s dans (13.6) et (13.7).

Pour tout mot $w = A_1 \dots A_m$ en les objets de $\mathcal{A}$, notons

$$\bar{\mathcal{A}}(w) = \bar{\mathcal{A}}(A_1) \bullet \cdots \bullet \bar{\mathcal{A}}(A_m) \subset \bar{\mathcal{A}}(\overset{\bullet}{w}).$$

On a $\bar{\mathcal{A}}(ww') = \bar{\mathcal{A}}(w)\bar{\mathcal{A}}(w')$.

Notons ensuite $C(w)^{[r]}$ le *centralisateur de* $\bar{\mathcal{A}}(w)$ *dans* $\mathcal{R}(\overset{\bullet}{w})^{[r]}$:

$$C(w)^{[r]} = \{x \in \mathcal{R}(\overset{\bullet}{w})^{[r]} \mid ad(a)(x) = 0\, \forall a \in \bar{\mathcal{A}}(w)\}.$$

On note encore

$$M(w)^{[r]} = \mathcal{R}(\overset{\bullet}{w})^{[r]}/C(w)^{[r]}$$

et

$$ad^w : \mathcal{R}(\overset{\bullet}{w})^{[r]} \to M(w)^{[r]}$$

la projection canonique.

Remarquons que $C(w)^{[r]}$ et $M(w)^{[r]}$ dépendent effectivement de w, et pas seulement de $\overset{\bullet}{w}$. Les inclusions du type $\bar{\mathcal{A}}(w_1 \dots w_n) \subset \bar{\mathcal{A}}(\overset{\bullet}{w}_1 \dots \overset{\bullet}{w}_n)$ entraîne des inclusions du type

$$C(\overset{\bullet}{w}_1 \dots \overset{\bullet}{w}_n)^{[r]} \subset C(w_1 \dots w_n)^{[r]}$$

et des projections correspondantes

$$(13.8)\qquad M(\overset{\bullet}{w}_1 \dots \overset{\bullet}{w}_n)^{[r]} \twoheadrightarrow M(w_1 \dots w_n)^{[r]}$$

factorisant les ad^w.

Les relations (13.6) et (13.7) se réécrivent maintenant

$$(13.9)\qquad ad^{ABC}(r_{A,B,C}) = 0$$

avec

$$r_{A,B,C} = 1_A \bullet n_{B,C} - n_{A\bullet B,C} + n_{A,B\bullet C} - n_{A,B} \bullet 1_C \tag{13.10}$$

ainsi que

$$ad^{AB}(n_{A,B} - m_A \bullet 1_B - 1_A \bullet m_B + m_{A\bullet B}) = 0. \tag{13.11}$$

L'action à gauche et à droite de $K\langle Ob(\mathcal{A})\rangle$ sur $\mathcal{R}^{[r]}$ en induit une sur son quotient

$$M^{[r]} = \prod_w M(w)^{[r]}.$$

13.6.8. *Une relation de cocycle, III - fin de la preuve de a).* De même que pour le lemme 13.6.1, (13.6) et (13.7) s'interprètent maintenant comme relations de 2-cocycle et de 2-cobord de Hochschild à valeurs dans le $K\langle Ob(\mathcal{A})\rangle$-bimodule $C^{[r]}$. La seule remarque à faire est qu'étant donné trois mots w_0, w_1, w_2, et $w = w_0w_1w_2$, la nullité de $ad^{\overset{\bullet}{w}_0\overset{\bullet}{w}_1\overset{\bullet}{w}_2}(r_{\overset{\bullet}{w}_0,\overset{\bullet}{w}_1,\overset{\bullet}{w}_2})$, donnée par (13.9), entraîne celle de $ad^w(r_{\overset{\bullet}{w}_0,\overset{\bullet}{w}_1,\overset{\bullet}{w}_2})$ via la projection (13.8). On conclut comme auparavant.

13.6.9. *Preuve de b).* Soient s, s' deux sections monoïdales strictes de $\pi_{\mathcal{A}}$. Il s'agit de montrer qu'il existe une famille $(u_A)_{A\in\mathcal{A}}, u_A \in 1_A + \mathcal{R}(A,A)$, telle que pour tous $A, B \in \mathcal{A}$ on ait $s'(f) = u_A s(f)(u_A)^{-1}$ pour tout $f \in \bar{\mathcal{A}}(A)$ et

$$u_{A\bullet B} = u_A \bullet u_B.$$

Nous allons montrer :

13.6.3. **Lemme.** *Il existe une famille double* $(u_A^{(r)})_{A\in\mathcal{A},r\geq 1}$*, avec* $u_A^{(r)} \in 1 + \mathcal{R}(A)$*, ayant les propriétés suivantes :*

(i) $u_A^{(r+1)} \equiv u_A^{(r)} \pmod{\mathcal{R}(A)^r}$ *pour tout* $A \in \mathcal{A}$ *et tout* $r \geq 1$.

(ii) $s'(f) = u_A^{(r)} s(f)(u_A^{(r)})^{-1}$ *pour tout* $A \in \mathcal{A}$*, tout* $f \in \bar{\mathcal{A}}(A)$ *et tout* $r \geq 1$.

(iii) $u_{A\bullet B}^{(r)} \equiv u_A^{(r)} \bullet u_B^{(r)} \pmod{\mathcal{R}(A\bullet B)^r}$ *pour tous objets* A, B *et tout* $r \geq 1$.

Le lemme 13.6.3 implique b) de la même manière que les lemmes 13.6.1 et 13.6.2 impliquaient c) et a). On procède toujours par récurrence sur r. Nous aurons besoin des nouvelles notations suivantes, pour un mot w en les objets de $\mathcal{A}$ (voir aussi §13.6.7) :

$$C_s(w) = \{x \in \mathcal{A}(\overset{\bullet}{w}) \mid xs(f) = s(f)x \text{ pour tout } f \in \bar{\mathcal{A}}(w)\}$$

$$C_s^r(w) = \mathcal{R}(\overset{\bullet}{w})^r \cap C_s(w)$$

$$C^{[r]}(w) = \frac{C_s^r(w) + \mathcal{R}(\overset{\bullet}{w})^{r+1}}{\mathcal{R}(\overset{\bullet}{w})^{r+1}} \simeq C_s^r(w)/C_s^{r+1}(w).$$

Le groupe $C^{[r]}(w)$ ne dépend pas du choix de s, puisque deux sections sont conjuguées par des éléments de $1 + \mathcal{R}$ (théorème 12.1.1 b)) et que $1 + \mathcal{R}$ opère trivalement sur $\mathcal{R}^{[n]}$ par conjugaison. On prendra garde de ne pas le confondre avec le groupe $C(w)^{[r]}$ du §13.6.7 : l'inclusion

$$C^{[r]}(w) \subset C(w)^{[r]}$$

est en général stricte.

En utilisant le théorème 12.1.1 b), choisissons une famille $(u_A^{(1)})_{A\in\mathcal{A}}$, avec $u_A^{(1)} \in 1_A+\mathcal{R}(A)$, vérifient la propriété (ii) du lemme 13.6.3. La condition (iii) est automatique ; le lemme est donc vrai pour $r=1$.

Supposons maintenant $r\geq 1$ et le lemme connu pour r. Posons

$$n_{A,B} := 1_{A\bullet B} - (u_A^{(r)}\bullet u_B^{(r)})^{-1}u_{A\bullet B}^{(r)} \in \mathcal{R}(A\bullet B)^r.$$

Comme s et s' sont monoïdales strictes, on a l'identité

$$(u_A^{(r)}\bullet u_B^{(r)})^{-1}u_{A\bullet B}^{(r)}(s(f)\bullet s(g))(u_{A\bullet B}^{(r)})^{-1}u_A^{(r)}\bullet u_B^{(r)} = s(f)\bullet s(g)$$

pour $(f,g)\in\bar{\mathcal{A}}(A)\times\bar{\mathcal{A}}(B)$, ce qui équivaut à

$$n_{A,B}\in C^r(AB).$$

Par ailleurs, la définition de $n_{A,B}$ donne immédiatement la relation

$$1_A\bullet\bar{n}_{B,C} - \bar{n}_{A\bullet B,C} + \bar{n}_{A,B\bullet C} - \bar{n}_{A,B}\bullet 1_C = 0$$

où $\bar{n}_{A,B}$ désigne l'image de $n_{A,B}$ dans $C^{[r]}(AB)$.

Soit maintenant $(u_A^{(r+1)})$ une famille vérifiant les conclusions du lemme 13.6.3. Posons

$$u_A^{(r+1)} = u_A^{(r)}(1+m_A).$$

On a donc $m_A\in\mathcal{R}(A)^r$. La condition (ii) du lemme se traduit en

$$(1+m_A)s(f)(1+m_A)^{-1} = s(f)$$

pour tout $f\in\bar{\mathcal{A}}(A)$, c'est-à-dire

$$m_A\in C^r(A).$$

La condition (iii), d'autre part, se traduit en

$$\bar{n}_{A,B} = \bar{m}_{A\bullet B} - 1_A\bullet\bar{m}_B - \bar{m}_A\bullet 1_B$$

où $\bar{m}_A$ est la projection de m_A dans $C^{[r]}(A)$ (calcul immédiat). Inversement, la donnée de $m_A\in\mathcal{R}(A)^r$ vérifiant ces deux conditions fournit une famille $(u_A^{(r+1)})$ vérifiant les conclusions du lemme 13.6.3.

On termine comme précédemment, en utilisant le $K\langle Ob(\mathcal{A})\rangle$-bimodule

$$C^{[r]} = \prod_w C^{[r]}(w),$$

et en posant

$$\bar{n}_{w_0,w_1}(w) = \begin{cases}\bar{n}_{\overset{\bullet}{w}_0,\overset{\bullet}{w}_1} & \text{si } w_0w_1 = w,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Ceci conclut la preuve de b), donc celle de la proposition 13.4.2, et finalement celle du théorème 13.2.1. □

13.6.4**. Remarques.**

$a)$ Supposons $\mathcal{A}$ abélienne et engendrée par un nombre fini d'objets A_i, au sens où tout objet est sous-quotient d'une somme finie de copies de $\bullet$-monômes en ces objets. On prendra garde que $\bar{\mathcal{A}}$ n'est pas nécessairement engendrée par les $\pi(A_i) = A_i$. Le point est que l'image dans $\bar{\mathcal{A}}$ d'un monomorphisme de $\mathcal{A}$ n'est pas nécessairement un monomorphisme. En fait, on verra plus loin des exemples où $\bar{\mathcal{A}}$ n'est engendrée par aucun ensemble fini d'objets.

$b)$ Dans [1], nous appliquons le théorème de scindage monoïdal ci-dessus pour construire, inconditionnellement, des réalisations de motifs numériques, et les groupes de Galois motiviques associés.

$c)$ Dans la quatrième partie de ce travail, nous appliquons le même théorème pour définir des "enveloppes" pro-semi-simples ou pro-réductives.

13.7. **Variantes.** Voici un avatar monoïdal de la proposition 12.2.1.

13.7.1**. Proposition.** *Soit $(\mathcal{B}, \bullet)$ une autre catégorie monoïdale vérifiant les hypothèses du théorème 13.2.1. Soit $T : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ un K-foncteur monoïdal radiciel. Notons $\bar{T} : \bar{\mathcal{B}} \to \bar{\mathcal{A}}$ le foncteur induit.*
Soit $s_{\mathcal{A}} : \bar{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}$ (resp. $s_{\mathcal{B}} : \bar{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}$) une section monoïdale de la projection canonique.
Alors $s_{\mathcal{A}} \circ \bar{T}$ et $T \circ s_{\mathcal{B}}$ sont isomorphes (via un isomorphisme monoïdal qui couvre l'isomorphisme monoïdal identique modulo les radicaux).
En particulier, si T et les sections s_A et s_B sont strictes, il existe un système (u_X) d'éléments de $1_{T(X)} + \mathrm{rad}(\mathcal{A})(T(X), T(X))$ tel que $s_{\mathcal{A}}\bar{T}(h) = u_{X'} T s_{\mathcal{B}}(h)(u_X)^{-1}$ pour tout $h \in \bar{\mathcal{B}}(X, X')$, et $u_{X \bullet Y} = u_X \bullet u_Y$.

Démonstration. On prouve d'abord la seconde assertion, sous l'hypothèse que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont monoïdales strictes. La preuve est entièrement parallèle à celle du point $b)$ de la proposition 13.4.2. La proposition 12.2.1 montre l'existence d'un système (u_X) d'éléments de $1_{T(X)} + \mathrm{rad}(\mathcal{A})(T(X), T(X))$ tel que $s_{\mathcal{A}}\bar{T}(h) = u_{X'} T s_{\mathcal{B}}(h)(u_X)^{-1}$ pour tout $h \in \bar{\mathcal{B}}(X, X')$. Pour le modifier en un système vérifiant de plus $u_{X \bullet Y} = u_X \bullet u_Y$, on construit une suite d'approximations u_X^r. Le point est de remplacer le $K\langle Ob(\mathcal{A})\rangle$-bimodule $C^{[r]}$ par le $K\langle Ob(\mathcal{B})\rangle$-bimodule $C'^{[r]} = \prod_w C'(w)^{[r]}$, où $C'(w)^{[r]}$ est défini de la manière suivante :

$$C_{Ts}(w) = \{x \in \mathcal{A}(T(\overset{\bullet}{w})) \mid x(Ts_{\mathcal{B}}(h)) = (Ts_{\mathcal{B}}(h))x \text{ pour tout } h \in \bar{\mathcal{B}}(w)\}$$

$$C_{Ts}^r(w) = \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(T(\overset{\bullet}{w}))^r \cap C_{Ts}(w)$$

$$C'^{[r]}(w) = \frac{C_{Ts}^r(w) + \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(T(\overset{\bullet}{w}))^{r+1}}{\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(T(\overset{\bullet}{w}))^{r+1}} \simeq C_{Ts}^r(w)/C_{Ts}^{r+1}(w).$$

Passons maintenant au cas général. D'après le théorème de conjugaison des sections monoïdales, il est loisible de changer de sections $s_{\mathcal{A}}, s_{\mathcal{B}}$. Plutôt que $s_{\mathcal{A}}, s_{\mathcal{B}}$, c'est de $s'_{\mathcal{A}} = u_{\mathcal{A}} \circ (s_{\mathcal{A}})^{str} \circ \bar{v}_{\mathcal{A}},\ s'_{\mathcal{B}} = u_{\mathcal{B}} \circ (s_{\mathcal{B}})^{str} \circ \bar{v}_{\mathcal{B}}$ dont nous nous servirons (avec les notations de la construction de MacLane 13.4.1). On est alors ramené à voir que $(s_{\mathcal{A}})^{str} \circ \bar{T}^{str}$ et $T^{str} \circ (s_{\mathcal{B}})^{str}$ sont isomorphes (via un isomorphisme monoïdal qui couvre l'isomorphisme monoïdal identique modulo les radicaux) ; mais on est alors dans le cas strict déjà traité. $\square$

13.7.2**. Corollaire.** *Dans la situation de la proposition 12.2.1, supposons $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ strictement K-linéaires, i.e. telles que $\oplus$ soit strictement associative (cf. 13.4). Supposons aussi que T soit strict vis-à-vis de $\oplus$. Alors on peut choisir les (u_X) (conjuguant $s_{\mathcal{A}}\bar{T}$ et $Ts_{\mathcal{B}}$) de telle sorte que $u_{X\oplus Y} = u_X \oplus u_Y$.* $\square$

Voici une variante monoïdale du complément de Malcev au théorème de Wedderburn.

13.7.3**. Proposition.** *Sous les hypothèses du théorème 13.2.1, supposons donnée en outre une sous-catégorie monoïdale $\mathcal{B}$* séparable *de $\mathcal{A}$ (non nécessairement pleine), telle que tout objet de $\mathcal{A}$ soit facteur direct d'un objet de $\mathcal{B}$. Alors il existe une section monoïdale s de $\pi_{\mathcal{A}}$ qui vérifie $(s \circ \pi_{\mathcal{A}})|\mathcal{B} = id_{\mathcal{B}}$.*

Démonstration. Quitte à remplacer $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ par $\mathcal{A}^\natural$ et $\mathcal{B}^\natural$ respectivement, on peut supposer que $Ob(\mathcal{B}) = Ob(\mathcal{A})$. Dans ce cas, le corollaire 12.2.2 montre l'existence d'une section fonctorielle de $\pi_{\mathcal{A}}$ telle que $(s \circ \pi_{\mathcal{A}})_{|\mathcal{B}} = id_{\mathcal{B}}$. Pour la modifier en une section monoïdale vérifiant la même condition, on reprend la méthode de preuve du théorème 13.2.1 a), en construisant une suite d'approximations s_r (*cf.* le lemme 13.6.2 et sa preuve). Le point est de remplacer le $K\langle Ob(\mathcal{A})\rangle$-bimodule $M^{[r]}$ par le sous-bimodule ${M'}^{[r]} = \prod_w M'(w)^{[r]}$, où $M'(w)^{[r]}$ est le sous-K-espace de $M(w)^{[r]}$ des éléments dont un relevé dans $\mathcal{R}(\overset{\bullet}{w})^{[r]}$ commute à $\bar{\mathcal{B}}(w)$. On observe qu'on a bien $ad^{AB}n_{AB} \in M'(AB)^{[r]}$ puisque la restriction de s_r à $\mathcal{B} = \bar{\mathcal{B}}$ est monoïdale (c'est l'identité) ; on obtient ainsi des ν_A commutant à $\bar{\mathcal{B}}(A)$, de sorte que s_{r+1} est encore l'identité sur $\mathcal{B} = \bar{\mathcal{B}}$. $\square$

13.8. **Complément.** Ce complément servira au §15.

13.8.1**. Proposition.** *Sous les hypothèses du théorème 13.2.1, soit v une structure monoïdale sur le foncteur identique de $\mathcal{A}$ telle que $\pi_{\mathcal{A}}(v) = 1$. Alors $(Id_{\mathcal{A}}, v)$ est monoïdalement isomorphe à $(Id_{\mathcal{A}}, 1)$ via un isomorphisme de foncteurs monoïdaux se projetant sur 1 dans $\bar{\mathcal{A}}$.*

Démonstration. On peut supposer $\mathcal{A}$ strictement monoïdale. Il s'agit de résoudre l'équation

$$v_{A,B} = (u_A^{-1} \bullet u_B^{-1})u_{A\bullet B}$$

pour $A, B \in \mathcal{A}$, où $u = (u_A)$ est un automorphisme (non monoïdal) de $Id_{\mathcal{A}}$ se projetant sur 1. On procède comme d'habitude, en supposant de plus $\mathcal{A}$ strictement K-linéaire et en ne traitant que d'endomorphismes. Il suffit de montrer :

13.8.2**. Lemme.** *Il existe une famille double $(u^{(r)})_{r\geq 1}$ d'automorphismes de $Id_{\mathcal{A}}$, avec $u_A^{(r)} \in 1 + \mathcal{R}(A)$, ayant les propriétés suivantes :*

(i) $u_A^{(r+1)} \equiv u_A^{(r)} \pmod{\mathcal{R}(A)^r}$ *pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $r \geq 1$.*

(ii) $v_{A,B} \equiv (u_A^{(r)^{-1}} \bullet u_B^{(r)^{-1}}) u^{(r)}_{A\bullet B} \pmod{\mathcal{R}(A \bullet B)^r}$ *pour tous objets* A, B *et tout* $r \geq 1$.

Démonstration. Récurrence sur r, en partant de $r = 1$ avec $u^{(1)} = 1$. Supposons $r \geq 1$ et trouvée un automorphisme $u^{(r)}$. Quitte à remplacer $v_{A,B}$ par $(u_A^{(r)} \bullet u_B^{(r)}) {u^{(r)}_{A\bullet B}}^{-1} v_{A,B}$, on peut supposer que $u^{(r)} = 1$ et que $v \in \mathcal{R}^r$.

Pour tout mot w en les objets de $\mathcal{A}$, posons

$$\begin{aligned} C(w) &= \{x \in \mathcal{A}(\overset{\bullet}{w}) \mid x \text{ centralise } \mathcal{A}(w)\} \\ C^{<r>}(w) &= C(w) \cap \mathcal{R}(\overset{\bullet}{w})^r \quad (r \geq 0) \\ \Gamma^{[r]}(w) &= C^{<r>}(w)/C^{<r+1>}(w) \\ \Gamma^{[r]} &= \prod_w \Gamma^{[r]}(w). \end{aligned}$$

L'algèbre $K\langle Ob(\mathcal{A})\rangle$ opère à gauche et à droite sur $\Gamma^{[r]}$ de la manière habituelle.

Posons $v_{A,B} = 1 - \nu_{A,B}$: alors $\nu_{A,B} \in C^{<r>}(AB)$ et on a la congruence identique

$$\nu_{A\bullet B,C} + \nu_{A,B} \bullet 1_C \equiv \nu_{A,B\bullet C} + 1_A \bullet \nu_{B,C} \pmod{\mathcal{R}(A \bullet B \bullet C)^{r+1}}.$$

Soit $u^{(r+1)}$ un automorphisme de $Id_{\mathcal{A}}$ solution de (i) et (ii). Posons $u_A^{(r+1)} = 1 - \mu_A$: on a donc $\mu_A \in C^{<r>}(A)$. Soit $\bar{\mu}_A$ l'image de μ_A dans $\Gamma^{[r]}(A)$. On a la congruence identique

$$\nu_{A,B} \equiv \mu_{A\bullet B} - 1_A \bullet \mu_B - \mu_A \bullet 1_B \pmod{\mathcal{R}(A \bullet B)^{r+1}}.$$

Réciproquement, si (μ_A) est une famille d'éléments de $C^{<r>}(A)$ vérifiant ces congruences, alors la famille $(u_A^{(r+1)} = 1 - \mu_A)$ définit un automorphisme de $Id_{\mathcal{A}}$ solution de (i) et (ii). Il reste à appliquer comme précédemment la nullité de $H^2(K\langle Ob(\mathcal{A})\rangle, \Gamma^{<r>})$. □

13.8.3**. Remarque.** Si A, B admettent des duaux à droite (*cf.* 6), les isomorphismes canoniques

$$\mathcal{A}(\mathbf{1}, A^\vee \bullet B) \cong \mathcal{A}(A, B)$$

de (6.2) passent à $\bar{\mathcal{A}}$ et sont compatibles à toute section monoïdale s comme dans le théorème. Si tous les objets de $\mathcal{A}$ admettent des duaux à droite (par exemple si $\mathcal{A}$ est symétrique et rigide), on en déduit que s est déterminée par ses valeurs sur les $\bar{\mathcal{A}}(\mathbf{1}, A)$.

14. Représentabilité

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'interpréter les résultats des paragraphes 12 et 13 en termes plus catégoriques. Brièvement, on peut associer à une petite K-catégorie de Wedderburn (monoïdale) le groupoïde des sections (monoïdales) de $\pi_{\mathcal{A}}$. Cette construction est 2-fonctorielle en $\mathcal{A}$ pour les foncteurs pleinement fidèles et les isomorphismes naturels. Sous une hypothèse de finitude supplémentaire, elle peut même s'enrichir en un 2-foncteur à valeurs dans les K-*groupoïdes affines scindés unipotents* (théorèmes 14.3.1 et 14.3.3).

Ces constructions ne dépendent pas des théorèmes 12.1.1 et 13.2.1. Dans le cas représentable, elles permettent de les réinterpréter en des résultats très forts de *rationalité* pour les K-groupoïdes en jeu.

Nous nous plaçons d'abord le cadre discret, puis dans le cadre algébrique.

14.1. **Le paysage discret.**

14.1.1. *Le cas non monoïdal.* Soit $\mathcal{A}$ une petite K-catégorie de Wedderburn. Considérons la catégorie $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ dont les objets sont les sections de $\pi_{\mathcal{A}}$, un morphisme de s vers s' étant une famille $(u_A)_{A\in\mathcal{A}}$ comme dans le théorème 12.1.1 b) et le composé de deux morphismes $(u_A),(v_A)$ étant (v_Au_A). (Comme nous l'a fait remarquer A. Bruguières, les morphismes de $\mathcal{G}(A)$ s'interprètent aussi comme les transformations naturelles entre sections de $\pi_{\mathcal{A}}$ se projetant sur l'identité dans $\bar{\mathcal{A}}$.) Alors $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ est un petit groupoïde : le *groupoïde des sections de* $\pi_{\mathcal{A}}$. Le contenu du théorème 12.1.1 a) (*resp.* b)) est que ce groupoïde est *non vide* (*resp. connexe*).

L'interprétation de la proposition 12.2.1 dans ce langage est le peu satisfaisant principe de fonctorialité suivant : si $s_{\mathcal{A}}\in\mathcal{G}(\mathcal{A})$ et $s_{\mathcal{B}}\in\mathcal{G}(\mathcal{B})$, définissons le *transporteur de* $s_{\mathcal{A}}$ *vers* $s_{\mathcal{B}}$ comme l'ensemble $T(s_{\mathcal{A}},s_{\mathcal{B}})$ des (u_X) vérifiant les conditions de ladite proposition : ce sont aussi les transformations naturelles de $s_{\mathcal{A}}\bar{T}$ vers $Ts_{\mathcal{B}}$ se projetant sur l'identité. Alors, pour tout couple $(s_{\mathcal{A}},s_{\mathcal{B}})$, l'ensemble $T(s_{\mathcal{A}},s_{\mathcal{B}})$ est *non vide*.

Toutefois, si $\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ est *pleinement fidèle*, alors on a un foncteur canonique $\mathcal{G}(\mathcal{B})\to\mathcal{G}(\mathcal{A})$ dans l'autre sens. Cette correspondance s'étend en un 2-foncteur : notons

$$Wed\{K\}$$

la sous-2-catégorie non pleine de $\{K\}$ (voir §1.2) dont

– les objets sont les petites K-catégories de Wedderburn

– les 1-morphismes sont les K-foncteurs pleinement fidèles

– les 2-morphismes sont les isomorphismes naturels.

D'autre part, notons **Gr** la 2-catégorie des petits groupoïdes (tous les foncteurs et toutes les transformations naturelles sont autorisés). Alors on vérifie au prix d'un petit calcul :

14.1.1**. Sorite.** *La construction* $\mathcal{A}\mapsto\mathcal{G}(\mathcal{A})$ *définit un* 2*-foncteur* 1*-contravariant et* 2*-covariant*

$$\mathcal{G}: Wed\{K\}\to\mathbf{Gr}\,.$$

Le théorème 12.1.1 énonce que son image est contenue dans la 2*-sous-catégorie pleine des groupoïdes non vides connexes.* □

En particulier, toute K-équivalence de catégories $\mathcal{A}\xrightarrow{\sim}\mathcal{B}$ définit une équivalence de catégories $\mathcal{G}(\mathcal{B})\xrightarrow{\sim}\mathcal{G}(\mathcal{A})$, qui n'est pas en général un isomorphisme de catégories. Toutefois :

14.1.2**. Sorite.** *Pour toute K-catégorie de Wedderburn $\mathcal{A}$, les foncteurs*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{G}(\mathcal{A}^{\oplus}) \arrow[dr] & \\
\mathcal{G}(\mathcal{A}^{\oplus\natural}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathcal{G}(\mathcal{A}) \\
 & \mathcal{G}(\mathcal{A}^{\natural}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

sont des isomorphismes de groupoïdes. □

(On peut s'en convaincre en remarquant que ces foncteurs définissent des inverses partiels des foncteurs du sorite 1.2.1.)

14.1.2. *Le cas monoïdal.* Supposons maintenant que $\mathcal{A}$ soit monoïdale, et que son radical soit un idéal monoïdal. De même que dans 14.1.1, on peut introduire le groupoïde $\mathcal{G}^{\otimes}(\mathcal{A})$ des *sections monoïdales de* π_A (les morphismes étant les morphismes de foncteurs monoïdaux se projetant sur l'identité dans $\bar{\mathcal{A}}$). C'est un sous-groupoïde de $\mathcal{G}(\mathcal{A})$, lui aussi connexe non vide[20]. La proposition 13.7.1 admet la même interprétation que la proposition 12.2.1 du paragraphe 12. Si $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est pleinement fidèle, on a un foncteur canonique $\mathcal{G}^{\otimes}(\mathcal{B}) \to \mathcal{G}^{\otimes}(\mathcal{A})$ dans l'autre sens.

Notons

$$Wed^{\otimes}\{K\}$$

la 2-catégorie dont

- les objets sont les petites K-catégories de Wedderburn monoïdales, à radical monoïdal
- les 1-morphismes sont les K-foncteurs monoïdaux pleinement fidèles
- les 2-morphismes sont les isomorphismes naturels monoïdaux.

On a un 2-foncteur évident

$$\Omega : Wed^{\otimes}\{K\} \to Wed\{K\} \tag{14.1}$$

(oubli des structures monoïdales). Comme au §14.1.1, on obtient en fait :

14.1.3**. Sorite.** *La construction $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{G}^{\otimes}(\mathcal{A})$ définit un 2-foncteur 1-contravariant et 2-covariant*

$$\mathcal{G}^{\otimes} : Wed^{\otimes}\{K\} \to \mathbf{Gr}\,.$$

Le théorème 13.2.1 énonce que son image est contenue dans la 2-sous-catégorie pleine des groupoïdes non vides connexes.
Il existe une 2-transformation naturelle canonique

$$\mathcal{G}^{\otimes} \Rightarrow \mathcal{G} \circ \Omega$$

où $\mathcal{G}$ est comme dans le sorite 14.1.1 et Ω est comme en (14.1). □

[20]Tout foncteur d'un groupoïde connexe non vide vers un autre est essentiellement surjectif…

14.1.4**. Sorite.** *Pour toute K-catégorie de Wedderburn $\mathcal{A}$, les foncteurs*

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{G}^{\otimes}(\mathcal{A}^{\oplus}) \arrow[dr] & \\ \mathcal{G}^{\otimes}(\mathcal{A}^{\oplus\natural}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathcal{G}^{\otimes}(\mathcal{A}) \\ & \mathcal{G}^{\otimes}(\mathcal{A}^{\natural}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

sont des isomorphismes de groupoïdes. □

14.1.3. *Objets compacts, duaux et limites inductives.* Supposons $\mathcal{A}$ stable par limites inductives quelconques, et soit $\mathcal{A}^{\mathrm{comp}}$ sa sous-catégorie pleine formée des objets compacts. Alors on a un foncteur de restriction $\mathcal{G}(\mathcal{A}) \to \mathcal{G}(\mathcal{A}^{\mathrm{comp}})$. Si tout objet de $\mathcal{A}$ est isomorphe à une limite inductive d'objets compacts, on a un foncteur en sens inverse : ces deux foncteurs sont des équivalences de catégories, quasi-inverses l'une de l'autre.

Même sorite dans le cas monoïdal symétrique, en supposant **1** compact et en remplaçant "compact" par "ayant un dual".

14.1.4. *Extension des scalaires.* Si L/K est une extension, on a des foncteurs "extension des scalaires" (naïve et à la Saavedra) $\mathcal{G}(\mathcal{A}) \to \mathcal{G}(\mathcal{A}_L)$ et $\mathcal{G}(\mathcal{A}) \to \mathcal{G}(\mathcal{A}_{(L)})$, et de même dans le cas monoïdal. Si L/K est (finie) séparable, ces foncteurs sont isomorphes en vertu du théorème 5.3.2. Dans le cas général et en supposant $\mathcal{A}$ stable par limites inductives quelconques, on a un foncteur de restriction $\mathcal{G}(\mathcal{A}_{(L)}) \to \mathcal{G}(\mathcal{A}_L)$ commutant naturellement aux deux foncteurs ci-dessus. Même sorite dans le cas monoïdal.

14.2. **Objets en catégories, en groupoïdes et en actions de groupe.**

14.2.1. *Objets en catégories et en groupoïdes.* Soit $\mathcal{X}$ une catégorie avec limites projectives finies. Rappelons qu'un *objet en catégories* dans $\mathcal{X}$ est la donnée Γ de deux objets $E, S \in \mathcal{X}$, d'un morphisme

$$(\beta, \sigma) : E \to S \times S$$

"but" et "source" et d'un morphisme "loi de composition"

$$\circ : E \times_{\beta S \sigma} E \to E$$

telles que, pour tout objet $X \in \mathcal{X}$, le couple $(\mathcal{X}(X,E), \mathcal{X}(X,S))$ et les morphismes correspondants définissent une petite catégorie $\Gamma(X)$ (objets : $S(X)$; morphismes : $E(X)$). Par le lemme de Yoneda, cela revient à exiger que $\beta, \sigma, \circ$ vérifient les identités habituelles. Un objet en catégories Γ est un *objet en groupoïdes* si, pour tout $X \in \mathcal{X}$, $\Gamma(X)$ est un groupoïde (même remarque).

Si $\Gamma = (E, S, \beta, \sigma, \circ)$ et $\Gamma' = (E', S', \beta', \sigma', \circ')$ sont deux objets en catégories de $\mathcal{X}$, un *morphisme* de Γ vers Γ' est un couple $T = (f, g)$, avec $f \in \mathcal{X}(E, E')$,

$g \in \mathcal{X}(S, S')$, tels que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{(\beta,\sigma)} & S \times S \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle g\times g} \\ E' & \xrightarrow{(\beta',\sigma')} & S \times S \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E \times_{\beta S \sigma} E & \xrightarrow{\circ} & E \\ {\scriptstyle f\times f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ E' \times_{\beta' S' \sigma'} E' & \xrightarrow{\circ'} & E' \end{array}$$

soient commutatifs (ou, de manière équivalente, que $T(X) : \Gamma(X) \to \Gamma'(X)$ soit un foncteur pour tout $X \in \mathcal{X}$).

Si $T = (f, g)$ et $T' = (f', g')$ sont deux tels morphismes, une *homotopie* de T vers T' est un morphisme $u \in \mathcal{X}(S, E')$ tel que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{u} & E' \\ & {\scriptstyle (g',g)}\searrow & \big\downarrow{\scriptstyle (\beta',\sigma')} \\ & & S' \times S' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{(f,u\beta)} & E' \times_{\beta' S' \sigma'} E' \\ {\scriptstyle (u\sigma,f')}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \circ'} \\ E' \times_{\beta' S' \sigma'} E' & \xrightarrow{\circ'} & E' \end{array}$$

soient commutatifs (ou, ce qui revient au même, que $u(X)$ soit une transformation naturelle quel que soit $X \in \mathcal{X}$).

Les objets en catégories, morphismes et homotopies définissent une 2-catégorie $\mathbf{Cat}(\mathcal{X})$. Sa sous-catégorie 1-pleine et 2-pleine formée desobjets en groupoïdes est notée $\mathbf{Gr}(\mathcal{X})$.

14.2.2. *Objets en actions de groupe.* Un *objet en groupes* dans $\mathcal{X}$ est un couple (G, μ_G) avec $G \in \mathcal{X}$, $\mu_G \in \mathcal{X}(G \times G, G)$ tel que $G(X) = \mathcal{X}(X, G)$ définisse un groupe pour la loi $\mu_G(X) = \mathcal{X}(X, \mu_G)$ quel que soit $X \in \mathcal{X}$. De même, un *objet en actions de groupe* est un système $\Delta = (G, S, \mu_G, \mu_S)$, où (G, μ_G) est un objet en groupes, $S \in \mathcal{X}$, $\mu_S \in \mathcal{X}(G \times S, S)$, tel que $(\mu_G(X), \mu_S(X))$ définisse une action de $G(X)$ sur $S(X)$ pour tout $X \in \mathcal{X}$.

Étant donné deux objets en actions de groupe $\Delta = (G, S, \mu_G, \mu_S)$, $\Delta' = (G', S', \mu_{G'}, \mu_{S'})$, un *morphisme* de Δ vers Δ' est un couple $T = (f, g)$, avec $f \in \mathcal{X}(G, G')$, $g \in \mathcal{X}(S, S')$, tels que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\mu_G} & G \\ {\scriptstyle f\times f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ G' \times G' & \xrightarrow{\mu_{G'}} & G' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G \times S & \xrightarrow{\mu_S} & S \\ {\scriptstyle g\times g}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle g} \\ G' \times S' & \xrightarrow{\mu_{S'}} & S' \end{array}$$

soient commutatifs.

Il y a une notion évidente de composition de tels morphismes.

Enfin, étant donné deux tels morphismes $T = (f, g)$, $T' = (f', g')$, une *homotopie* de T vers T' est un morphisme $u \in \mathcal{X}(S, G')$ tel que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{(u,g)} & G' \times S' \\ & {\scriptstyle g'}\searrow & \big\downarrow{\scriptstyle \mu_{S'}} \\ & & S' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G \times S & \xrightarrow{(u\circ\mu_S, f\circ p_1)} & G' \times G' \\ {\scriptstyle f'\times u}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mu_{G'}} \\ G' \times G' & \xrightarrow{\mu_{G'}} & G' \end{array}$$

soient commutatifs (en formules : $g'(s) = u(s)g(s)$; $u(\gamma s) = f'(\gamma)u(s)f(\gamma)^{-1}$). La composition de deux homotopies est donnée par $u' \circ u := \mu_{G'} \circ (u', u)$ ($u' \circ u(s) = u'(s)u(s)$).

Les objets en actions de groupe, morphismes et homotopies forment une autre 2-catégorie notée $\mathbf{Acg}(\mathcal{X})$.

14.2.3. *Actions de groupe et groupoïdes.* Pour obtenir un groupoïde Γ, il suffit de se donner un objet en actions de groupe $\Delta = (G, S, \mu_G, \mu_S)$. On définit $E = G \times S$, $\beta = \mu_S$, $\sigma =$ seconde projection. On vérifie (par exemple à l'aide du lemme de Yoneda) que le morphisme

$$G \times G \times S \xrightarrow{(p_{23}, 1_G \times \mu_S)} E \times_{\beta S^\sigma} E,$$

où p_{23} est la projection oubliant le premier facteur, est un isomorphisme. On définit alors $\circ$ comme le morphisme

$$E \times_{\beta S^\sigma} E (\xleftarrow{\sim})^{-1} G \times G \times S \xrightarrow{\mu_G \times 1_S} G \times S = E.$$

Un tel groupoïde est dit *scindé*.

La règle ci-dessus s'étend en un 2-foncteur

$$\mathbf{Acg}(\mathcal{X}) \to \mathbf{Gr}(\mathcal{X}).$$

14.2.1. **Exemple.** $\mathcal{X} = Sch/K$ est la catégorie des K-schémas (dans notre univers). Un *K-groupoïde* est un objet en groupoïdes $\Gamma = (S, E)$ dans $\mathcal{X}$. Il est dit *transitif sur S* s'il existe T' fidèlement plat quasi-compact sur $S \times_K S$ tel que $Hom_{S \times_K S}(T', E) \neq \emptyset$ (le champ associé à $T \mapsto (S(T), E(T), \beta, \sigma, \circ)$ est alors une gerbe, *cf.* [14, 3.3]). Il est dit *unipotent* (*resp. réductif*. . .) si la restriction de E à la diagonale de $S \times_K S$ est un S-groupe affine pro-unipotent (*resp.* pro-réductif. . .).

Un *K-espace homogène* est un objet en actions de groupe (G, S) dans $\mathcal{X}$ telle que G opère transitivement sur S. On note

$\mathbf{Hmg}(Sch/K) \subset \mathbf{Acg}(Sch/K)$ la sous-catégorie 2-pleine et 1-pleine des K-espaces homogènes.

Étant donné un objet en actions de groupe (G, S) dans $\mathcal{X}$, pour que le morphisme (β, γ) du K-groupoïde Γ associé par 14.2.3 soit fpqc, il suffit que (G, S) soit un espace homogène. Cela implique que Γ est transitif sur S (prendre $T' = E$ ci-dessus). Si G est pro-unipotent (*resp.* pro-réductif. . .), Γ est unipotent (*resp.* réductif. . .) : en effet, la restriction de E à la diagonale est un sous-S-groupe fermé du S-groupe constant $G \times_K S$.

14.3. **Représentabilité algébrique.** Soient $\mathcal{A}$ une K-catégorie de Wedderburn et L une extension de K. Par le corollaire 4.1.4, $\mathcal{A}_L$ est encore de Wedderburn, de radical $\mathcal{R}_L = \mathcal{R} \otimes L$, ce qui suggère la présence d'un K-groupoïde (au sens des schémas) dont le groupoïde $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ du §14.1.1 serait le groupoïde des K-points. De même, si $\mathcal{A}$ est monoïdale à radical monoïdal, on peut espérer que le groupoïde $\mathcal{G}^{\otimes}(\mathcal{A})$ du §14.1.2 est représentable.

Nous allons montrer que c'est bien le cas, sous une hypothèse de finitude convenable. En fait, nous allons obtenir encore mieux.

14.3.1. *Le cas non monoïdal.*

14.3.1. **Théorème.** *Soit $Wedf\{K\}$ la sous-2-catégorie 1-pleine et 2-pleine de $Wed\{K\}$ formée des catégories $\mathcal{A}$ telles que $\dim_K \mathcal{A}(A,B) < \infty$ pour tout $(A,B) \in \mathcal{A}\times\mathcal{A}$.*
a) Soit $\mathcal{A} \in Wedf\{K\}$. Alors il existe un K-groupoïde affine scindé unipotent $\Gamma(\mathcal{A}) = (E,S)$, transitif sur S, tel que pour toute extension L de K, on ait $S(L) = Ob(\mathcal{G}(\mathcal{A}_L))$ et $E(s_1,s_2)(L) = \mathcal{G}(\mathcal{A}_L)(s_1,s_2)$ pour tout couple de sections (s_1,s_2) de $\pi_{\mathcal{A}_L}$.
b) Cette construction provient d'un 2-foncteur 1-contravariant et 2-covariant

$$\Delta : Wedf\{K\} \to \mathbf{Hmg}(Sch/K)$$

à valeurs dans les K-espaces homogènes unipotents, via le 2-foncteur $\mathbf{Hmg}(Sch/K) \to \mathbf{Gr}(Sch/K)$ de 14.2.3.
c) Les 2-foncteurs Δ et Γ commutent à l'extension des scalaires.

Démonstration. Compte tenu de l'hypothèse de finitude, pour tout objet A le foncteur des K-algèbres commutatives vers les groupes

$$R \mapsto \ (1_A + \mathcal{R}(A,A)\otimes_K R,\ \circ)$$

est représentable par un K-schéma en groupes affine unipotent $\mathbf{U}^A$. Soit $\mathbf{U}_{\mathcal{A}} = \prod\limits_A \mathbf{U}^A$ leur produit ; c'est un K-groupe pro-unipotent, *i.e.* une limite projective filtrante $\varprojlim \mathbf{U}_\alpha$ de K-groupes unipotents ; en tant que schéma, c'est juste un produit d'espaces affines.

Pour tout couple (A,B) d'objets de $\mathcal{A}$, soit $Sec(A,B)$ l'ensemble des sections K-linéaires de la projection $\mathcal{A}(A,B) \to \bar{\mathcal{A}}(A,B)$: il est représentable par un K-espace affine $\mathbf{Sec}(A,B)$. Posons $\mathbf{Sec}_{\mathcal{A}} = \prod_{A,B}\mathbf{Sec}(A,B)$: c'est aussi un produit d'espaces affines.

Considérons le sous-schéma fermé de $\mathbf{Sec}$

$$S_{\mathcal{A}} = \{(s_{A,B}) \mid \forall A,B,C \in \mathcal{A}, \forall (f,g) \in \bar{\mathcal{A}}(A,B)\times\bar{\mathcal{A}}(B,C),\\ s_{A,C}(g\circ f) = s_{B,C}(g)\circ s_{A,B}(f)\}.$$

On a une action évidente de $\mathbf{U}_{\mathcal{A}}$ sur $S_{\mathcal{A}}$

$$\begin{aligned}\mu : \mathbf{U}_{\mathcal{A}} \times_K S_{\mathcal{A}} &\to S_{\mathcal{A}}\\ (u,s) &\mapsto usu^{-1}\end{aligned}$$

qui est *transitive* grâce au théorème 12.1.1 b). Notons $\Delta(\mathcal{A})$ ce K-espace homogène unipotent : le groupoïde $\Gamma(\mathcal{A})$ cherché est l'image de $\Delta(\mathcal{A})$ par le foncteur de 14.2.3.

Il reste à voir que Δ définit un 2-foncteur. Soit $T : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ un foncteur pleinement fidèle : il induit un épimorphisme $\mathbf{U}_{\mathcal{A}} \twoheadrightarrow \mathbf{U}_{\mathcal{B}}$ de K-schémas affines grâce au diagramme

$$\begin{tikzcd} & \prod_{A\in\mathcal{A}} \mathbf{U}^A \arrow[d] \\ \prod_{B\in B} \mathbf{U}^B \arrow[r, "\sim"] & \prod_{B\in\mathcal{B}} \mathbf{U}^{T(B)} \end{tikzcd}$$

et de même un épimorphisme $\mathbf{Sec}_{\mathcal{A}} \twoheadrightarrow \mathbf{Sec}_{\mathcal{B}}$, ce dernier envoyant $S_{\mathcal{A}}$ dans $S_{\mathcal{B}}$. Ces morphismes définissent clairement un morphisme de K-espaces homogènes $\Delta(T) : \Delta(\mathcal{A}) \to \Delta(\mathcal{B})$.

Soit T' un autre tel foncteur, et $u : T \Rightarrow T'$ un isomorphisme naturel, d'où un autre $\bar{u} : \bar{T} \Rightarrow \bar{T}'$, où $\bar{T}, \bar{T}' : \bar{\mathcal{B}} \to \bar{\mathcal{A}}$ sont les foncteurs induits. Pour tout $B \in \mathcal{B}$ et toute section s de $\pi_{\mathcal{A}}$, l'élément $s(\bar{u}_B)^{-1}u_B$ appartient à $1 + \mathcal{R}(T(B), T(B))$: on en déduit un élément $T^{-1}(s(\bar{u}_B)^{-1}u_B) \in 1 + \mathcal{R}(B, B)$. Cette règle définit un morphisme

$$\Delta(u) : S_{\mathcal{A}} \to \mathbf{U}_{\mathcal{B}}$$

dont on vérifie facilement qu'il satisfait les conditions d'une homotopie $\Delta(T) \Rightarrow \Delta(T')$. □

14.3.2**. Exemple.** Le théorème 14.3.1 montre que, pour deux K-catégories de Wedderburn $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ K-équivalentes, les groupoïdes $\Gamma(\mathcal{A})$ et $\Gamma(\mathcal{B})$ ont en général même type d'homotopie (au sens ci-dessus), mais ne sont pas nécessairement isomorphes. La même remarque vaut pour les invariants plus fins $\Delta(\mathcal{A})$ et $\Delta(\mathcal{B})$. La remarque 12.1.3 va nous permettre de décrire un représentant explicite du type d'homotopie de $\Delta(\mathcal{A})$ et $\Gamma(\mathcal{A})$ lorsque K est algébriquement clos (ou plus généralement parfait, si tout indécomposable de $\mathcal{A}$ le reste dans $\mathcal{A}^\natural$ après toute extension finie L/K).

Il suffit de supposer que tout objet de $\mathcal{A}$ est indécomposable et que deux objets différents sont non isomorphes. On a alors $S = \operatorname{Spec} K$ et G est le produit des $1 + \mathcal{R}(A, A)$, où A décrit l'ensemble des objets de $\mathcal{A}$. En particulier, le schéma des objets de $\Gamma(\mathcal{A})$ est ici réduit à un point.

14.3.2. *Le cas monoïdal.*

14.3.3**. Théorème.** *Soit $Wedf^{\otimes}\{K\}$ la sous-2-catégorie 1-pleine et 2-pleine de $Wed^{\otimes}\{K\}$ formée des catégories $\mathcal{A}$ telles que $\dim_K \mathcal{A}(A, B) < \infty$ pour tout $(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$.*
a) Soit $\mathcal{A} \in Wedf^{\otimes}\{K\}$. Alors il existe un K-groupoïde affine scindé unipotent $\Gamma^{\otimes}(\mathcal{A}) = (E^{\otimes}, S^{\otimes})$, transitif sur $S^{\otimes}$, tel que pour toute extension L de K, on ait $S^{\otimes}(L) = Ob(\mathcal{G}^{\otimes}(\mathcal{A}_L))$ et $E^{\otimes}(s_1, s_2)(L) = \mathcal{G}^{\otimes}(\mathcal{A}_L)(s_1, s_2)$ pour tout couple de sections monoïdales (s_1, s_2) de $\pi_{\mathcal{A}_L}$.
b) Cette construction provient d'un 2-foncteur 1-contravariant et 2-covariant

$$\Delta^{\otimes} : Wedf^{\otimes}\{K\} \to \mathbf{Hmg}(Sch/K)$$

à valeurs dans les K-espaces homogènes unipotents, via le 2-foncteur $\mathbf{Hmg}(Sch/K) \to \mathbf{Gr}(Sch/K)$ de 14.2.3.

c) On a une 2*-transformation naturelle*

$$\Delta^{\otimes} \Rightarrow \Delta \circ \Omega$$

comme dans le sorite 14.1.3.
d) Les 2*-foncteurs* $\Delta^{\otimes}$ *et* $\Gamma^{\otimes}$ *commutent à l'extension des scalaires.*

Démonstration. On reprend les notations de la preuve du theorème 14.3.1. Considérons le nouvel espace de paramètres

$$\mathbf{Sec}^{\otimes} = S \times \prod_{A,B} (1 + \mathcal{R}(A \bullet B, A \bullet B)).$$

Les équations que doivent vérifier la contrainte monoïdale $\tilde{s}$ d'une section monoïdale s définissent un sous-schéma fermé $S^{\otimes} \subset \mathbf{Sec}^{\otimes}$. Soit $\mathbf{U}_1$ le sous-groupe fermé de $\mathbf{U}$ formé des (u_A) tels que $u_{\mathbf{1}} = 1$. Le groupe $\mathbf{U}_1$ opère cette fois-ci sur $S^{\otimes}$ par la formule

$$\begin{aligned} \mu^{\otimes} : \mathbf{U}_1 \times_K S^{\otimes} &\to S^{\otimes} \\ (u, (s, \tilde{s})) &\mapsto (usu^{-1}, \tilde{s}') \end{aligned}$$

où $\tilde{s}'$ est défini par le diagramme (13.1). Le théorème 13.2.1 b) montre que cette action est *transitive*. D'où $\Delta^{\otimes}(\mathcal{A})$.

On a un morphisme évident $\Delta^{\otimes}(\mathcal{A}) \to \Delta(\mathcal{A})$, donné par le plongement de $\mathbf{U}_1$ dans $\mathbf{U}$ et par l'oubli des structures monoïdales. Ceci définit la 2-transformation naturelle de c) au niveau des objets (catégories). Le reste se vérifie facilement. □

15. Sections et tressages

15.1. **Tressages.** On renvoie à [27] pour les notions de tressage et de foncteur monoïdal tressé. Contentons-nous de les rappeler brièvement.

Un *tressage* sur une catégorie monoïdale $(\mathcal{A}, \bullet)$ est la donnée, pour tout couple d'objets $(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, d'un élément

$$R_{A,B} \in \mathcal{A}(A \bullet B, B \bullet A)$$

tel que le diagramme

(15.1)
$$\begin{array}{ccc} A \bullet B & \xrightarrow{f \bullet g} & C \bullet D \\ {\scriptstyle R_{A,B}}\downarrow & & {\scriptstyle R_{C,D}}\downarrow \\ B \bullet A & \xrightarrow{g \bullet f} & D \bullet C \end{array}$$

soit commutatif pour tous $A, B, C, D \in \mathcal{A}$ et tout couple $(f, g) \in \mathcal{A}(A, C) \times \mathcal{A}(B, D)$. On demande de plus que les $R_{A,B}$ vérifient les *identités de tressage*

(15.2) $$R_{A,B\bullet C} = a_{B,C,A}(1_B \bullet R_{A,C})a^{-1}_{B,A,C}(R_{A,B} \bullet 1_C)a_{A,B,C}$$

(15.3) $$R_{A\bullet B,C} = a^{-1}_{C,A,B}(R_{A,C} \bullet 1_B)a_{A,C,B}(1_A \bullet R_{B,C})a^{-1}_{A,B,C}$$

où a est la contrainte d'associativité.

On dit que le tressage R est *symétrique* si on a de plus l'identité

(15.4) $$R_{B,A} = R^{-1}_{A,B}.$$

Si $(\mathcal{B},\top)$ et $(\mathcal{A},\bullet)$ sont tressées, un foncteur monoïdal $(s,\tilde{s}):(\mathcal{B},\top)\to(\mathcal{A},\bullet)$ est dit *tressé* s'il est compatible avec les tressages. En d'autres termes, pour tous $A,B\in\mathcal{B}$, on demande que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} s(A)\bullet s(B) & \xrightarrow{\tilde{s}_{A,B}} & s(A\top B)\\ {\scriptstyle R_{s(A),s(B)}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle s(R_{A,B})}\\ s(B)\bullet s(A) & \xrightarrow{\tilde{s}_{B,A}} & s(B\top A)\end{array}\tag{15.5}$$

soit commutatif.

Notons que si s est strict, la condition devient simplement $s(R_{A,B})=R_{s(A),s(B)}$.

Notons aussi qu'imposer que les tressages de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}$ soient symétriques n'impose aucune condition supplémentaire sur s (et même en retire). Par contre, si les tressages de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}$ sont compatibles via s, et si s est essentiellement surjective, l'un est symétrique si et seulement si l'autre l'est.

15.2. **Sorites.** Le sorite suivant complète le sorite 13.3.1 :

15.2.1**. Sorite.** *Soit $(s,\tilde{s}):(\mathcal{B},\top,R)\to(\mathcal{A},\bullet,S)$ un foncteur monoïdal tressé entre deux catégories monoïdales tressées, et soit $u:s\Rightarrow t$ un isomorphisme naturel de s sur un autre foncteur t. Alors l'unique structure monoïdale $\tilde{t}$ sur t faisant de u un morphisme de foncteurs monoïdaux (sorite 13.3.1) est tressée.* □

On a aussi :

15.2.2**. Sorite.** *Tout tressage R satisfait les identités*

$$R_{A,B\oplus C}=\mathrm{diag}(R_{A,B},R_{A,C})$$
$$R_{A\oplus B,C}=\mathrm{diag}(R_{A,C},R_{B,C}).$$

(Cela résulte du sorite 1.1.3, en considérant R comme une transformation naturelle $\bullet\Rightarrow\bullet\circ T$, où T est l'échange des facteurs.) □

Rappelons également le sorite suivant [27, rem. 2.3] :

15.2.3**. Sorite.** *Notons $\mathcal{A}^{sym}$ la catégorie symétrique de $\mathcal{A}$ (mêmes objets, mêmes morphismes mais produit défini par $A\bullet' B:=B\bullet A$, cf.* [53, I.0.1.4]*). Alors tout tressage R sur $\mathcal{A}$ définit une structure monoïdale sur le foncteur identique $Id_{\mathcal{A}}$: $\mathcal{A}^{sym}\to\mathcal{A}$.* □

Enfin :

15.2.4**. Sorite.** *Soient $(\mathcal{B},\top,R)$ une catégorie monoïdale tressée, $(\mathcal{A},\bullet)$ une catégorie monoïdale et $(s,\tilde{s}):(\mathcal{B},\top)\to(\mathcal{A},\bullet)$ un foncteur monoïdal. Pour $A,B\in\mathcal{B}$, posons*

$$R^s_{A,B}=\tilde{s}^{-1}_{B,A}s(R_{A,B})\tilde{s}_{A,B}:s(A)\bullet s(B)\to s(B)\bullet s(A).$$

Soit a la contrainte d'associativité de $\mathcal{A}$. Alors on a les identités

$$(\tilde{s}_{B,C}\bullet 1_{s(A)})^{-1}R^s_{A,B\bullet C}(1_{s(A)}\bullet\tilde{s}_{B,C})=$$
$$a_{s(B),s(C),s(A)}(1_{s(B)}\bullet R^s_{A,C})a^{-1}_{s(B),s(A),s(C)}(R_{A,B}\bullet 1_{s(C)})a_{s(A),s(B),s(C)}$$

$$(1_{s(C)} \bullet \tilde{s}_{A,B})^{-1} R^s_{A\bullet B,C}(\tilde{s}_{A,B} \bullet 1_{s(C)}) = \\ a^{-1}_{s(C),s(A),s(B)}(R_{A,C} \bullet 1_{s(B)}) a_{s(A),s(C),s(B)}(1_{s(A)} \bullet R^s_{B,C}) a^{-1}_{s(A),s(B),s(C)}.$$

□

En d'autres termes, R^s vérifie "presque" les relations de tressage (15.2) et (15.3).

15.3. **Sections.** Reprenons maintenant les notations et hypothèses du théorème 13.2.1, en présence d'un tressage[21]. Ce dernier reste muet sur la compatibilité des sections monoïdales à un tressage éventuel. Nous allons voir que, dans ce cas, la situation est très "rigide".

Soit R un tressage sur $\mathcal{A}$. On en déduit un tressage $\bar{R} = \pi_{\mathcal{A}}(R)$ sur $\bar{\mathcal{A}}$.

Soit $(s, \tilde{s})$ une section monoïdale de $\pi_{\mathcal{A}}$.

15.3.1**. Proposition.** *a) Il existe un automorphisme (non monoïdal) u de s tel que, pour tout couple d'objets $A, B \in \mathcal{A}$, on ait*

$$s(\bar{R}_{A,B}) = u^{-1}_{B\bullet A} \tilde{s}_{B,A} R_{A,B}(u_A \bullet u_B) \tilde{s}^{-1}_{A,B}. \tag{15.6}$$

b) On a l'identité

$$s(\bar{R}_{B,A}) s(\bar{R}_{A,B}) = \tilde{s}_{A,B} R_{B,A} R_{A,B}(u^2_A \bullet u^2_B) \tilde{s}^{-1}_{A,B} u^{-2}_{A\bullet B}. \tag{15.7}$$

Démonstration. a) En tenant compte du sorite 15.2.3, on applique la proposition 13.7.1 dans la situation $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{sym}$, $T = (Id_{\mathcal{A}}, R)$, $s_{\mathcal{A}} = s_{\mathcal{B}} = s$.

b) Remarquons les relations de commutation

$$u_{B\bullet A} s(\bar{R}_{A,B}) = s(\bar{R}_{A,B}) u_{A\bullet B},$$

due au fait que u est un automorphisme du foncteur s, et

$$R_{A,B}(u_A \bullet u_B) = (u_B \bullet u_A) R_{A,B},$$

due au fait que R est un tressage. On déduit alors de (15.6)

$$s(\bar{R}_{A,B}) = \tilde{s}_{B,A} R_{A,B}(u_A \bullet u_B) \tilde{s}^{-1}_{A,B} u^{-1}_{A\bullet B} \tag{15.8}$$

d'où

$$\begin{aligned} s(\bar{R}_{B,A}) s(\bar{R}_{A,B}) &= u^{-1}_{A\bullet B} \tilde{s}_{A,B} R_{B,A}(u_B \bullet u_A) \tilde{s}^{-1}_{B,A} \tilde{s}_{B,A} R_{A,B}(u_A \bullet u_B) \tilde{s}^{-1}_{A,B} u^{-1}_{A\bullet B} \\ &= u^{-1}_{A\bullet B} \tilde{s}_{A,B} R_{B,A}(u_B \bullet u_A) R_{A,B}(u_A \bullet u_B) \tilde{s}^{-1}_{A,B} u^{-1}_{A\bullet B} \\ &= u^{-1}_{A\bullet B} \tilde{s}_{A,B} R_{B,A} R_{A,B}(u^2_A \bullet u^2_B) \tilde{s}^{-1}_{A,B} u^{-1}_{A\bullet B} \\ &= \tilde{s}_{A,B} R_{B,A} R_{A,B}(u^2_A \bullet u^2_B) \tilde{s}^{-1}_{A,B} u^{-2}_{A\bullet B} \end{aligned}$$

comme annoncé. □

15.3.2**. Remarques.**

[21] On rappelle que l'hypothèse de commutativité des $End(\mathbf{1})$-bimodules $\mathcal{A}(A, B)$ est alors automatiquement satisfaite.

a) On prendra garde au fait que les relations de commutation apparaissant dans la preuve de la proposition 15.3.1 a) n'ont pas de raison d'être vraies en échangeant $R_{A,B}$ et $s(\bar{R}_{A,B})$. De même, $u_{A\bullet B}$ et $u_A \bullet u_B$ n'ont pas de raison de commuter.

b) Dans le sorite 15.2.3, la condition, pour un isomorphisme naturel $R : \bullet \Rightarrow \bullet \circ T$, de définir une structure monoïdale sur le foncteur identique $\mathcal{A}^{sym} \to \mathcal{A}$, est *plus faible* que les conditions de tressage. Il en résulte que l'automorphisme u n'est pas arbitraire : il vérifie deux conditions supplémentaires du type "cross-effects" non commutatifs d'ordre 3, qui reviennent à dire que la fonction $A \mapsto u_A$ est "de degré ≤ 2" pour la structure monoïdale. Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter ces relations, que nous n'utiliserons pas.

15.3.3**. Proposition.** *Pour une section monoïdale $(s, \tilde{s})$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\bar{R}^s$ est un tressage (notation du sorite 15.2.4).*

(ii) *Il existe un automorphisme (non monoïdal) v de $Id_{\mathcal{A}}$ tel qu'on ait, pour u comme dans la proposition 15.3.1, l'identité*

$$(u_A \bullet u_B)\tilde{s}_{A,B}^{-1} u_{A\bullet B}^{-1} \tilde{s}_{A,B} = (v_A \bullet v_B) v_{A\bullet B}^{-1}.$$

Si ces conditions sont vérifiées, le tressage $\bar{R}^s$ ne dépend pas du choix de s : pour un choix de v comme dans (ii)*, il est donné par la formule*

$$\tilde{R}_{A,B} = R_{A,B}(v_A \bullet v_B) v_{A\bullet B}^{-1}.$$

Démonstration. En utilisant la formule (15.8), on obtient l'identité

$$R_{A,B}^{-1} \bar{R}_{A,B}^s = (u_A \bullet u_B)\tilde{s}_{A,B}^{-1} u_{A\bullet B}^{-1} \tilde{s}_{A,B}.$$

Si (i) est vérifié, le premier membre de cette identité définit une structure monoïdale sur $Id_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}^{sym} \to \mathcal{A}^{sym}$ couvrant la structure monoïdale triviale sur $Id_{\bar{\mathcal{A}}}$. (ii) résulte alors de la proposition 13.8.1. Pour la réciproque, remarquons que l'identité de (ii) implique que $\bar{R}^s$ fait commuter le diagramme (15.1) pour tous morphismes de $\mathcal{A}$. En particulier, dans le sorite 15.2.4 le premier membre des deux identités se réduit respectivement à $\bar{R}_{A,B\bullet C}^s$ et à $\bar{R}_{A\bullet B,C}^s$: $\bar{R}^s$ est donc bien un tressage.

Soit $(t, \tilde{t})$ une autre section monoïdale. D'après le théorème 13.2.1 b), s et t sont monoïdalement conjuguées. En d'autres termes, il existe une famille (v_A) conjuguant s et t et vérifiant l'identité

$$v_{A\bullet B}\tilde{s}_{A,B} = \tilde{t}_{A,B} v_A \bullet v_B.$$

On a alors

$$\bar{R}_{A,B}^t = (v_B^{-1} \bullet v_A^{-1})\bar{R}_{A,B}^s (v_A \bullet v_B).$$

Ainsi, si $\bar{R}^s$ est un tressage, on a $\bar{R}^t = \bar{R}^s$.

La dernière assertion est claire à partir de la formule (15.8). □

Nous ne connaissons pas de critère pour que les conditions de la proposition 15.3.3 soient vérifiées, à l'exception d'un cas : celui où le tressage résiduel $\bar{R}$ est *symétrique*. Rappelons la définition suivante [27, §6] :

15.3.4**. Définition.** Une *structure balancée* sur une catégorie monoïdale tressée $(\mathcal{A}, \bullet, R)$ est un automorphisme $\theta = (\theta_A)_{A\in\mathcal{A}}$ du foncteur identique de $\mathcal{A}$ vérifiant l'identité

$$R_{B,A}R_{A,B} = (\theta_A \bullet \theta_B)\theta^{-1}_{A\bullet B}.$$

15.3.5**. Théorème.** *Soit* $(\mathcal{A}, \bullet, R)$ *une catégorie monoïdale tressée. On suppose que le radical est un idéal monoïdal, et on note* $(\bar{\mathcal{A}}, \bullet, \bar{R})$ *la catégorie monoïdale tressée obtenue en quotientant par le radical.*
a) Si $\bar{R}$ *est symétrique,* R *est balancé via un automorphisme* θ *vérifiant* $\pi_{\mathcal{A}}(\theta) = 1$.
b) Si de plus $\operatorname{car} K \neq 2$*, les conditions de la proposition 15.3.3 sont vérifiées. Le tressage* $\tilde{R}$ *correspondant est l'unique tressage symétrique de* $\mathcal{A}$ *tel que*

(i) $\pi_{\mathcal{A}}(\tilde{R}) = \bar{R}$*;*

(ii) $(Id_{\mathcal{A}}, \tilde{R})$ *est monoïdalement isomorphe à* $(Id_{\mathcal{A}}, R)$ *(cf. sorite 15.2.3).*

c) Si de plus R *est symétrique, on a* $s(\bar{R}) = R$ *pour toute section monoïdale* s.

Démonstration.
a) On applique la proposition 13.8.1 au foncteur monoïdal $(Id_{\mathcal{A}}, R_{A,B}R_{B,A})$.
b) L'identité (15.7) de la proposition 15.3.1 donne une nouvelle identité

$$(\theta_A \bullet \theta_B)\theta^{-1}_{A\bullet B} = \tilde{s}^{-1}_{A,B}u^2_{A\bullet B}\tilde{s}_{A,B}(u_A^{-2} \bullet u_B^{-2}).$$

Comme $\operatorname{car} K \neq 2$, l'élévation au carré est bijective dans $1+\mathcal{R}$. En particulier, θ a une unique racine carrée v. Comme $\theta_{A\bullet B}$ et $\theta_A \bullet \theta_B$ sont centraux dans $\mathcal{A}(A\bullet B)$, $\tilde{s}^{-1}_{A,B}u^2_{A\bullet B}\tilde{s}_{A,B}$ et $(u_A^{-2} \bullet u_B^{-2})$ commutent. On a donc

$$(v_A \bullet v_B)v^{-1}_{A\bullet B} = \tilde{s}^{-1}_{A,B}u_{A\bullet B}\tilde{s}_{A,B}(u_A^{-1} \bullet u_B^{-1})$$

ce qui n'est autre que la condition (iii) de la proposition 15.3.3.

Ceci démontre que $\tilde{R}$ vérifie les conditions (i) et (ii) du théorème. Pour voir l'unicité, soit $\tilde{R}'$ un autre tressage symétrique vérifiant ces conditions. En particulier, $(Id_{\mathcal{A}}, \tilde{R}')$ est monoïdalement isomorphe à $(Id_{\mathcal{A}}, \tilde{R})$. Il existe donc $\mu \in 1+\mathcal{R}$ tel que

$$\tilde{R}'_{A,B} = \tilde{R}_{A,B}\mu_{A\bullet B}(\mu_A^{-1} \bullet \mu_B^{-1})$$

pour tout couple d'objets (A, B). La symétrie de $\tilde{R}$ et de $\tilde{R}'$ donne maintenant l'identité

$$\mu^2_{A\bullet B} = \mu^2_A \bullet \mu^2_B.$$

En en prenant la racine carrée, on trouve bien que $\tilde{R}' = \tilde{R}$.
c) Cela résulte de la dernière assertion de la proposition 15.3.3.

□

15.3.6**. Exemple.** Considérons la quantification de Drinfeld-Cartier $\bar{\mathcal{A}}[[h]]$ d'une catégorie monoïdale stricte symétrique $\bar{\mathcal{A}}$ munie d'un "tressage infinitésimal" $t_{A,B}$, *cf.* [28, ch. 9]. Rappelons seulement que $\bar{\mathcal{A}}[[h]]$ a les mêmes objets que $\bar{\mathcal{A}}$, et que $\bar{\mathcal{A}}[[h]](A, B) = (\bar{\mathcal{A}}(A, B))[[h]]$; le tressage de $\bar{\mathcal{A}}[[h]]$ est de la forme $R_{A,B} = \bar{R}_{A,B}\exp(\frac{h}{2}t_{A,B})$ (et la contrainte d'associativité est construite à partir de $t_{A,B}$ au moyen d'un associateur de Drinfeld). En général ce tressage n'est pas symétrique, même modulo h^2. Toutefois, le théorème 15.3.5 b) montre par un passage à la limite que $(\bar{\mathcal{A}}[[h]], R)$ admet une structure balancée, et même que $\bar{\mathcal{A}}[[h]]$ admet *un unique tressage symétrique* $\tilde{R}$ se réduisant en $\bar{R}$ et tel que $(Id, \tilde{R})$ soit monoïdalement isomorphe à (Id, R) dans le cadre du sorite 15.2.3.

En particulier il n'est pas nécessaire de supposer l'existence de duaux dans $\bar{\mathcal{A}}$ pour construire une structure balancée sur R, comme dans [12].

15.3.7**. Remarque.** Il est probable que les parties b) et c) du théorème sont fausses en caractéristique 2. Il serait intéressant d'exhiber un contre-exemple.

15.4. **Compléments.** Pour finir, examinons de plus près le défaut de validité des conditions de la proposition 15.3.3 et le défaut de commutation du diagramme (15.5). On pose $u_{A,B} = R^{-1}_{A,B}(\tilde{s}_{B,A})^{-1}s(\bar{R}_{A,B})\tilde{s}_{A,B}$ et $n_{A,B} = 1_{A\bullet B} - u_{A,B}$. On a $n_{A,B} \in C^1_s(AB)$ (*cf.* §13.6.9 pour la notation).

Soient

$$\begin{aligned} &e = e(R) = \sup\{r \mid n_{A,B} \in C^r_s(AB) \text{ pour tout } (A,B) \in \mathcal{A}\times\mathcal{A}\} \\ &\bar{e} = \bar{e}(\bar{R}) = \sup\{r \mid [1_A \bullet m_B + m_A \bullet 1_B, n_{A,B}] \in \mathcal{R}(A\bullet B)^r \\ &\quad \text{pour tout } (A,B)\in\mathcal{A}\times\mathcal{A} \text{ et tout } (m_A,m_B)\in\mathcal{R}(A,A)\times\mathcal{R}(B,B)\}. \end{aligned}$$

Notons $\bar{n}_{A,B}$ l'image de $n_{A,B}$ dans $C^{[e]}(AB)$ (notation du §13.6.9).

15.4.1**. Proposition.** *a) L'élément $e = e(R) \in \mathbf{N}\cup\{\infty\}$ et les éléments $\bar{n}_{A,B}$ de $C^{[e]}(AB)$ ne dépendent pas du choix de s : ils ne dépendent que de R. Si $\mathcal{A}$ est stricte, on a les identités*

$$\bar{n}_{A,B\bullet C} = (\bar{R}_{A,B}\bullet 1_C)^{-1}(1_B\bullet \bar{n}_{A,C})(\bar{R}_{A,B}\bullet 1_C) + \bar{n}_{A,B}\bullet 1_C \tag{15.9}$$

$$\bar{n}_{A\bullet B,C} = (1_A\bullet \bar{R}_{B,C})^{-1}(\bar{n}_{A,C}\bullet 1_B)(1_A\bullet \bar{R}_{B,C}) + 1_A\bullet \bar{n}_{B,C} \tag{15.10}$$

la seconde pouvant aussi s'écrire

$$\bar{n}_{A\bullet B,C} = (\bar{R}_{B,A}\bullet 1_C)(1_B\bullet \bar{n}_{A,C})(\bar{R}_{B,A}\bullet 1_C)^{-1} + 1_A\bullet \bar{n}_{B,C}. \tag{15.11}$$

b) L'élément $\bar{e} \in \mathbf{N}\cup\{\infty\}$ ne dépend pas du choix de s : il ne dépend que de $\bar{R}$. On a $\bar{e} > e$, et $\bar{e} = \infty$ si et seulement si les conditions de la proposition 15.3.3 sont vérifiées.
c) Soit $T : (\mathcal{A}', \bullet, R') \to (\mathcal{A}, \bullet, R)$ un foncteur monoïdal strict tressé radiciel (avec $(\mathcal{A}', \bullet)$ stricte). Alors $e(R') \leq e(R)$.

Démonstration. $a)$ Soit s' une autre section monoïdale. D'après le théorème 13.2.1 b), s et s' sont conjuguées par une famille $(v_A)_{A\in\mathcal{A}}$ d'éléments de $1 + \mathcal{R}(A)$ vérifiant l'identité $(v_{A\bullet B})\tilde{s}_{A,B} = \tilde{t}_{A,B}(v_A \bullet v_B)$. Si on note $u'_{A,B} = R^{-1}_{A,B}(\tilde{s}'_{B,A})^{-1}s'(\bar{R}_{A,B})\tilde{s}'_{A,B}$, on en déduit l'identité

$$u'_{A,B} = (v_A\bullet v_B)u_{A,B}(v_A\bullet v_B)^{-1}.$$

Si on pose $n'_{A,B} = 1_{A\bullet B} - u'_{A,B}$, cette identité implique d'abord que $n'_{A,B} \in \mathcal{R}(A\bullet B)^e$, ensuite que que $n'_{A,B} \equiv n_{A,B} \pmod{\mathcal{R}(A\bullet B)^{e+1}}$, et enfin que son image $\mod \mathcal{R}(A\bullet B)^{e+1}$ est dans $C^{[e]}(AB)$.

Pour établir (15.9) et (15.10), on peut supposer s stricte par le point $c)$ de la proposition 13.4.2. En appliquant s à (15.2) et (15.3), on obtient les identités

$$s(\bar{R}_{A,B\bullet C}) = (1_B \bullet s(\bar{R}_{A,C}))(s(\bar{R}_{A,B}) \bullet 1_C)$$
$$s(\bar{R}_{A\bullet B,C}) = (s(\bar{R}_{A,C}) \bullet 1_B)(1_A \bullet s(\bar{R}_{B,C})).$$

On en déduit

$$u_{A,B\bullet C} = (R_{A,B} \bullet 1_C)^{-1}(1_B \bullet u_{A,C})(R_{A,B} \bullet 1_C)(u_{A,B} \bullet 1_C)$$
$$u_{A\bullet B,C} = (1_A \bullet R_{B,C})^{-1}(u_{A,C} \bullet 1_B)(1_A \bullet R_{B,C})(1_A \bullet u_{B,C})$$

Les identités (15.9) et (15.10) s'en déduisent facilement. En utilisant l'identité $R_{B,A\bullet C} = (1_A \bullet R_{B,C})(R_{B,A} \bullet 1_C)$ et l'égalité $n_{A,C} \bullet 1_B = \bar{R}_{B,A\bullet C}(1_B \bullet \bar{n}_{A,C})\bar{R}^{-1}_{B,A\bullet C}$, on peut réécrire le premier terme du membre de droite de (15.10) :

$$(\bar{R}_{B,A} \bullet 1_C)(1_B \bullet \bar{n}_{A,C})(\bar{R}_{B,A} \bullet 1_C)^{-1}.$$

$b)$ résulte facilement des calculs de $a)$.

$c)$ Soit s (*resp.* s') une section monoïdale stricte de $\pi_{\mathcal{A}}$ (*resp.* $\pi_{\mathcal{A}'}$) (il en existe d'après la proposition 13.4.2). Posons

$$u_{T(A),T(B)} = (R_{T(A),T(B)})^{-1}s(\bar{R}_{T(A),T(B)}),\ u'_{A,B} = (R'_{A,B})^{-1}s'(\bar{R}'_{A,B}).$$

D'après la proposition 13.7.1, Ts' et $s\bar{T}$ sont conjuguées par une famille $(w_A)_{A\in\mathcal{A}'}$ d'éléments de $1+\mathcal{R}(T(A))$ vérifiant l'identité

$$w_{A\bullet B} = w_A \bullet w_B.$$

On déduit de ces formules que

$$Tu'_{A,B} = (w_A \bullet w_B)u_{T(A),T(B)}(w_A \bullet w_B)^{-1}.$$

d'où il est aisé de conclure. □

15.4.2**. Remarque.** Les identités (15.9) et (15.10) ne sont autres que les relations de tressage infinitésimales de Drinfeld-Cartier (*cf.* [28, ch. 9]), vérifiées par $ht_{A,B}$ de l'exemple 15.3.6. Toutefois, $\bar{n}_{A,B}$ est "antisymétrique" si R est symétrique, alors que $ht_{A,B}$ est "symétrique" dans la quantification de Drinfeld-Cartier.

16. Première application : catégories de Kimura

16.1. Rappelons (définition 9.1.16) qu'une catégorie de Kimura sur un corps de caractéristique nulle K est une catégorie K-linéaire monoïdale symétrique rigide, vérifiant $End(\mathbf{1}) = K$, pseudo-abélienne, et dont tout objet est de dimension finie au sens de Kimura.

16.1.1**. Théorème.** *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie de Kimura, de radical $\mathcal{R}$. Alors*
a) Le foncteur de projection $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{R}$ admet des sections monoïdales, qui envoient le tressage résiduel $\bar{R}$ de $\mathcal{A}/\mathcal{R}$ sur le tressage R de $\mathcal{A}$. Deux telles sections sont monoïdalement conjuguées.
b) Soit R' la contrainte de commutativité de $\mathcal{A}/\sqrt[\otimes]{0}$ modifiée à l'aide de la $\mathbf{Z}/2$-graduation canonique de $\mathcal{A}/\sqrt[\otimes]{0}$ (cf. théorème 9.2.1). Par ailleurs, soit $\pi^+_A \in$

$\mathcal{A}/\sqrt[\otimes]{0}(A,A)$ *l'idempotent (central) associé canoniquement à tout objet* A *de* $\mathcal{A}$ *(ibid.) Notons* $\bar{R}'$ *et* $\bar{\pi}_A^+$ *leurs images dans* $\mathcal{A}/\mathcal{R}$*. Alors, pour toute section monoïdale* $s : \mathcal{A}/\mathcal{R} \to \mathcal{A}$ *comme en a),*

(i) *L'image de* $s(\bar{R}')$ *(resp. de* $s(\bar{\pi}_A^+)$ *pour tout* A*) dans* $\mathcal{A}/\sqrt[\otimes]{0}$ *est égale à* R' *(resp. à* π_A^+*).*

(ii) *La famille des* $s(\bar{\pi}_A^+)$ *définit une* $\mathbf{Z}/2$*-graduation sur* $\mathcal{A}$*, dont le tressage modifié associé est* $s(\bar{R}')$*. Pour ce tressage symétrique, la catégorie* $\mathcal{A}$ *reste rigide et la dimension de tout objet* A *est égale à* $\operatorname{kim} A$ *; en particulier, c'est un entier* ≥ 0*.*

Démonstration. a) résulte des théorèmes 13.2.1 et 15.3.5, appliqués à $\mathcal{A}$ en vertu du théorème 9.2.2. De même, b) résulte des mêmes références, appliquées à $\mathcal{A}/\sqrt[\otimes]{0}$ munie de R', en notant que la donnée de R' est équivalente à celle de (R et) des π_A^+.
□

IV. Enveloppes

Dans cette partie, on expose quelques applications “concrètes” des théorèmes de scindage de la partie précédente à la théorie des représentations indécomposables des algèbres artiniennes et des groupes algébriques linéaires. Dans ce dernier cas, le résultat-clé 19.3.1 est une vaste généralisation du théorème classique de Jacobson-Morosov-Kostant.

17. Le cas non monoïdal : enveloppes pro-semi-simples

Dans cette section, nous tirons les fruits du théorème 12.1.1 ; elle peut être considérée comme un échauffement préparatoire aux sections suivantes.

17.1. **Enveloppes pro-semi-simples.** Soient $\mathcal{A}$ une petite K-catégorie et $\pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \bar{\mathcal{A}}$ le foncteur de projection sur le quotient de $\mathcal{A}$ par son radical. On a alors un foncteur canonique

$$\bar{\mathcal{A}}–Modf \to \mathcal{A}–Modf$$

entre catégories de modules à gauche de K-dimension finie (nous dirons brièvement : K-finis), induit par $M \mapsto M \circ \pi_{\mathcal{A}}$, *cf.* définition 1.3.3. Ce foncteur est pleinement fidèle (du fait que $\pi_{\mathcal{A}}$ est plein et surjectif). Il en est de même du foncteur composé avec $\pi_{\mathcal{A}-Mod}$

$$\bar{\mathcal{A}}–Modf \to \overline{\mathcal{A}–Modf}$$

si $\bar{\mathcal{A}}$-Mod est abélienne semi-simple[22].

Prenons pour $\mathcal{A}$ une algèbre A (associative unitaire) sur un corps K *parfait*. On a le foncteur d’oubli, fidèle et exact

$$\omega : A–Modf \to Vec_K.$$

La situation ne change pas si l’on remplace A par sa complétion profinie (complétion eu égard aux idéaux bilatères de K-codimension finie). On peut donc la supposer, et on la supposera, profinie, ce qui permet d’énoncer :

17.1.1**. Lemme.** *Si A est profinie, le quotient $\bar{A}$ de A par son radical est semi-simple (profinie, non nécessairement de K-dimension finie). A fortiori, le foncteur*

$$\bar{A}–Modf \to \overline{A–Modf}$$

est pleinement fidèle.

[22] Il y a lieu éventuellement de prendre un second univers pour ne travailler qu’avec de petites catégories.

Démonstration. Écrivons A comme limite projective filtrante $\varprojlim A_\alpha$ à flèches de transition surjectives. Comme un élément inversible de A s'identifie à une collection d'éléments inversibles compatibles de A_α, on obtient, en revenant à la définition des radicaux, que le radical R de A est la limite $\varprojlim R_\alpha$ des radicaux de A_α. On a alors un plongement $A/R \hookrightarrow \varprojlim(A_\alpha/R_\alpha)$, le composé avec la projection sur chaque algèbre semi-simple A_α/R_α étant surjective. Comme A/R est profinie (R étant un idéal fermé), cette injection est donc un isomorphisme, d'où le résultat. □

On sait que $A\text{–}Modf$ est une K-catégorie de Wedderburn (proposition 2.4.4). On peut donc appliquer le théorème 12.1.1, et obtenir une section fonctorielle s : $\overline{A\text{–}Modf} \to A\text{–}Modf$, deux telles sections étant conjuguées.

D'après [53, II.2.6.3] ou [54, 2.2], il existe une *K-algèbre pro-semi-simple A_s*, non nécessairement de K-dimension finie, telle que le composé $\omega \circ s$ induise une équivalence de catégories $\overline{A\text{–}Modf} \to A_s\text{–}Modf$, et un homomorphisme $A \to A_s$.

On rappelle qu'étant donné un homomorphisme $f : A' \to A$ de K-algèbres profinies et le foncteur associé $f^* : A\text{–}Modf \to A'\text{–}Modf$, on a (*cf.* [53, II.2.6.3] pour l'énoncé dual) :

– f est surjectif si et seulement si f^* est pleinement fidèle, et pour tout A-module K-fini M, tout sous-objet de $f^*(M)$ provient d'un sous-objet de M ;
– f est injectif si et seulement si tout A'-module K-fini M' est sous-quotient d'un module de la forme $f^*(M)$.

En particulier, le morphisme $A \to A_s$ est une injection. Comme deux sections s sont conjuguées, A_s est bien définie à isomorphisme près. Il découle par ailleurs du lemme précédent, et de *loc. cit.*, que l'on a une surjection $A_s \to A/R$.

On peut considérer A_s comme une "enveloppe pro-semi-simple" de l'algèbre profinie A : d'après le lemme 12.1.2, *les classes d'isomorphismes de A-modules indécomposables sont en bijection avec les classes d'isomorphismes de A_s-modules simples.*

Cette bijection est donnée de la manière suivante : à tout indécomposable M dans A-$Modf$, on peut donner une structure de A_s-module étendant celle de A-module. On le note alors M_s ; il est simple, et $End_{A_s} M_s$ est le corps gauche $\overline{End_A(M)} = End_A M/\mathrm{rad}(End_A M)$.

L'algèbre pro-semi-simple A_s est semi-simple, *i.e.* de dimension finie sur K, si et seulement si A est *de type de représentation fini*. Dans ce cas, si M_α parcourt un système de représentants des classes d'isomorphismes de A-modules indécomposables K-finis, notons n_α la dimension de M_α sur le corps gauche $D_\alpha = \overline{End_A(M_\alpha)}$. On a $A_s \cong \prod_\alpha M_{n_\alpha}(D_\alpha^o)$.

17.1.2**. Remarques.**

a) D'après [14, 2.17], toute K-catégorie abélienne dont tout objet est de longueur finie, dont toute algèbre d'endomorphismes est de K-dimension finie, et admettant un générateur, est équivalente à une catégorie $A\text{–}Modf$ pour une K-algèbre A convenable de dimension finie sur K.

b) Pour l'algèbre profinie $A = K[[T_1, \dots, T_n]]$, la catégorie A–$Modf$ est naturellement équivalente à la catégorie $Rep_K(\mathbb{G}_a^n)$ des représentations de dimension finie du groupe vectoriel $\mathbb{G}_a^n$. En effet, la cogèbre duale de A s'identifie naturellement à la cogèbre sous-jacente à la bigèbre affine $\mathcal{O}(\mathbb{G}_a^n)$, et on conclut par [54, 3].

c) Soit $\mathcal{J}$ l'idéal de $\mathcal{A} = A$-$Modf$ formé des morphismes qui se factorisent à travers un objet projectif de A-$Modf$. Le quotient $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ s'appelle la catégorie *stable* des A-modules finis, *cf.* [3, p.23], et se note A–$\underline{Modf}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A\text{–}Modf & \xrightarrow{pr} & A\text{–}\underline{Modf} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{A\text{–}Modf} & \xrightarrow{\overline{pr}} & \overline{A\text{–}\underline{Modf}}. \end{array}$$

Le foncteur du bas $\overline{pr}$ est un foncteur plein surjectif entre catégories semi-simples, donc admet une section. En fait, on peut partitionner les classes d'isomorphismes d'objets simples de $\overline{A\text{–}Modf}$ en deux ensembles : les projectifs (P) et les autres (NP) ; $\overline{pr}$ envoie les objets dans P sur 0, et la restriction de $\overline{pr}$ à la sous-catégorie K-linéaire pleine de $\overline{A\text{–}Modf}$ engendrée par les objets dans NP est une équivalence de catégories. On en déduit que $\overline{A\text{–}\underline{Modf}} \cong \underline{A_s}\text{–}Modf$ pour un quotient $\underline{A_s}$ de A_s "correspondant" à NP. On peut alors former le "push-out" $A' = \underline{A_s} \times^{A_s} A/R$.

Auslander a conjecturé que si A et B sont deux K-algèbres de dimension finie telles que A–$\underline{Modf}$ et B–$\underline{Modf}$ sont équivalentes (équivalence de Morita stable), alors il y a le même nombre de modules simples non-projectifs sur A et sur B, *cf.* [3, p.223]. Cela équivaut donc à dire que les algèbres push-out A' et B' sont Morita-équivalentes.

Rappelons d'autre part que si A est de dimension globale finie (au sens de [11]), on peut lui associer une K-algèbre $\hat{A}$ dite répétitive (de dimension infinie sur K), et une équivalence de catégories

$$D^b(A\text{–}Modf) \to \hat{A}\text{–}\underline{Modf}$$

cf. [50, 5], [22] ; on peut d'ailleurs replacer $\hat{A}$ par sa complétion profinie. Ce qui précède permet alors de "décrire" le quotient de $D^b(A\text{–}Modf)$ par son radical.

17.2. **Lien avec l'algèbre d'Auslander.** L'algèbre d'Auslander d'une K-algèbre A est

$$\mathbf{Aus}(A) := End_A(\bigoplus_\alpha M_\alpha),$$

où M_α parcourt un système (en général infini) de représentants des classes d'isomorphismes de A-modules indécomposables K-finis. Lorsque A est de dimension finie sur K, elle partage avec A_s la propriété que *les classes d'isomorphismes de A-modules indécomposables sont en bijection avec les classes d'isomorphismes de $\mathbf{Aus}(A)$-modules simples*, *cf.* [3, 4.9.5].

Cette bijection est la suivante : à tout indécomposable M dans A–$Modf$, on associe le $\mathbf{Aus}(A)$-module simple $S_M := \overline{End_A(M)}$. En tant que K-algèbre, $\overline{End_A(M)}$ s'identifie à $End_{\mathbf{Aus}(A)} S_M$ (*loc. cit.*).

L'algèbre $\mathbf{Aus}(A)$ est de dimension finie sur K si et seulement si A est de type de représentation fini. Dans ce cas,

$$\overline{\mathbf{Aus}(A)} := \mathbf{Aus}(A)/\mathrm{rad}(\mathbf{Aus}(A)) = \prod_\alpha D_\alpha.$$

Ainsi, $\overline{\mathbf{Aus}(A)}$ est *Morita-équivalente* à A_s[23].

17.3. **Cas des algèbres héréditaires.** Rappelons qu'une K-algèbre est dite *héréditaire* (à gauche) si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites *cf.* [11, I.5] :

– tout idéal à gauche est projectif,

– tout sous-module d'un module projectif (à gauche) est projectif.

C'est une condition Morita-invariante.

Supposons pour simplifier K algébriquement clos et A de dimension finie sur K, minimale dans sa classe d'équivalence de Morita (ce qui revient à dire que $\bar{A} = A/R$ est commutative). Alors A est héréditaire si et seulement si $A = K\vec{\Delta}$ est l'algèbre des chemins d'un carquois fini $\vec{\Delta}$ (et sans boucle orientée), *cf.* [3, 4.2], [13, 6]. Un A-module n'est donc rien d'autre qu'une représentation K-linéaire de $\vec{\Delta}$, et A s'identifie en fait à l'algèbre tensorielle sur un $\bar{A}$-bimodule fini, *cf.* [13, 6].

Supposons en outre A de type de représentation fini et connexe. Alors par le théorème de Gabriel (*cf.* [3, 4.7.6], [51, 2.9]), le graphe non-orienté Δ sous-jacent à $\vec{\Delta}$ est un diagramme de Dynkin des séries ADE. En outre, les indécomposables M_α sont en bijection avec les racines positives, et les n_α ne sont autres que leurs "longueurs" respectives (somme des coefficients dans la base de racines standard). Cela détermine A_s dans ce cas.

Voici deux exemples. Soit d'abord A la K-algèbre des matrices triangulaires supérieures de taille n. C'est l'algèbre $K\vec{\Delta}$ pour le diagramme de Dynkin $\vec{\Delta} = A_n$ (orienté de gauche à droite). Dans la base standard de racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, les racines positives sont les $\alpha_{ij} = \sum_{i \le k < j} \alpha_k, 0 < i < j \le n+1$. On en déduit que

$$A_s \cong \prod_{1 \le k \le n} (M_k(K))^{n+1-k}.$$

[23]$\overline{\mathbf{Aus}(A)}$ s'identifie d'ailleurs au quotient par son radical de l'algèbre des chemins du carquois d'Auslander-Reiten de A dont il a été question au §3.1.2, *cf. e.g.* [3, 4.1.11].

Prenons maintenant $A = KE_6$, l'algèbre des chemins du carquois de Dynkin (orienté) à six sommets $\vec{\Delta} = E_6$. À l'aide des planches de racines [6], on trouve

$$A_s \cong K^6 \times M_2(K)^3 \times M_5(K) \times M_6(K)^2 \times M_7(K)^3 \times M_8(K)^2 \times M_9(K) \times M_{10}(K) \times M_{11}(K).$$

17.3.1**. Remarque.** Dans le cas des algèbres de chemins $A = K\vec{\Delta}$, un avatar de A_s a été construite par voie géométrique dans [52].

18. Sections monoïdales et foncteurs fibres

Dans ce paragraphe, nous appliquons le théorème de scindage monoïdal symétrique au cas des catégories tannakiennes.

18.1. **Un contexte général.**

18.1.1**. Théorème.** *Soient K un corps de caractéristique nulle et L une extension de K. Soit $\mathcal{A}$ une (petite) catégorie K-linéaire, pseudo-abélienne, monoïdale symétrique rigide avec $K = End(\mathbf{1})$. On suppose qu'il existe un K-foncteur* fidèle *monoïdal symétrique $\omega : \mathcal{A} \to Vec_L$.*
Alors $\mathcal{R} = \mathrm{rad}(\mathcal{A})$ est monoïdal, et $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/\mathcal{R}$ est tannakienne semi-simple sur K. En particulier, si $\mathcal{A}$ est une catégorie tannakienne sur K, de radical $\mathcal{R}$, alors $\mathcal{A}/\mathcal{R}$ est encore tannakienne sur K ; elle est neutre si $\mathcal{A}$ est neutre.

Démonstration. On sait par le théorème 8.2.1 que $\mathcal{A}$ est de Wedderburn. Comme $\bar{\mathcal{A}}$ est K-linéaire pseudo-abélienne, elle est même abélienne (semi-simple) ; elle est par ailleurs rigide (*cf.* 6.1.4). D'autre part, la tensorialité du radical a été démontrée dans le théorème 8.2.2.

Les hypothèses des théorèmes 13.2.1 et 15.3.5 sont satisfaites. On peut donc trouver une section K-linéaire monoïdale s de $\pi_{\mathcal{A}}$, qui est automatiquement symétrique. Une telle section est clairement fidèle, donc le K-foncteur monoïdal symétrique $\omega_s = \omega \circ s : \bar{\mathcal{A}} \to Vec_L$ l'est aussi. Comme c'est un foncteur monoïdal fidèle entre catégories monoïdales abéliennes semi-simples, il est exact (les suites exactes se scindent) ; c'est donc un foncteur fibre.

La seconde assertion découle de là. □

18.1.2**. Remarques.**

$a)$ On pourrait aussi prouver que $\bar{\mathcal{A}}$ est tannakienne si $\mathcal{A}$ l'est en utilisant la caractérisation interne de Deligne [14]. En effet, comme $\mathcal{R} = \mathcal{N}$, la dimension d'un objet de $\mathcal{A}$ ne change pas si on la calcule dans $\bar{\mathcal{A}}$; c'est donc un entier naturel. Mais cet argument ne montre pas que $\bar{\mathcal{A}}$ est neutre quand $\mathcal{A}$ l'est.

$b)$ L'exemple de catégorie monoïdale K-linéaire non strictement semi-primaire vu plus haut (contre-exemple 3.1.4) fournit, en caractéristique nulle, un exemple d'application du théorème ci-dessus (le foncteur ω étant induit par $x \mapsto K$ pour tout $x \in E$).

Dans cet exemple, la catégorie tannakienne $\bar{\mathcal{A}}$ n'est autre que la catégorie des représentations du groupe diagonalisable de groupe de caractères E.

$c)$ L'exemple 10.1.3 montre que le théorème de scindage monoïdal symétrique ne s'étend pas, en remplaçant $\mathcal{R}$ par $\mathcal{N}$, au cas où le radical $\mathcal{R}$ n'est pas monoïdal. Dans cet exemple, $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ est équivalente à la catégorie des super-espaces vectoriels de dimension finie, qui n'est pas tannakienne (on a un objet de carré tensoriel isomorphe à **1**, mais de dimension $\neq 1$).

$d)$ Dans [1] nous déduisons de ce théorème, indépendamment de toute conjecture, un *groupe de Galois motivique pro-réductif* attaché à toute cohomologie de Weil "classique" définie sur les variétés projectives lisses sur un corps quelconque.

18.2. **Le cas tannakien neutralisé.** Ce sous-paragraphe est préparatoire au paragraphe 19.

On suppose encore K de caractéristique 0. Soient G un K-schéma en groupes affine (en bref : un K-groupe affine) et $\mathcal{A} = Rep_K(G)$ la catégorie des K-représentations de dimension finie de G. On note π_G au lieu de $\pi_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{R}_G$ le radical de $\mathcal{A}$, et ω_G le foncteur fibre canonique de $\mathcal{A}$ (à valeurs dans Vec_K).

Le lemme suivant est fort utile :

18.2.1**. Lemme.** *Soient $\mathcal{B}$ une (petite) catégorie K-linéaire monoïdale symétrique et $f : \mathcal{B} \to Rep_K(G)$ un foncteur monoïdal. Pour toute K-algèbre commutative R, notons f^R (resp. ω^R) le foncteur monoïdal f (resp. ω) composé avec*

$$Vec_K \to R - Modf \quad (\textit{resp.} \quad Rep_K(G) \to Rep_R(G)).$$

Notons $\underline{Aut}^{\otimes} f$ (resp. $\underline{Aut}^{\otimes}(\omega \circ f)$) le faisceau fpqc associé au foncteur $R \mapsto Aut^{\otimes} f^R$ (resp. $R \mapsto Aut^{\otimes}(\omega^R \circ f)$). Alors
1) $\underline{Aut}^{\otimes}(\omega \circ f)$ est représentable par un K-schéma en groupes affine,
2) $\underline{Aut}^{\otimes}(f)$ est représentable par le centralisateur de l'image de $G \xrightarrow{\sim} \underline{Aut}^{\otimes}(\omega)$ dans $\underline{Aut}^{\otimes}(\omega \circ f)$,
3) l'homomorphisme

$$\underline{Aut}^{\otimes}(f) \to \underline{Aut}^{\otimes}(\omega \circ f)$$
$$(u^R) \mapsto (\omega^R(u))$$

(vu comme homomorphisme de groupes affines) est un monomorphisme, i.e. une immersion fermée.

Démonstration. 1) $\underline{Aut}^{\otimes}(\omega \circ f)$ est représentable par le sous-schéma en groupes fermé de $\mathbf{G} := \prod_{B \in \mathcal{B}} GL(\omega \circ f(B))$ qui fixe ceux des morphismes de $Rep_K \mathbf{G}$ qui sont de la forme $\omega \circ f(u)$, où u est un morphisme de $\mathcal{B}$.
2) Il est clair que l'image de $\underline{Aut}^{\otimes}(f)$ dans $\underline{Aut}^{\otimes}(\omega \circ f)$ centralise $\underline{Aut}^{\otimes}(\omega)$. Inversement, soit $v \in \underline{Aut}^{\otimes}(\omega \circ f)(R)$ centralisant l'image de $\underline{Aut}^{\otimes}(\omega)(R')$ pour toute extension R'/R. Pour tout $B \in \mathcal{B}$ et tout $g \in G(R')$, l'élément $v_B \in End_{R'}(\omega^{R'}(f(B)))$ commute à g_B. Il lui correspond donc un unique élément $u_B \in \mathcal{A}(f^R(B), f^R(B))$ tel que $\omega^R(u_B) = v_B$. La fidélité de ω^R implique de plus que u_B est inversible et monoïdal. Cela montre que $\underline{Aut}^{\otimes}(\omega \circ f)$ est le centralisateur de l'image de $\underline{Aut}^{\otimes}(\omega)$ dans $\underline{Aut}^{\otimes}(\omega \circ f)$, donc représentable.
3) découle de ce que les ω^R sont fidèles. $\square$

Choisissons une section monoïdale s de $\pi_{\mathcal{A}}$, et posons comme ci-dessus $\omega_s = \omega_G \circ s$. Soit $G_s = \underline{Aut}^{\otimes}(\omega_s)$: c'est un K-groupe pro-réductif. On a un homomorphisme évident :

$$s^\sharp : G \xrightarrow{\sim} \underline{Aut}^{\otimes}(\omega_G) \to \underline{Aut}^{\otimes}(\omega_s) = G_s$$

d'où un foncteur monoïdal

$$(s^\sharp)^* : Rep_K(G_s) \to Rep_K(G).$$

18.2.2**. Lemme.** *L'homomorphisme $s^\sharp$ est un monomorphisme (i.e. une immersion fermée).*

Démonstration. Soit $N = \operatorname{Ker} s^\sharp$. On a un diagramme commutatif de catégories et foncteurs :

$$\begin{tikzcd} Rep_K(G/N) \arrow[rr, "g^*"] & & Rep_K(G) \\ & Rep_K(G_s) \arrow[ul] \arrow[ur, "(s^\sharp)^*"'] & \end{tikzcd}$$

Le foncteur g^* est pleinement fidèle. Comme $(s^\sharp)^*$ est évidemment essentiellement surjectif, il en est de même de g^*, qui est donc une équivalence de catégories, d'où $N = 1$. $\square$

18.2.3**. Remarque.** Le foncteur

$$\begin{aligned} \theta_s : \bar{\mathcal{A}} &\to Rep_K(G_s) \\ X &\mapsto (G_s \to GL(\omega_s(X))) \end{aligned}$$

est une équivalence de catégories monoïdales, mais pas en général un isomorphisme de catégories. Il possède néanmoins un quasi-inverse canonique. On a un diagramme strictement commutatif de catégories et foncteurs :

$$\begin{tikzcd} Rep_K(G) \arrow[r, "\omega_G"] & Vec_K \\ \bar{\mathcal{A}} \arrow[u, "s"] \arrow[ur, "\omega_s"] \arrow[r, "\theta_s"] & Rep_K(G_s) \arrow[u, "\omega_{G_s}"'] \end{tikzcd}$$

On a évidemment $(s^\sharp)^* \circ \theta_s = s$. En particulier, $\sigma_s := \pi_G \circ (s^\sharp)^*$ est un inverse à gauche de θ_s ; c'en est donc aussi un quasi-inverse à droite, par un isomorphisme naturel monoïdal.

Si t est une autre section monoïdale de π_G, elle définit un autre foncteur fibre, donc un autre groupe G_t. D'après la théorie générale des catégories tannakiennes, G_s et G_t sont des formes intérieures l'un de l'autre. On a mieux, puisque t est monoïdalement conjuguée à s. En effet, choisissons une telle conjugaison u, de sorte que $t = usu^{-1}$. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & G_s \arrow[dd, "\hat{u}"', "\wr"] \\ G \arrow[ur, "s^\sharp"] \arrow[dr, "t^\sharp"'] & \\ & G_t \end{tikzcd} \tag{18.1}$$

où $\hat{u} : \underline{Aut}^{\otimes}(\omega_s)(R) \to \underline{Aut}^{\otimes}(\omega_t)(R)$ est donné par $g \mapsto ugu^{-1}$ pour toute K-algèbre R. Cette construction donne :

18.2.4. **Proposition.** *On a un foncteur canonique T_G du groupoïde connexe $\mathcal{G}_u^{\otimes}(G)$ des sections monoïdales de π_G vers la catégorie des monomorphismes de G vers un groupe pro-réductif, qui associe à la section s le monomorphisme $G \hookrightarrow G_s$. En particulier, pour deux sections monoïdales s, t, les groupes G_s et G_t sont K-isomorphes.* □

18.2.5. Éclairons et complétons cette construction à l'aide des résultats du paragraphe 14. Notons $\Gamma_u(G) = (E_u, S_u)$ le groupoïde affine scindé unipotent transitif sur $S^{\otimes}$ associé à $\mathcal{A} = Rep_K(G)$ par le théorème 14.3.3 : on a $\Gamma_u(G)(K) = \mathcal{G}^{\otimes}(G)$. Par ailleurs, la catégorie tannakienne $\bar{\mathcal{A}}$ étant neutre, sa gerbe est représentée par un K-groupoïde affine que nous noterons $\Gamma_{\mathrm{red}}(G)$: la catégorie $\Gamma_{\mathrm{red}}(G)(K)$ est le groupoïde des K-foncteurs fibres sur $\bar{\mathcal{A}}$. Considérons G comme groupoïde à un objet. On a alors un (bi)morphisme de K-groupoïdes affines

$$\Gamma_u(G) \times_K G \to \Gamma_{\mathrm{red}}(G)$$

qui au niveau des R-points est décrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \underline{Hom}^{\otimes}(s,t)(R) \times \underline{Aut}^{\otimes}(\omega)(R) &\to \underline{Hom}^{\otimes}(\omega_s, \omega_t)(R) \\ (s, *) &\mapsto \omega_s = \omega \circ s. \end{aligned}$$

Si l'on fixe une section (K-rationnelle) s, on obtient en particulier un monomorphisme de K-schémas en groupes affines

$$U_s = U_s(G) := E_u(s,s) \hookrightarrow G_s$$

avec U_s pro-unipotent, où U_s *centralise* G. Le diagramme (18.1) se complète en un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U_s \times_K G & \longrightarrow & G_s \\ {\scriptstyle \hat{u}\times 1}\big\downarrow{\scriptstyle \wr} & & {\scriptstyle \hat{u}}\big\downarrow{\scriptstyle \wr} \\ U_t \times_K G & \longrightarrow & G_t. \end{array}$$

18.2.6. **Proposition.** *Pour tout épimorphisme $\varphi : G_s \twoheadrightarrow H$, le centralisateur de $\varphi \circ s^\sharp(G)$ dans H est égal au produit $\varphi(U_s) \times Z(H)$.*

[Noter que ce produit est direct, puisque l'intersection de $\varphi(U_s)$ et de $Z(H)$ est un groupe unipotent de type multiplicatif.]

Démonstration. Par souci de clarté, notons plus précisément $\omega = \omega_G$. Considérons le foncteur $f = (s^\sharp)^* \circ \varphi^* : Rep_K(H) \to Rep_K(G)$: on remarque que $\omega_G \circ f = \omega_H$. Appliquons le lemme 18.2.1 : on obtient que l'homomorphisme $\underline{Aut}^\otimes(f) \to \underline{Aut}^\otimes(\omega_H) = H$ est injectif, d'image le centralisateur de l'image de $\underline{Aut}^\otimes(\omega_G) = G$ dans H. Il reste à calculer $\underline{Aut}^\otimes(f)$, que nous identifions ci-dessous à un sous-groupe de H.

Soit $h \in \underline{Aut}^\otimes(f)(R)$, où R est une K-algèbre commutative (on peut d'ailleurs se limiter qu cas d'un corps, et même d'une extension algébrique de K, puisque K est de caractéristique nulle). Alors $\pi_G(h) \in \underline{Aut}^\otimes(\pi_G \circ (s^\sharp)^* \circ \varphi^*)(R)$. Comme les foncteurs $\pi_G \circ (s^\sharp)^*$ et φ^* sont pleinement fidèles, leur composé l'est aussi et $\underline{Aut}^\otimes(\pi_G \circ (s^\sharp)^* \circ \varphi^*)(R)$ s'identifie canoniquement à $\underline{Aut}^\otimes(Id_{Rep_K(H)})(R) = Z(H)(R))$. Autrement dit, il existe un unique $z \in Z(H)(R)$ tel que $\pi_G(h) = \pi_G(z)$. Alors $u = h \cdot z^{-1}$ vérifie $\pi_G(u) = 1$; autrement dit, $u \in \varphi(U_s(R))$. D'où l'assertion. $\square$

18.2.7**. Proposition.** *a) Pour toute section s comme ci-dessus, tout homomorphisme φ de G vers un groupe pro-réductif H se prolonge en un homomorphisme $\psi : G_s \to H$.*

Démonstration. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& Rep_K(G) \arrow[r, "\omega_G"] \arrow[d, "\pi_G"'] & Vec_K \\
Rep_K(H) \arrow[ur, "\varphi^*"] \arrow[r, "\bar{\varphi}^*"] & Rep_K(G)/\mathcal{R}_G &
\end{tikzcd}$$

où par souci de clarté on note ω_G le foncteur fibre canonique de $Rep_K(G)$. On a $\omega_H = \omega_G \circ \varphi^*$.

Remarquons que $\bar{\varphi}^*$ est exact, puisque la catégorie $Rep_K(H)$ est semi-simple. Il est aussi fidèle : si $A \in Rep_K(H)$, le noyau de l'homomorphisme induit par $\bar{\varphi}^*$ de l'anneau R des endomorphismes de A vers l'anneau des endomorphismes de $\bar{\varphi}^*(A)$ est l'image réciproque dans R du radical de l'anneau des endomorphismes de $\varphi^*(A)$; cette image réciproque est nulle, comme idéal nilpotent d'une algèbre semi-simple. Donc $\omega_G \circ s \circ \bar{\varphi}^*$ est un foncteur fibre sur $Rep_K(H)$.

Le foncteur $\bar{\varphi}^*$ induit un homomorphisme

$$(\bar{\varphi}^*)^\sharp : G_s \to H'$$

avec $H' := \underline{Aut}^\otimes(\omega_G \circ s \circ \bar{\varphi}^*)$.

Appliquons la proposition 13.7.1, en remarquant que $Rep_K(H)$ est semi-simple (et même séparable) : il existe un isomorphisme naturel monoïdal $u : \varphi^* \Rightarrow s \circ \bar{\varphi}^*$, d'où un isomorphisme

$$H \xrightarrow{\sim} \underline{Aut}^\otimes(\omega_G \circ \varphi^*) \xrightarrow{\widehat{\omega_G(u)}} H'$$

faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "s^\sharp"'] & H \arrow[d, "\wr", "\widehat{\omega_G(u)}"'] \\ G_s \arrow[r, "(\bar\varphi^*)^\sharp"] & H'. \end{tikzcd}$$

D'où la proposition. □

18.2.8**. Lemme.** *Soient $f, g \in Hom(G, H)$, où G et H sont deux K-groupes affines. Alors f et g sont conjugués par un élément de $H(K)$ si et seulement s'il existe un isomorphisme naturel monoïdal $f^* \overset{\otimes}{\simeq} g^*$ au niveau des catégories de représentations.*

Démonstration. Soit θ un tel isomorphisme. Alors θ induit un isomorphisme $\omega_H = \omega_G \circ f^* \overset{\otimes}{\simeq} \omega_G \circ g^* = \omega_H$. Un tel isomorphisme correspond à un élément $h \in H(K)$. Cet élément conjugue f et g. □

18.2.9**. Proposition.** *Soient G un K-groupe affine s, t deux sections monoïdales de π_G, G_s et G_t les K-groupes réductifs attachés s et t, u un isomorphisme monoïdal de s sur t et $\hat u : G_s \xrightarrow{\sim} G_t$ l'isomorphisme correspondant (cf.* (18.1)*). Soient enfin H un autre K-groupe affine H et $f : G_s \to H$, $g : G_t \to H$ deux homomorphismes.*
Supposons que $f \circ s^\sharp$ et $g \circ t^\sharp$ soient conjugués par un élément de $H(K)$. Alors il en est de même de f et $g \circ \hat u$.

Démonstration. On se ramène immédiatement au cas où $s = t$, puis au cas où $f \circ s^\sharp = g \circ s^\sharp$. On a, au niveau des catégories de représentations, une égalité de foncteurs :

$$(s^\sharp)^* \circ f^* = (s^\sharp)^* \circ g^*$$

d'où, en composant à gauche avec π_G :

$$\sigma_s \circ f^* = \sigma_s \circ g^*$$

(*cf.* remarque 18.2.3).

Comme σ_s est un quasi-inverse monoïdal de θ_s (ibid.), on en déduit l'existence d'un isomorphisme naturel $f^* \overset{\otimes}{\simeq} g^*$. On conclut par le lemme 18.2.8. □

18.2.10**. Scolie.** *Avec les notations de 10.2, on a*

$$HH_0(Rep_K(G)) \cong R_K(G_s) \otimes_{\mathbf{Z}} K.$$

Démonstration. On a vu dans 10.2 que $HH_0(\mathcal{A}) = HH_0(\bar{\mathcal{A}})$, d'où $HH_0(\mathcal{A}) \cong HH_0(Rep_K(G_s))$ d'après ce qui précède, et d'autre part et dans l'exemple 10.2.1 que $HH_0(Rep_K(G_s)) \cong R_K(G_s) \otimes_{\mathbf{Z}} K$. □

19. Au-delà de Jacobson-Morozov : enveloppes pro-réductives

Dans toute ce paragraphe, K *est un corps de caractéristique* 0 sauf mention expresse du contraire.

Soit $\mathfrak{g}$ une K-algèbre de Lie semi-simple. Le théorème de Jacobson-Morozov-Kostant ([24], [39], [33], [7, p. 162, prop. 2 et 4]) énonce que tout élément nilpotent non nul de $\mathfrak{g}$ est contenu dans un $\mathfrak{sl}_2$-triplet de $\mathfrak{g}$ et que les orbites de ces deux types d'objets sous l'action adjointe du groupe adjoint G de $\mathfrak{g}$ sont en bijection. En termes de groupes algébriques, cet énoncé se traduit ainsi : étant donné un K-groupe algébrique semi-simple G, tout homomorphisme non trivial $\mathbb{G}_a \to G$ se prolonge en un homomorphisme $SL_2 \to G$ couvrant l'injection canonique

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{G}_a &\to SL_2 \\ a &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \end{aligned} \tag{19.1}$$

De plus, deux tels prolongements sont conjugués sous l'action d'un élément de $G(K)$.

Nous allons retrouver ce résultat en appliquant le théorème 18.1.1 à la catégorie tannakienne neutralisée des K-représentations de $\mathbb{G}_a$, et explorer ce qui joue le rôle de SL_2 lorsque $\mathbb{G}_a$ est remplacé par un K-groupe affine quelconque, dans le fil des résultats du paragraphe précédent.

19.1. **Groupes à conjugaison près.** Soit Gaff_K la catégorie dont les objets sont les K-groupes affines et les morphismes sont les homomorphismes de K-groupes affines. Notons Gred_K la sous-catégorie pleine de Gaff_K formée des groupes pro-réductifs. Ces catégories ne sont pas bien adaptées à l'interprétation des résultats du paragraphe précédent : nous devons les remplacer par des catégories plus grossières.

19.1.1**. Définition.** a) Soient G, H deux K-groupes affines. On note $H^1_K(G,H)$ l'ensemble quotient de $Hom_K(G,H)$ par la relation d'équivalence $\sim$ telle que $f \sim g$ s'il existe $h \in H(K)$ tel que $g = hfh^{-1}$ (on dit aussi que f et g sont $H(K)$-*conjugués*).
b) On note $\overline{\mathrm{Gaff}}_K$ la catégorie dont les objets sont les K-groupes affines et dont les morphismes sont donnés par les ensembles $H^1_K(G,H)$ (ces morphismes se composant de manière évidente) : c'est la catégorie des K-*groupes affines à conjugaison près*. Sa sous-catégorie pleine formée des K-groupes pro-réductifs est notée $\overline{\mathrm{Gred}}(K)$ et s'appelle catégorie des K-*groupes pro-réductifs à conjugaison près*.

19.1.2**. Remarques.**

a) Notons Aff_K la catégorie des K-schémas affines. On a un diagramme commutatif
$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Gred}_K & \xrightarrow{\iota} & \mathrm{Gaff}_K & \longrightarrow & \mathrm{Aff}_K \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \overline{\mathrm{Gred}}_K & \xrightarrow{\bar\iota} & \overline{\mathrm{Gaff}}_K & & \end{array}$$
où les foncteurs horizontaux sont pleinement fidèles et les foncteurs verticaux sont pleins et surjectifs.

b) Un certain nombre de notions “passent” aux groupes à conjugaison près (via les foncteurs de projection ci-dessus) : immersions fermées, morphismes fidèlement plats, connexité, simple connexité, (pro-)unipotence, (pro)-semi-simplicité. . .

c) La notion de sous-groupe n'a pas de sens dans $\overline{\mathrm{Gaff}}(K)$ et $\overline{\mathrm{Gred}}(K)$: elle doit être remplacée par celle de classe de conjugaison de sous-groupes. Par contre, la notion de sous-groupe distingué a un sens. De même, si H est un sous-groupe fermé (à conjugaison près) de G, le sous-groupe (distingué)

$$H^{\triangleleft} = \{\langle gHg^{-1}\rangle \mid g \in G(K)\} \tag{19.2}$$

a un sens.

d) On a un foncteur fidèle évident

$$\overline{\mathrm{Gaff}}(K) \to Lien(K)$$

où $Lien(K)$ désigne la catégorie des *liens sur* K [18, II.2.1.3]. Mais ce foncteur n'est pas plein si K n'est pas algébriquement clos.

19.2. **Exactitude.** Peu de limites inductives existent dans Gaff_K et dans $\overline{\mathrm{Gaff}}_K$. Il faut aussi prendre garde à ce que les limites inductives calculées dans Gaff_K, Aff_K et $\overline{\mathrm{Gaff}}_K$, quand elles existent, ne coïncident pas nécessairement.

Une limite inductive qui existe toujours dans Gaff_K est le coégalisateur d'un homomorphisme $f : G \to H$ et de l'homomorphisme trivial $1 : G \to H$: ce coégalisateur existe aussi dans $\overline{\mathrm{Gaff}}_K$ et coïncide avec le précédent. Dire que ce coégalisateur est trivial est plus faible que de dire que f est un épimorphisme. Nous adopterons la terminologie suivante :

19.2.1**. Définition.** a) Soient $f : G_1 \to G_2$ et $g : G_2 \to G_3$ deux morphismes de K-groupes affines tels que $g \circ f = 1$. On dit que la suite

$$G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3 \tag{19.3}$$

est *exacte* (*resp. faiblement exacte*) si $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f$ (*resp.* si $\mathrm{Ker}\, g = (\mathrm{Im}\, f)^{\triangleleft}$, *cf.* (19.2)).
b) Si $G_3 = 1$ dans a), on dit que f est *épi* (*resp. faiblement épi*) si la suite (19.3) est exacte (*resp.* faiblement exacte).

On remarquera que, dans b), dire que f est épi équivaut à dire que le morphisme associé de faisceaux fpqc d'ensembles est un épimorphisme, ou encore que f est fidèlement plat.

19.2.2**. Lemme.** *a) Un morphisme $f : G_1 \to G_2$ de K-groupes affines est faiblement épi si et seulement si, pour tout K-groupe affine N, l'application d'ensembles pointés $f^* : H^1_K(G_2, N) \to H^1_K(G_1, N)$ est de noyau trivial. Si $G_1, G_2 \in \mathrm{Gred}_K$, il suffit de prendre N dans Gred_K.*
b) Une suite

$$G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3 \longrightarrow 1$$

de K-groupes affines (avec $g \circ f = 1$) est faiblement exacte si et seulement si, pour tout K-groupe affine N, la suite d'ensembles pointés

$$1 \to H^1_K(G_3, N) \xrightarrow{g^*} H^1_K(G_2, N) \xrightarrow{f^*} H^1_K(G_1, N)$$

est exacte). Si $G_1, G_2, G_3 \in \mathrm{Gred}_K$, il suffit de prendre N dans Gred_K.
c) L'exactitude faible d'une suite comme dans b) ne dépend que des classes de f et g dans $\overline{\mathrm{Gaff}}_K$. □

Démonstration. $c)$ est immédiat.

$a)$: $G_1 \xrightarrow{f} G_2$ est faiblement épi $\iff$ $f(G_1)^{\triangleleft} = G_2$ $\iff$ $[\forall\, G_2 \xrightarrow{h} N$ (avec N pro-réductif si G_2 l'est), $h \circ f = 1 \Longrightarrow h = 1]$ $\iff$ $(\forall \bar{h} \in H^1_K(G_2, N), f^*\bar{h} = 1 \Longrightarrow \bar{h} = 1)$.

$b)$: Compte tenu de $a)$, nous n'avons à examiner que l'exactitude au milieu. Or $G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3$ est faiblement exacte $\iff$ $f(G_1)^{\triangleleft} = \ker g$ $\iff$ $[\forall\, G_2 \xrightarrow{h} N$ (avec N pro-réductif si G_2 l'est), $h_{|f(G_1)^{\triangleleft}} = 1 \Longrightarrow h_{|\ker g} = 1]$ $\iff$ $[\forall G_2 \xrightarrow{h} N,\ h_{|f(G_1)^{\triangleleft}} = 1 \Longrightarrow \exists\, G_3 \xrightarrow{i} N$ tel que $h = i \circ g)]$ $\iff$ $[\forall\, \bar{h} \in H^1_K(G_2, N), f^*\bar{h} = 1 \Longrightarrow \exists\, \bar{\imath} \in H^1_K(G_3, N)$, tel que $\bar{h} = g^*\bar{\imath}]$.

□

Nous nous autoriserons de ce lemme pour parler de suites faiblement exactes dans $\overline{\mathrm{Gaff}}_K$.

19.3. **L'enveloppe pro-réductive.**

19.3.1**. Théorème.** *Le foncteur d'inclusion $\bar{\iota} : \overline{\mathrm{Gred}}_K \to \overline{\mathrm{Gaff}}_K$ admet un adjoint à gauche $G \mapsto {}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$. Ce foncteur est un quasi-inverse à gauche de $\bar{\iota}$.*

Démonstration. Pour chaque $G \in \overline{\mathrm{Gaff}}_K$, choisissons une section monoïdale $s(G) \in \mathcal{G}^{\otimes}_u(G)$. On définit ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ comme étant $G_{s(G)}$. Soit $f : G \to H$ un homomorphisme. En appliquant la proposition 18.2.7 à G et $\varphi = s(H)^\sharp \circ f : G \to H_{s(H)}$, on obtient un homomorphisme $\bar{\varphi} : G_{s(G)} \to H_{s(H)}$. La proposition 18.2.9 montre que son image dans $H^1_K({}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G), {}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(H))$ ne dépend pas du choix de $\bar{\varphi}$: c'est ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(f)$. La proposition 18.2.9 montre aussi que ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}$ est un foncteur. Les plongements $G \to G_{s(G)}$ définissent un morphisme de foncteurs $Id_{\overline{\mathrm{Gaff}}_K} \to \bar{\iota} \circ {}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}$. Le fait que ce morphisme fasse de ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}$ un adjoint à gauche de $\bar{\iota}$ résulte de la construction précédente et des propositions 18.2.7 et 18.2.9. Enfin, le fait que ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red} \circ \bar{\iota} \simeq Id$ est évident. □

19.3.2**. Définition.** Le K-groupe à conjugaison près ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ (muni de l'injection canonique $G \hookrightarrow {}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$) s'appelle *l'enveloppe pro-réductive de G*.

Son sous-groupe ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{U}(G)$ (donné par le sous-groupe unipotent U_s défini juste avant la prop. 18.2.6) s'appelle le *complément unipotent* de G.

19.3.3**. Remarques.** a) Si $f : G \to H$ est un morphisme, nous ignorons si ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(f)({}^{\mathrm{p}}\mathrm{U}(G)) \subset {}^{\mathrm{p}}\mathrm{U}(H)$ en général. C'est vrai si le foncteur $f^* : Rep_K(H) \to Rep_K(G)$ est pleinement fidèle, en vertu du début du §14.1.2 (en particulier si

f est un épimorphisme, mais aussi dans le cas d'un sous-groupe parabolique d'un groupe connexe, voir la démonstration de la proposition 19.4.7 b)). On pourrait aussi le déduire de la proposition 18.2.6. Dans ce cas, nous ignorons si le morphisme correspondant est épi.
b) Le théorème montre que l'homomorphisme $\Lambda_G : G \to {}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ est la limite projective des morphismes $G \to H$ (dans $\overline{\mathrm{Gaff}}_K$), avec $H \in \overline{\mathrm{Gred}}_K$ (de type fini si l'on veut). En revanche, on ne pourrait pas construire ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ par une telle limite projective dans Gaff_K au lieu de $\overline{\mathrm{Gaff}}_K$.
Par exemple, si $G = \mathbb{G}_a$, on verra plus loin que ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G) \cong SL_2$. Considérons la limite du système projectif des groupes SL_2, avec pour morphismes de transition les isomorphismes donnés par les éléments de $PGL_2(K)$: cette limite vaut SL_2 dans $\overline{\mathrm{Gred}}_K$, mais dans Gred_K, elle est réduite au centre $\{\pm 1\}$ de SL_2.

19.3.4. **Proposition.** *Supposons K algébriquement clos. À isomorphisme unique près dans $\overline{\mathrm{Gaff}}(K)$, l'homomorphisme $\Lambda_G : G \to {}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ est caractérisé par les deux propriétés suivantes :*

(i) ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ *est pro-réductif ;*

(ii) Λ_G *induit une bijection entre les classes d'isomorphismes de représentations indécomposables de G et de ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$.*

Démonstration. Il est clair que Λ_G a les propriétés annoncées. Pour la réciproque, la propriété universelle de ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ nous ramène à démontrer l'énoncé suivant : si $f : H \to M$ est un homomorphisme de groupes pro-réductifs qui induit une bijection sur les classes d'isomorphismes de représentations irréductibles, alors f est un isomorphisme.

En effet, les catégories $Rep_K(H)$ et $Rep_K(M)$ sont semi-simples. L'hypothèse implique que le foncteur $f^* : Rep_K(M) \to Rep_K(H)$ est essentiellement surjectif. D'autre part, pour deux M-représentations irréductibles S, S', l'application $Hom_M(S, S') \to Hom_H(S, S')$ est bijective : si S et S' ne sont pas isomorphes, les deux membres sont nuls, et si $S = S'$ on a $End_M(S) = End_H(S) = K$ (c'est ici qu'on utilise l'hypothèse que K est algébriquement clos). Par conséquent, f^* est pleinement fidèle, donc c'est une équivalence de catégories et f est bien un isomorphisme. □

19.3.5. **Remarque.** Nous ignorons si l'hypothèse que K est algébriquement clos est nécessaire dans la proposition 19.3.4.

19.4. Quelques propriétés de l'enveloppe pro-réductive.

19.4.1. **Lemme.** *Si G est connexe, ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ est connexe.*

Soit $(G_s)^0$ la composante neutre de G_s, et soit $\Gamma = G_s/(G_s)^0$: $(G_s)^0$ est pro-réductif connexe et Γ est un groupe profini (de dimension 0). Comme G est connexe, $Hom(G, \Gamma) = 1$; la proposition 18.2.9 implique alors que $Hom(G_s, \Gamma) = 1$. Donc $\Gamma = 1$. □

19.4.2. **Proposition.** *Si G est pro-unipotent, ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ est pro-semi-simple simplement connexe.*

Démonstration. D'après le lemme 19.4.1, G_s est connexe. Pour montrer qu'il est semi-simple, on raisonne de même : soit G'_s son groupe dérivé. Alors $\Gamma = G_s/G'_s$ est un pro-tore. Comme G est pro-unipotent, $Hom(G,\Gamma) = 1$; la proposition 18.2.9 implique alors que $Hom(G_s,\Gamma) = 1$. Donc $\Gamma = 1$.

Enfin, soit H un groupe pro-semi-simple connexe quelconque, et soit $\tilde{H}$ son revêtement universel. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^1_K(G_s,\tilde{H}) & \longrightarrow & H^1_K(G,\tilde{H}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1_K(G_s,H) & \longrightarrow & H^1_K(G,H). \end{array}$$

Les propositions 18.2.7 et 18.2.9 montrent que les flèches horizontales sont des isomorphismes. Comme G est unipotent, il en est de même de la flèche verticale de droite. On en déduit que la flèche verticale de gauche est un isomorphisme pour tout H. En appliquant ceci à $H = G_s$, cela implique que la projection $\tilde{H} \to H$ admet une section à conjugaison près. Mais ceci n'est possible que si H est pro-simplement connexe. □

19.4.3**. Contre-exemple.** On pourrait se demander si ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(U)$ est même *déployé*. Le contre-exemple suivant, pour $U \simeq \mathbb{G}_a^4$, nous a été aimablement fourni par Ulf Rehmann. Soit D une algèbre de quaternions sur K. Le groupe $G = SL_{2,D}$ contient U (avec $U(R) = R \otimes_K D$ pour toute K-algèbre commutative R) comme sous-groupe triangulaire supérieur strict. Si ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(U)$ était déployé, son image H dans G le serait également. Mais un tore maximal de G est donné par un tore maximal du sous-groupe diagonal formé des éléments $(x,y) \in D^* \times D^*$ tels que $Nrd(x)Nrd(y) = 1$; de ceci on déduit facilement que le rang d'un tore déployé contenu dans G est ≤ 1. Ainsi H serait de rang ≤ 1 ; mais alors il ne peut pas contenir U.

Par contre, un groupe semi-simple anisotrope ne peut pas être un quotient de ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(U)$, *cf.* [37, 1.5.3].

19.4.4**. Proposition.** *a) Soit $G_2 \to G_1$ un morphisme faiblement épi de K-schémas en groupes affines. Alors le morphisme ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G_2) \to {}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G_1)$ correspondant est faiblement épi.*
b) Soit $G_3 \to G_2 \to G_1 \to 1$ une suite faiblement exacte de K-schémas en groupes affines. Alors on a un diagramme commutatif de suites faiblement exactes dans $\overline{\mathrm{Gaff}}_K$:

$$\begin{array}{ccccccc} G_3 & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ {}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G_3) & \longrightarrow & {}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G_2) & \longrightarrow & {}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G_1) & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

Démonstration. Cela résulte immédiatement du théorème 19.3.1 et du lemme 19.2.2 (comme un adjoint à gauche commute aux limites inductives quelconques, le théorème 19.3.1 fournit des propriétés d'exactitude du foncteur ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}$). □

19.4.5**. Corollaire.** *Si U est le radical unipotent de G et si $G^{\mathrm{red}} = G/U$, on a une suite faiblement exacte*

$$^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(U) \to {}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G) \to G^{\mathrm{red}} \to 1.$$

□

Voici quelques résultats structurels supplémentaires sur $^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$:

19.4.6**. Lemme.** *Soit $f : G \to H$ un homomorphisme de K-groupes affines. Supposons que le foncteur f^* associé soit pleinement fidèle. Alors*

(i) $^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(f)$ *est épi.*

(ii) $^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(f)$ *est un isomorphisme si et seulement si f est un isomorphisme.*

Démonstration. (i) Si f^* est pleinement fidèle, $\bar{f}^*$ l'est aussi ; comme c'est un foncteur entre catégories semi-simples, le foncteur associé sur les K-goupes affines est bien épi.

(ii) f est un isomorphisme $\iff$ f^* est une équivalence de catégories $\iff$ f^* est essentiellement surjectif ; de même pour $^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(f)$ et $\bar{f}^*$. Si f^* est essentiellement surjectif, il en est évidemment de même de $\bar{f}^*$. La réciproque est vraie puisque le foncteur de projection π_G est plein et conservatif. □

19.4.7**. Proposition.** *a) Pour tout G algébrique, on a une suite exacte*

$$1 \to {}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G^0)^{\triangleleft} \to {}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G) \to G/G^0 \to 1$$

où G^0 est la composante neutre de G.
b) Si G est connexe, soit P un K-sous-groupe parabolique de G. Alors $^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(P) \to {}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ est épi.
c) Si $G \to H$ est épi, $^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G) \to {}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(H)$ est épi.

Démonstration. a) Écrivons $G = \varprojlim G_i$, où les $G_i = G/N_i$ sont de dimension finie : alors, pour tout i, G_i^0 est l'image de G^0 dans G_i. Comme le système des G_i^0 est de Mittag-Leffler, on a un diagramme commutatif de suites exactes courtes :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & G^0 \arrow[r] \arrow[d, "A"'] & G \arrow[r] \arrow[d] & G/G^0 \arrow[r] \arrow[d, "B"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & \varprojlim G_i^0 \arrow[r] & \varprojlim G_i \arrow[r] & \varprojlim G_i/G_i^0 \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Comme $\mathrm{Ker}\, B$ est profini et que $\mathrm{Coker}\, A$ est connexe, ce diagramme montre que A et B sont des isomorphismes. En particulier, on a $G^0 = \varprojlim G^0/(G^0 \cap N_i)$, et $N_i^0 := G^0 \cap N_i$ est de codimension finie dans G^0 et distingué dans G.

Soit maintenant $\rho : G^0 \to GL(V)$ une représentation de G^0 (de dimension finie) : nous allons montrer qu'elle est isomorphe à un facteur direct d'une représentation W provenant de G. Ceci impliquera que $^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G^0) \to {}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ est un monomorphisme, d'où l'énoncé en appliquant la proposition 19.4.4 et le lemme 19.4.6.

Notons $U = \operatorname{Ker}\rho$: alors U est de codimension finie dans G^0, et d'après ce qui précède il existe $V \subset G^0$, de codimension finie et distingué dans G. Notons $\Gamma^0 = G^0/V$, de sorte qu'on a une suite exacte

$$1 \to \Gamma^0 \to G/V \to G/G^0 \to 1.$$

Il existe un quotient fini Δ de G/G^0 tel que G/V soit l'image réciproque d'une extension Γ de Δ par Γ^0. Ainsi, on s'est ramené au cas où G est algébrique. Dans ce cas, il suffit de prendre pour W la restriction à G^0 de $Ind_{G^0}^G V$.

b) Grâce au lemme 19.4.6 (i), il suffit de prouver que le foncteur $Rep_K(G) \to Rep_K(P)$ est pleinement fidèle. Soient V, W deux représentations de G. Le groupe G opère sur l'espace affine $Hom(V, W)$ via un de ses quotients algébriques Γ. Soit $\bar{P}$ l'image de P dans Γ : c'est un sous-groupe parabolique de Γ. Comme $\Gamma/\bar{P}$ est propre et connexe, il en résulte que $Hom_G(V, W) \to Hom_P(V, W)$ est surjectif.[24]

c) Cela résulte encore du lemme 19.4.6 (i). □

19.4.8**. Corollaire.** *Pour tout K-groupe affine G, on a* ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G^0) = ({}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)^0)^{\triangleleft}$.

Démonstration. En effet, d'après le lemme 19.4.1, ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G^0)$ est connexe, donc aussi $({}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)^0)^{\triangleleft}$. □

Enfin, on a le résultat suivant.

19.4.9**. Proposition.** *Pour tout K-groupe G et tout K-groupe pro-réductif H, on a* ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G \times H) = {}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G) \times H$.

Démonstration. On peut raisonner dans $\overline{\mathrm{Gaff}}(K)$. Soit M une représentation de

$G \times H$. Comme H est réductif, la restriction de M à H est semi-simple, donc l'algèbre $End_H(M)$ est semi-simple et $Aut_H(M) = End_H(M)^*$ est le groupe des K-points d'un groupe réductif H' ; on a un homomorphisme $G \to H'$. Ce dernier se prolonge en un homomorphisme ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G) \to H'$, ce qui veut dire que l'action de $G \times H$ sur M s'étend en une action de ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G) \times H$.

Considérons le morphisme canonique (dans $\overline{\mathrm{Gred}}_K$) $f : {}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G \times H) \to {}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G) \times H$. En considérant séparément les morphismes ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G) \to {}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G \times H)$ et $H \to {}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G \times H)$, on voit que c'est un épi. D'autre part, on vient de voir que, pour toute représentation M de ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G \times H)$, l'application

$$H^1_K({}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G) \times H, GL(M)) \to H^1_K({}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G \times H), GL(M))$$

est surjective. Par conséquent, la restriction de M à $\operatorname{Ker} f$ est triviale pour tout M ; mais alors on a $\operatorname{Ker} f = \{1\}$. □

19.5. **Le cas du groupe additif.** À titre d'exemple emblématique, calculons ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ et ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{U}(G)$ pour $G = \mathbb{G}_a$. Le théorème qui suit est une reformulation précisée du théorème de Jacobson-Morozov[25].

---

[24]Nous remercions Michel Brion de nous avoir indiqué ce type d'argument ; *cf.* aussi [53, II.4.3.3.2].

[25]La preuve que nous donnons de ce résultat classique n'est sans doute ni la plus courte ni la plus simple !

19.5.1. **Théorème.** *On a* ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{U}(\mathbb{G}_a) = \mathbb{G}_a$ *et* ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(\mathbb{G}_a) = SL_2$. *Plus précisément, pour toute section monoïdale s de $\pi_{\mathbb{G}_a}$, il existe un isomorphisme de $(\mathbb{G}_a)_s$ sur SL_2 tel que $s^\sharp = \varphi$, où φ est comme en* (19.1).

Démonstration. Soient $V \in \mathcal{A}$ la représentation φ de (19.1), et $\bar{V}$ son image dans $\bar{\mathcal{A}}$. C'est une représentation de rang 2 de G_s, et elle est non triviale puisque sa restriction à $\mathbb{G}_a$ via s^* est non triviale. Comme G_s est semi-simple et connexe (proposition 19.4.2), son image dans GL_2 est contenue dans SL_2, donc est égale à SL_2. Nous allons montrer que l'homomorphisme $f : G_s \to SL_2$ correspondant est un isomorphisme.

Pour cela, considérons le foncteur $f^* : Rep_K(SL_2) \to Rep_K(G_s)$: comme f est un épi, il est pleinement fidèle. Son composé avec s n'est autre que le foncteur de restriction $\Phi : Rep_K(SL_2) \to Rep_K(\mathbb{G}_a)$. Comme K est de caractéristique zéro, les représentations irréductibles de SL_2 sont les puissances symétriques de V. D'autre part, la théorie des blocs de Jordan montre que les représentations indécomposables de $\mathbb{G}_a$ sont également les puissances symétriques S^nV de V. Ainsi, Φ induit une bijection entre les classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de SL_2 et les classes d'isomorphismes de représentations indécomposables de $\mathbb{G}_a$. D'après le lemme 12.1.2, f^* induit donc une bijection entre les classes d'isomorphismes d'objets irréductibles de $Rep_K(SL_2)$ et celles de $Rep_K(G_s)$. Comme $Rep_K(G_s)$ est semi-simple, f^* est essentiellement surjectif, donc est une équivalence de catégories, d'où l'assertion.

Enfin, l'égalité $s^\sharp = \varphi$ et l'égalité $U_s = \mathbb{G}_a$ sont claires. $\square$

19.5.2. **Remarque.** L'espace des $\mathbb{G}_a$-homomorphismes $S^mV \to S^nV$ est de dimension $|P(m,n)|$, avec $P(m,n) = \{j|\,|m-n| \leq j \leq m+n,\ j \equiv m+n \mod 2\}$.

En effet, comme S^mV est auto-dual, ces homomorphismes s'identifient aux invariants sous $\mathbb{G}_a$ dans $S^mV \otimes S^nV$. Or on a la décomposition de SL_2-modules $S^mV \otimes S^nV \cong \oplus_{j \in P(m,n)} S^jV$ (Clebsch-Gordan), et chaque S^jV n'a qu'une droite de vecteurs invariants sous $\mathbb{G}_a$.

Pour compléter l'étude de $Rep_K\mathbb{G}_a$, mentionnons le résultat suivant, qui nous servira ultérieurement.

19.5.3. **Proposition.** *$Rep_K\mathbb{G}_a$ est strictement de Wedderburn.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que le radical infini est nul. Commençons par quelques remarques sur les indécomposables de $Rep_K\mathbb{G}_a$. Ils sont de la forme S^mV, où V est la représentation fondamentale de dimension 2, et admettent une unique suite de composition (à crans de dimension 1). Tout homomorphisme f de S^mV vers S^nV envoie le vecteur invariant de S^mV sur 0 si $m > n$ ou si $m = n$ et f n'est pas un isomorphisme.
Soient alors W, W' deux représentations, et $f_1, \dots f_N$ une chaîne d'homomorphismes dans le radical reliant W et W'. Quitte à remplacer f_1 (*resp.* le composé f des f_i) par le morphisme correspondant $\tilde{f}_1 : \mathbf{1} \to W^\vee \otimes W_1$ (*resp.* $\tilde{f} : \mathbf{1} \to W^\vee \otimes W'$), et f_i, pour $i > 1$, par $\tilde{f}_i = 1_{W^\vee} \otimes f_i$ (qui sont tous dans le radical puisque le radical

est un idéal monoïdal), on se ramène au cas $W = \mathbf{1}$ (noter que $\tilde{f}$ est le composé des $\tilde{f}_i$).

En outre, par additivité, on peut supposer les sources et buts des f_i indécomposables, *i.e.* de la forme $S^n V$. On a donc une chaîne de non-isomorphismes

$$\mathbf{1} \xrightarrow{f_1} S^{n_1}V \xrightarrow{f_2} S^{n_2}V \to \cdots \xrightarrow{f_N} S^{n_N}V$$

où n_N est fixé (et inférieur au produit des dimensions des W et W' originaux). Si $N > n_N$, on aura donc $n_{i+1} \leq n_i$ pour au moins l'un des i, et alors le composé des f_j de 1 à i s'annulera d'après l'observation précédente. $\square$

19.5.4**. Remarques.**

a) Il suit de l'exemple 14.3.2 et du théorème 14.3.3 que le groupoïde $\Gamma^{\otimes}(Rep_K\mathbb{G}_a)$ a le même type d'homotopie que $\mathbb{G}_a \to \operatorname{Spec} K$ (au sens de *loc. cit.*).

b) Supposons K de caractéristique $p > 0$. Alors le radical de $Rep_K(\mathbb{G}_a)$ *n'est pas monoïdal*. En effet, considérons la représentation indécomposable standard W de dimension p de $\mathbb{G}_a$ donnée par $t \mapsto \exp tn_{p-1}$, où n_{p-1} est l'endomorphisme nilpotent d'échelon p (un seul bloc de Jordan). Les endomorphismes de cette représentation sont donnés par des matrices triangulaires dont les coefficients diagonaux sont tous égaux ; leur trace est donc nulle, ce qui montre qu'avec les notations de §4, W devient nul dans $Rep_K(\mathbb{G}_a)/\mathcal{N}$. Ainsi $\mathcal{R} \neq \mathcal{N}$, et $\mathcal{R}$ n'est pas monoïdal d'après 8.2.2.

c) Revenons à la caractéristique nulle. Considérons la catégorie tannakienne $\mathcal{A} = Rep_K\mathbf{Z}$ des représentations de dimension finie sur K du groupe discret $\mathbf{Z}$. Un résultat de 'folklore', basé sur la décomposition de Jordan, dit que son enveloppe pro-algébrique est le produit de $\mathbb{G}_a$ par un K-groupe affine de type multiplicatif $T \times \mu_\infty$ (T est un pro-tore, μ_∞ est le groupe de torsion, cyclique). Il découle de là, du théorème précédent et du corollaire 19.4.4, que $\bar{\mathcal{A}}$ est $\otimes$-équivalente à $Rep_K(SL_2 \times T \times \mu_\infty)$.

19.6. **Extension des scalaires.** Si l'on fait varier le corps de base K (toujours supposé de caractéristique nulle), pour un K-groupe affine G et une extension L/K, il y a lieu de distinguer entre les L-groupes affines ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G \times_K L)$ et ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G) \times_K L$. Par la propriété universelle de ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}$, on a toujours un morphisme naturel

$$ {}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G \times_K L) \to {}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G) \times_K L. \tag{19.4}$$

Nous verrons ci-dessous que ce morphisme *n'est pas un isomorphisme* en général. Par contre :

19.6.1**. Théorème.** *Si L/K est* finie, (19.4) *est un isomorphisme.*

(Il suffit en fait que L/K soit algébrique, *cf.* th. C.3.)

Démonstration. Rappelons que dans ce cas, l'extension des scalaires à la Saavedra est définie sur $\mathcal{A} = Rep_K(G)$, et que l'on a un isomorphisme de catégories $\mathcal{A}_{(L)} \simeq$

$Rep_L(G)$ (remarque 5.1.3 c)). Considérons le diagramme commutatif, où une barre supérieure désigne la réduction modulo le radical :

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_{(L)} \arrow[d, "\pi'"'] \arrow[dr, "\pi_{(L)}"] & \\
\overline{\mathcal{A}_{(L)}} \arrow[r, "\alpha"] & \bar{\mathcal{A}}_{(L)}.
\end{tikzcd}
\tag{19.5}
$$

Pour justifier l'existence de ce diagramme (au moyen de 1.4.7), remarquons que la catégorie $\bar{\mathcal{A}}_{(L)}$ est semi-simple en vertu de la remarque 5.1.3 c), et que $\pi_{(L)}$ est, tout comme π, un foncteur plein (et d'ailleurs aussi essentiellement surjectif).

Toute section s de π définit une section $s_{(L)}$ de $\pi_{(L)}$, ce qui montre que α est plein et essentiellement surjectif. On a une section de α

$$\overline{s_{(L)}} = \pi' \circ s_{(L)} : \bar{\mathcal{A}}_{(L)} \to \overline{\mathcal{A}_{(L)}}$$

qui donne un diagramme naturellement commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A}_{(L)} \arrow[r, "\omega_{(L)}"] & Vec_L \\
\bar{\mathcal{A}}_{(L)} \arrow[ur, "s_{(L)}"] \arrow[r, "\overline{s_{(L)}}"] & \overline{\mathcal{A}_{(L)}}. \arrow[u, "\sigma"] &
\end{tikzcd}
$$

D'autre part, on a un diagramme (naturellement) commutatif de catégories et foncteurs :

$$
\begin{tikzcd}
Vec_K \arrow[rrr] & & & Vec_L \\
\mathcal{A} \arrow[u, "\omega"] \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{A}_L \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}_L^\natural \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \mathcal{A}_{(L)} \arrow[u, "\omega_{(L)}"'] \arrow[d] \\
\bar{\mathcal{A}} \arrow[r] & \bar{\mathcal{A}}_L \arrow[r] & \bar{\mathcal{A}}_L^\natural & \bar{\mathcal{A}}_{(L)}.
\end{tikzcd}
$$

En effet, le corollaire 4.1.4 montre que le foncteur $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_L$ est radiciel et que $(\bar{\mathcal{A}})_L \simeq \overline{\mathcal{A}_L}$ (isomorphisme de catégories). De même pour le carré suivant, par le lemme 1.3.10. L'équivalence de catégories $\mathcal{A}_L^\natural \cong \mathcal{A}_{(L)}$ provient du théorème 5.3.2. Il en résulte en particulier que α est une équivalence de catégories. Alors $\overline{s_{(L)}}$ est une équivalence de catégories, ce qui termine la démonstration. $\square$

19.7. **Enveloppes pro-réductives des groupes pro-unipotents.** Si G est un K-groupe pro-unipotent, on sait déjà que ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ est pro-semi-simple simplement connexe (proposition 19.4.2). Nous allons voir que ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ est en général de dimension infinie et que son calcul est un problème “insoluble”, le cas de $G = \mathbb{G}_a$ étant à cet égard exceptionnel.

Considérons d'abord le cas de $G = \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$. On peut voir que ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ *n'est pas de dimension finie* en remarquant que les homomorphismes $G \to \mathbb{G}_a, (a,b) \mapsto ax + by, (x, y \in K)$, donnent lieu à une infinité (paramétrée par $y/x \in \mathbf{P}^1(K)$) de représentations indécomposables non équivalentes de dimension 2. Elles sont du reste toutes sous-quotients de la représentation standard de dimension 4 donnée par

$\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Cela indique aussi que le morphisme (19.4) d'"extension des scalaires" *n'est pas un isomorphisme en général* (ne serait-ce que pour raison de cardinalité). On notera l'analogie formelle entre d'une part ce fait et le théorème 19.6.1, et d'autre part le comportement conjectural des groupes de Galois motiviques [55, 6.3? et remarque].

En fait, il s'avère que *la détermination de*

$$\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a \hookrightarrow {}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a)$$

est (en un sens convenable) un problème insoluble. En effet, elle inclut la classification des représentations indécomposables de $\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$, ou ce qui revient au même, des A-modules finis indécomposables pour $A = K[[T_1, T_2]]$ (*cf.* remarque 17.1.2 b)). Or la classification des A-modules finis indécomposables où l'action de A se factorise par le cube du radical $\mathfrak{m}$ est déjà un problème insoluble, car $A/\mathfrak{m}^3$ est de type de représentation infini sauvage (*cf. e.g.* [43][26]) ; plus précisément, la théorie des $A/\mathfrak{m}^3$-modules finis est indécidable (*cf.* [49]).

Les travaux récents de Ginzburg et Panyushev sur les paires nilpotentes [20, 45] permettent peut-être toutefois de décrire de nombreux quotients de ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a)$.

19.7.1**. Théorème.** *Soit G un K-groupe pro-unipotent. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
a) $\dim G \leq 1$*,*
b) ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ *est de dimension finie,*
c) pour toute extension L/K, le morphisme ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G_L) \to {}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)_L$ est un isomorphisme,
d) le radical infini $\mathrm{rad}^\omega(Rep_K G)$ est nul, i.e. $Rep_K G$ est strictement de Wedderburn,
e) $\mathrm{rad}^\omega(Rep_K G)$ *est nilpotent.*

Démonstration. D'après la discussion des cas $\mathbb{G}_a$ et $\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$ et le lemme 19.4.6, il suffit pour l'équivalence de $a), b), c)$ de démontrer que $\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$ est quotient de G dès que $\dim G > 1$. Passant aux algèbres de Lie, il s'agit de voir que pour toute algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{n}$ de dimension > 1, $\mathfrak{n}^{ab}$ est de dimension > 1. Mais il est bien connu que $\dim\, \mathfrak{n}^{ab}$ est une borne inférieure pour le nombre de générateurs de $\mathfrak{n}$.

L'implication $d) \Longrightarrow e)$ est triviale.

L'implication $a) \Longrightarrow d)$ est la proposition 19.5.3.

Pour terminer, prouvons $e) \Longrightarrow a)$ par l'absurde. Fixons un épimorphisme $G \to \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$. Identifions $Rep_K(\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a)$ à A-$Modf$ avec $A = K[[T_1, T_2]]$ d'une part, et à une sous-catégorie pleine de $Rep_K G$ d'autre part. Soit $\mathfrak{m}$ le radical de A, et considérons la sous-catégorie pleine $(A/\mathfrak{m}^3)$-$Modf$ de A-$Modf$. D'après l'hypothèse et le lemme 3.1.2, le radical infini de $(A/\mathfrak{m}^3)$-$Modf$ serait donc nilpotent, en contradiction, d'après [31], avec le caractère sauvage de $A/\mathfrak{m}^3$. $\square$

[26] Qui donne aussi une formalisation de la notion de problème de classification insoluble ou de difficulté maximale.

Au-delà du cas unipotent, on peut se poser la question suivante :

19.7.2**. Question.** Pour quels groupes algébriques linéaires G l'enveloppe pro-réductive ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ est-elle de dimension finie ? Sa formation est-elle alors compatible à l'extension des scalaires ?

La réponse est donnée dans l'appendice C : ceci se produit si et seulement si G est de dimension finie et son radical unipotent U est de dimension ≤ 1. De plus, ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ est alors produit semi-direct de G/U par SL_2.

Un cas éclairant est celui du produit semi-direct G de SL_2 par $\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$ (défini par la représentation standard de SL_2). Ce cas a été examiné dans [46]. L'auteur y montre que pour tout $n \geq 1$, l'algèbre de Lie sl_{2n+1} contient une copie de $Lie\, G$ mais aucune sous-algèbre de Lie semi-simple intermédiaire. Comme on sait par la proposition 19.4.2 et le corollaire 19.4.5 que ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ est pro-semi-simple simplement connexe, on en déduit que ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}(G)$ admet SL_{2n+1} comme quotient. Par application du lemme de Goursat, il admet donc aussi $\prod_n SL_{2n+1}$ comme quotient.

20. Applications aux groupes algébriques et aux représentations indécomposables.

En dépit du fait que l'enveloppe pro-réductive ${}^{\mathrm{p}}\mathrm{Red}\, G$ d'un K-groupe algébrique linéaire G soit le plus souvent de dimension infinie, son existence permet d'obtenir des résultats concrets sur les groupes réductifs[27] contenant G et sur les représentations indécomposables de G.

Dans tout ce paragraphe, K est un corps de caractéristique nulle.

20.1. Applications aux groupes algébriques.

20.1.1**. Proposition** (*cf.* [40])**.** *Soit H' un sous-groupe réductif fermé d'un groupe réductif H. Alors le centralisateur de H' dans H est réductif.*

Démonstration. Soit U le radical unipotent de ce centralisateur $C_H(H')$. Il s'agit de montrer que tout homomorphisme $f : \mathbb{G}_a \to U$ est trivial. Un tel homomorphisme s'étend en un homomorphisme $g : \mathbb{G}_a \times H' \to H$, puis, d'après la proposition 19.4.9 et le théorème 19.5.1, en un homomorphisme $g' : SL_2 \times H' \to H$. On a donc un homomorphisme $f' : SL_2 \to C_H(H')$ qui prolonge f. La composée de f' avec la projection $C_H(H') \to C_H(H')/U$ est triviale (puisqu'il en est de même de f). On en déduit que f' lui-même, et par suite f, est trivial. □

Soient G, H deux K-groupes linéaires et $f : G \to H$ un K-homomorphisme. (Cas le plus intéressant : un monomorphisme...) On note $C_H(f)$ le centralisateur de $f(G)$ dans H. Nous nous intéressons au cas où H est *réductif*.

20.1.2**. Définition.** On appelle *enveloppe réductive de f* tout sous-groupe réductif fermé de H contenant $f(G)$ et *minimal* pour cette propriété. Si f est un monomorphisme, on dira aussi *enveloppe réductive de G dans H*.

[27] On rappelle que dans ce texte, réductif n'implique pas connexe.

20.1.3**. Théorème.** *a) Deux enveloppes réductives de f sont conjuguées par un élément $h \in C_H(f)(K)$.*
b) Soit $\pi : H \to H_0$ un homomorphisme de groupes réductifs. Alors l'image dans H_0 de toute enveloppe réductive de f est une enveloppe réductive de $\pi \circ f$.
c) Supposons que l'enveloppe réductive de f soit égale à H. Alors $C_H(f)$ est produit du centre de H par un groupe unipotent.

Démonstration. Nous allons prouver que toute enveloppe réductive H' de f est image dans H du K-groupe pro-réductif G_s attaché à une section monoïdale s comme au §18.2 (et réciproquement). En effet, il suit de la proposition 18.2.7 que le plongement $G \to H'$ se factorise par G_s. Comme l'image de G_s dans H' est réductive et contient G, elle est égale à H' par minimalité de H'. Réciproquement, le même argument montre que pour toute factorisation de $G \to H$ à travers G_s, l'image H' de G_s dans H est une enveloppe réductive de f.

Le point b) suit immédiatement de cette interprétation[28].

a) Ce point suit alors de la proposition 18.2.9 (avec $s = t,\ f \circ s^\sharp = g \circ s^\sharp$).

Enfin, c) a déjà été démontré (proposition 18.2.6). □

Des compléments à ce résultat se trouvent dans l'appendice C (C.2).

20.1.4**. Contre-exemple.** On pourrait se demander si la propriété c) *caractérise* les enveloppes pro-réductives. C'est (totalement) faux, comme on le voit sur l'exemple de $\mathbb{G}_a$ plongé dans SL_{n+1} par l'intermédiaire de la puissance symétrique n-ième d'une représentation fidèle dans SL_2 : le centralisateur de $\mathbb{G}_a$ est alors égal au produit d'un groupe isomorphe à $\mathbb{G}_a^n$ par le centre de SL_{n+1}.

20.1.5**. Remarque.** Pour toute enveloppe réductive H' de G dans $GL(V)$, il suit de l'interprétation de H' donnée dans la démonstration du théorème 20.1.3 que la restriction à G des représentations de H' induit une *injection* de l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de H' vers l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations indécomposables de G. Les représentations indécomposables de G que l'on obtient ainsi sont, à isomorphisme près, les facteurs directs indécomposables des sommes finies $\oplus_i(\check{V})^{m_i} \otimes V^{n_i}$.

Plus précisément, soit $Rep(G,V)$ la sous-catégorie pleine de $Rep_K G$ formée des facteurs directs des sommes finies $\oplus_i(\check{V})^{m_i} \otimes V^{n_i}$. C'est une catégorie monoïdale rigide pseudo-abélienne. Son quotient par le radical n'est autre que la sous-catégorie pleine du quotient de $Rep_K G$ par son radical formée des facteurs directs des sommes finies $\oplus_i(\check{V})^{m_i} \otimes V^{n_i}$; c'est donc, à $\otimes$-équivalence près, la sous-catégorie tannakienne de $Rep_K G_s$ engendrée par V, qui s'identifie à $Rep_K\big(Im(G_s \to GL(V))\big)$ d'après ce qui précède.

20.2. **Applications aux représentations indécomposables.** Soit V une représentation fidèle de G. On note (abusivement) G_V une enveloppe réductive de G dans $GL(V)$ (c'est-à-dire, d'après ce qui précède, le groupe réductif image dans $GL(V)$

[28]comme nous l'a fait observer P. O'Sullivan, le point b) se déduit aussi directement de ce que l'image inverse dans H' (l'enveloppe réductive de G dans H) de tout sous-groupe réductif de $\pi(H')$ est un sous-groupe réductif de H'.

du K-groupe pro-réductif G_s attaché à une section monoïdale s comme dans 18.2). Alors la décomposition en indécomposables de toute somme finie $\oplus_i(\check{V})^{m_i} \otimes V^{n_i}$ est déterminée par la décomposition en irréductibles de $\oplus_i(\check{V})^{m_i} \otimes V^{n_i}$ vue comme représentation de G_V. Cela ramène un certain nombre de questions sur les représentations à la détermination (même partielle) de G_V et à la théorie des poids.

Voici quelques échantillons d'application de ce principe.

On suppose dorénavant G *connexe et* K *algébriquement clos* (de caractéristique nulle). Le groupe réductif G_V est alors connexe.

Considérons le sous-groupe abélien $\mathbf{a}_K(G,V)$ de l'anneau des représentations $\mathbf{a}_K(G)$ engendré par les classes des objets de $Rep(G,V)$, c'est-à-dire des facteurs directs des $\oplus_i(\check{V})^{m_i} \otimes V^{n_i}$ (groupe de Grothendieck vis-à-vis des sommes directes). C'est en fait un sous-anneau, et même un sous-λ-anneau.

En outre, le foncteur $(s^\sharp)^*$ induit un isomorphisme de λ-anneaux

$$\mathbf{a}_K(G,V) \cong \mathbf{a}_K(G_V) = R_K(G_V).$$

On rappelle que $R_K(G_V)$ s'identifie, via l'isomorphisme "caractère" ch, avec l'anneau des invariants sous le groupe de Weyl de l'anneau de groupe $\mathbf{Z}[\Lambda]$ sur le réseau des poids Λ (réseau de rang $m =$ rang de G_V).

On obtient comme première application :

20.2.1**. Théorème.** *Si G est simplement connexe, $\mathbf{a}_K(G,V)$ est un anneau de polynômes à coefficients entiers en $m \leq \dim V$ indéterminées.*

Démonstration. On montre comme dans la proposition 19.4.2 que G_V est semi-simple simplement connexe. On a alors $\mathbf{a}_K(G_V) = R_K(G_V) = R_K(Lie\, G_V)$, et il est bien connu que ce dernier est un anneau de polynômes en les poids fondamentaux de $Lie\, G_V$. □

20.2.2**. Remarque.** Si V est une représentation fidèle de G. D'après 10.2, 10.2.1, et la remarque 20.1.5, on obtient

$$HH_0(Rep(G,V)) \cong HH_0(Rep_K G_V) \cong \mathbf{a}_K(G_V) \otimes_{\mathbf{Z}} K \cong \mathbf{a}_K(G,V) \otimes_{\mathbf{Z}} K.$$

En particulier, l'homologie de Hochschild (en degré 0) de $Rep(G,V)$ est une algèbre de polynômes sur K si G est simplement connexe.

Pour toute représentation V (de dimension finie), on note $S^m V$ la puissance symétrique m-ième de V.

20.2.3**. Théorème.** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
a) S^2V est indécomposable,
b) pour tout $n \geq 0$, S^nV est indécomposable.

Démonstration. Supposons $a)$. Il est équivalent de dire que S^nV est une représentation indécomposable de G ou que vue comme représentation de G_V, S^nV est irréductible. On est donc ramené au cas ou G est réductif connexe, et le résultat est alors prouvé dans [4, app.] (en outre, *loc. cit.* montre que G_V est égal soit à $Z(G_V).SL(V)$ soit à $Z(G_V).Sp(V)$ pour une forme symplectique convenable, et le centre $Z(G_V)$ de G_V est réduit aux homothéties de G_V). □

20.2.4**. Proposition.** *Soient V, W deux représentations de G, et n un entier > 0. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
i) $V \cong W$,
ii) $V^{\otimes n} \cong W^{\otimes n}$.

Démonstration. Comme précédemment, le problème se ramène au problème analogue avec G remplacé par le groupe réductif connexe $G_{V \oplus W}$. Via l'homomorphisme "caractère", $i)$ (*resp.* $ii)$) se traduit par l'égalité $\mathrm{ch}(V) = \mathrm{ch}(W)$ (*resp.* $\mathrm{ch}(V)^n = \mathrm{ch}(W)^n$) de polynômes de Laurent en les poids fondamentaux, à coefficients entiers positifs. Or tout polynôme de Laurent à coefficients entiers positifs est déterminé par sa puissance n-ième. $\square$

APPENDICE A. DES CATÉGORIES SEMI-SIMPLES

L'objet de cet appendice est de clarifier la notion de semi-simplicité dans les K-catégories (non nécessairement abéliennes), un anneau commutatif unitaire K étant fixé. On renvoie au §1.3 et au début du §2 pour les définitions de base.

Sauf mention du contraire, $\mathcal{A}$-*module* signifie $\mathcal{A}$-*module à gauche* dans tout l'appendice.

A.1. **Objets projectifs et injectifs.** Par un raisonnement classique [19], la catégorie abélienne K-linéaire $\mathcal{A}$–Mod des $\mathcal{A}$-modules (à gauche) possède assez d'injectifs et de projectifs. Pour les projectifs, nous allons retrouver ce fait de manière constructive.

A.1.1**. Lemme.** *Soit $f : M \to N$ un homomorphisme de $\mathcal{A}$-modules. Alors*
a) f est un épimorphisme si et seulement si $f(A) : M(A) \to N(A)$ est un épimorphisme pour tout $A \in \mathcal{A}$.
b) f est un monomorphisme si et seulement si $f(A) : M(A) \to N(A)$ est un monomorphisme pour tout $A \in \mathcal{A}$.
c) f est un isomorphisme si et seulement si $f(A) : M(A) \to N(A)$ est un isomorphisme pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Démonstration. a) Soit $C = \operatorname{Coker} f$: on a $C(A) = \operatorname{Coker} f(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, et $C = 0 \iff C(A) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

b) Résulte de a) par dualité (ou par le même raisonnement).

c) est clair. □

A.1.2**. Lemme.** *Pour tout objet $A \in \mathcal{A}$, le $\mathcal{A}$-module $\mathcal{A}_A$ est projectif.*

Démonstration. Soit $f : M \to \mathcal{A}_A$ un épimorphisme. Par le lemme A.1.1, $f(A)$ est surjectif. Soit $m \in M(A)$ tel que $f(A)(m) = 1_A$. Par le lemme de Yoneda (proposition 1.3.6 a)), m définit un homomorphisme $\tilde{m} : \mathcal{A}_A \to M$, et on voit tout de suite que $\tilde{m}$ est une section de f. □

A.1.3**. Définition.** Un $\mathcal{A}$-module de la forme $\bigoplus \mathcal{A}_{A_i}$ est appelé un $\mathcal{A}$-*module libre*.

Tout $\mathcal{A}$-module libre est projectif. Si $\mathcal{A}$ est K-linéaire, tout $\mathcal{A}$-module libre est de la forme $\mathcal{A}_A$ pour un objet A convenable.

A.1.4**. Proposition.** *Supposons $\mathcal{A}$ petite.*
a) Tout $\mathcal{A}$-module M est quotient d'un $\mathcal{A}$-module libre.
b) Un $\mathcal{A}$-module P est projectif si et seulement s'il est facteur direct d'un $\mathcal{A}$-module libre.

Démonstration. a) Pour tout objet $A \in \mathcal{A}$, choisissons un système générateur $(m_i^A)_{i \in I_A}$ de $M(A)$. Alors l'homomorphisme

$$\bigoplus_{A \in \mathcal{A}} \bigoplus_{i \in I_A} \mathcal{A}_A \to M$$

défini par le lemme de Yoneda est un épimorphisme par le lemme A.1.1 a).

b) La nécessité résulte de a). La suffisance résulte du lemme A.1.2, puisqu'un facteur direct d'un module projectif est évidemment projectif. □

A.1.5**. Corollaire.** *Si P est un $\mathcal{A}$-module projectif, $P_L : A \mapsto L \otimes_K P(A)$ est un $\mathcal{A}_L$-module projectif pour toute extension L/K.*

Démonstration. D'après la proposition A.1.4 b), il suffit de le voir pour P de la forme $\mathcal{A}_A$, auquel cas c'est évident. □

A.2. **Catégories semi-simples.** Les définitions suivantes sont adaptées de [57].

A.2.1**. Définition.** Soit $\mathcal{A}$ une K-catégorie.
a) Un objet de $\mathcal{A}$ est *simple* s'il n'est pas nul et s'il n'a pas d'autre sous-objet que lui-même et 0.
b) Un objet de $\mathcal{A}$ est *semi-simple* s'il est somme directe d'objets simples.
c) Un objet A de $\mathcal{A}$ est *artinien* si toute chaîne décroissante de sous-objets de A est stationnaire.
d) La catégorie $\mathcal{A}$ est *artinienne* si, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_A$ est un objet artinien de $\mathcal{A}$-Mod.
e) La catégorie $\mathcal{A}$ est *simple* si elle l'est en tant qu'objet de $\mathcal{A}^e$-Mod.

A.2.2**. Définition.** Soit $(\mathcal{A}_\alpha)$ une famille de catégories ayant les mêmes objets.
a) Le *produit local* des $\mathcal{A}_\alpha$ est la catégorie $\prod_\alpha^\lambda \mathcal{A}_\alpha$ ayant les mêmes objets que les $\mathcal{A}_\alpha$ et telle que, pour tout couple d'objets (A, B), on ait $(\prod_\alpha^\lambda \mathcal{A}_\alpha)(A, B) = \prod_\alpha \mathcal{A}_\alpha(A, B)$.
b) $\mathcal{A}$ est *somme directe locale* des $\mathcal{A}_\alpha$ si elle est produit local des $\mathcal{A}_\alpha$ et que, de plus, pour tout objet A, l'ensemble des α tels que $(\mathcal{A}_\alpha)_A \neq 0$ est fini.
c) Supposons que les $\mathcal{A}_\alpha$ soient des K-catégories. Le *coproduit* des $\mathcal{A}_\alpha$ est la K-catégorie $\mathcal{A} = \coprod_\alpha \mathcal{A}_\alpha$ dont la collection d'objets est la réunion des collections d'objets des $\mathcal{A}_\alpha$, avec

$$\mathcal{A}(A, B) = \begin{cases} \mathcal{A}_\alpha(A, B) & \text{si } \exists \alpha : A, B \in \mathcal{A}_\alpha \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A.2.3**. Lemme.** *Soit $\mathcal{A}$ une K-catégorie.*
a) Toute somme directe d'objets semi-simples est semi-simple.
b) Soit $A \in \mathcal{A}$ un objet tel que tout sous-objet de A soit facteur direct. Alors A est semi-simple dans les cas suivants :

(i) *A est artinien.*

(ii) *$\mathcal{A}$ est de la forme $\mathcal{R}$-Mod, où $\mathcal{R}$ est une K-catégorie.*

Supposons de plus $\mathcal{A}$ abélienne.
c) Soit $A \in \mathcal{A}$ un objet semi-simple et soit B un sous-objet de $\mathcal{A}$. Alors il existe une famille $(S_i)_{I \in I}$ de sous-objets simples de A telle que $A = B \oplus \bigoplus_{i \in I} S_i$.
d) Tout quotient, tout sous-objet d'un objet semi-simple est semi-simple.

Démonstration. a) est évident. Dans b), supposons d'abord A artinien. Si A n'est pas semi-simple, soit B un sous-objet de A minimal parmi ceux qui ne sont pas semi-simples. Alors B n'est pas simple, donc possède un sous-objet $C \neq 0, B$. Comme C est facteur direct de A, il est facteur direct de B, soit $B = C \oplus D$. Mais C et D sont semi-simples, contradiction. L'autre cas se traite comme la suffisance dans [11, dém. de la prop. 4.1] (*cf.* [57, bas p. 140]). c) se démontre comme la nécessité dans *loc. cit.* d) résulte immédiatement de c). □

A.2.4**. Contre-exemple.** Soit $\mathcal{A}$ la catégorie des espaces vectoriels de dimension dénombrable sur un corps k, et soit $\bar{\mathcal{A}}$ la catégorie quotient de $\mathcal{A}$ par la sous-catégorie épaisse des espaces vectoriels de dimension finie. Soit V un espace vectoriel de dimension infinie, vu comme objet de $\bar{\mathcal{A}}$. Alors tout sous-objet de V est facteur direct, mais V ne contient aucun sous-objet simple.

A.2.5**. Lemme.** *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Considérons les énoncés suivants :*

(1) *Tout objet de $\mathcal{A}$ est semi-simple.*

(2) *Tout objet de $\mathcal{A}$ est projectif.*

(3) *Tout objet de $\mathcal{A}$ est injectif.*

Alors 1 $\Longrightarrow$ 2 $\iff$ 3. De plus, 1 $\iff$ 2 $\iff$ 3 dans les deux cas suivants :

(i) *Tout objet de $\mathcal{A}$ est artinien.*

(ii) *$\mathcal{A}$ est de la forme $\mathcal{R}$-Mod, où $\mathcal{R}$ est une K-catégorie.*

Démonstration. Il est bien connu que 2 $\iff$ 3, et 1 $\Longrightarrow$ 2 résulte du lemme A.2.3 a). Les implications inverses résultent du lemme A.2.3 b). □

A.2.6**. Contre-exemple.** Dans la catégorie $\bar{\mathcal{A}}$ du contre-exemple A.2.4, tout objet est projectif, mais $\bar{\mathcal{A}}$ ne contient aucun objet simple (*cf.* [48, p. 324]).

A.2.7**. Lemme** (*cf.* [25])**.** *Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie K-linéaire pseudo-abélienne et dont tout objet est semi-simple. Alors $\mathcal{A}$ est abélienne si et seulement si, pour tout objet simple $S \in \mathcal{A}$, l'anneau $\mathcal{A}(S,S)$ est un corps.*

Démonstration. La nécessité résulte du lemme de Schur. Suffisance : soit T l'ensemble des types d'objets simples de $\mathcal{A}$, et pour tout $t \in T$ soit $\mathcal{A}_t$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$ formée des objets isotypiques de type t. Alors $\mathcal{A}_t$ vérifie encore l'hypothèse, et il suffit de montrer que $\mathcal{A}_t$ est abélienne. En d'autres termes, on peut supposer $\mathcal{A}$ isotypique. Soit S un objet simple de $\mathcal{A}$, et notons $D = \mathcal{A}(S,S)$ son corps d'endomorphismes. Le foncteur $\mathcal{A}_S^o$ s'enrichit en un foncteur T à valeurs dans les D^o-espaces vectoriels, où D^o est le corps opposé à D. En utilisant l'hypothèse, on voit tout de suite que T est pleinement fidèle et d'image essentielle la catégorie des D^o-espaces vectoriels de dimension $\leq c$, où c est le plus grand cardinal tel qu'il existe un ensemble I de cardinal c tel que $S^{(I)} \in \mathcal{A}$. En particulier, $\mathcal{A}$ est abélienne. □

A.2.8**. Contre-exemple.** Soit $\mathbf{Q}[\varepsilon]$ l'algèbre des nombres duaux ($\varepsilon^2 = 0$). La catégorie des $\mathbf{Q}[\varepsilon]$-modules libres de rang fini est $\mathbf{Q}$-linéaire, pseudo-abélienne, artinienne, et tout objet est semi-simple, mais elle n'est pas abélienne.

A.2.9**. Lemme.** *Soient $\mathcal{A}$ une K-catégorie pseudo-abélienne, $A \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_A = \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$ une décomposition de $\mathcal{A}_A$ en somme directe de sous-modules non nuls. Alors I est fini et il existe une unique décomposition en somme directe $A = \bigoplus A_\alpha$ telle que, pour tout α, $M_\alpha = \mathcal{A}_{A_\alpha}$. Si A est indécomposable, $\mathcal{A}_A$ est indécomposable.*

Démonstration. Écrivons $Id_A = \sum e_\alpha$ avec $e_\alpha \in M_\alpha(A)$ pour tout α. Alors, pour tout $B \in \mathcal{A}$ et tout $f \in \mathcal{A}_A(B) = \mathcal{A}(A, B)$, on a $f = \sum f e_\alpha$. Par conséquent, $M_\alpha \neq 0 \Longrightarrow e_\alpha \neq 0$. Les M_α sont donc en nombre fini. De plus, le lemme de Peirce montre que les e_α forment un système d'idempotents orthogonaux, d'où la deuxième assertion en utilisant le lemme de Yoneda. La dernière assertion en résulte immédiatement. □

Le théorème qui suit clarifie le lien entre diverses notions de semi-simplicité, et montre qu'elles ne dépendent pas de la K-structure.

A.2.10**. Théorème.** *Soit $\mathcal{A}$ une K-catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Tout objet de $\mathcal{A}$-Mod est projectif.*

(2) *Tout objet de $\mathcal{A}$-Mod est injectif.*

(3) *Tout objet de $\mathcal{A}$-Mod est semi-simple.*

(4) *Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_A$ est semi-simple.*

(5) *$\mathcal{A}$ est artinienne et le $\mathcal{A}^o \boxtimes_K \mathcal{A}$-module $\mathcal{A}$ est semi-simple.*

(6) *$\mathcal{A}$ est équivalente au sens de Morita à une catégorie de la forme $\coprod_\alpha D_\alpha$, où, pour tout α, D_α est un corps gauche.*
On dit alors que $\mathcal{A}$ est semi-simple *(cf. définition 2.1.1).*
Si de plus $\mathcal{A}$ est K-linéaire, les conditions ci-dessus équivalent à :

(7) *Pour tout objet $A \in \mathcal{A}$, l'anneau $\mathcal{A}(A, A)$ est semi-simple.*

(8) $\operatorname{rad}(\mathcal{A}) = 0$ *et pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}(A, A)$ est un anneau artinien (à gauche).*
Enfin, si $\mathcal{A}$ est en outre pseudo-abélienne, les conditions ci-dessus équivalent à :

(9) *$\mathcal{A}$ est somme directe locale d'une famille de catégories artiniennes simples (ayant les mêmes objets).*

(10) *$\mathcal{A}$ est abélienne et tout objet de $\mathcal{A}$ est semi-simple et de longueur finie.*

(11) *$\mathcal{A}$ est abélienne, artinienne, et tout objet de $\mathcal{A}$ est semi-simple.*

(12) *$\mathcal{A}$ est abélienne, tout objet de $\mathcal{A}$ est de longueur finie, et* $\operatorname{rad}(\mathcal{A}) = 0$.

Démonstration. Il est clair que les six premières conditions ne changent pas si l'on remplace $\mathcal{A}$ par une K-catégorie équivalente au sens de Morita. De même les septième et huitième condition sont vérifiées pour une catégorie K-linéaire $\mathcal{A}$ si et seulement si elles le sont pour son enveloppe pseudo-abélienne $\mathcal{A}^\natural$: en effet, pour tout couple d'objets $((A, e), (A', e'))$ de $\mathcal{A}^\natural$, on a $\mathcal{A}^\natural((A, e), (A', e')) = e'\mathcal{A}(A, A')e$ et $\operatorname{rad}(\mathcal{A}^\natural)((A, e), (A', e')) = e'\operatorname{rad}(\mathcal{A})(A, A')e$, *cf.* aussi lemme

1.3.10 d). Ceci permet en particulier de supposer dans la suite $\mathcal{A}$ K-linéaire pseudo-abélienne.

1 $\iff$ 2 $\iff$ 3 résulte du lemme A.2.5 ; 3 $\Longrightarrow$ 4 est évident.

4 $\Longrightarrow$ 3 : soient M un $\mathcal{A}$-module à gauche, $A \in \mathcal{A}$ et $a \in M(A)$. Alors $Ann(a)(B) = \{f \in \mathcal{A}_A(B) \mid f^*a = 0\}$ définit un A-idéal à gauche de $\mathcal{A}$ et l'application $f \mapsto f^*a$ induit un morphisme de $\mathcal{A}$-modules $\mathcal{A}_A/Ann(a) \to M$. En faisant varier A et a, on obtient un épimorphisme $\bigoplus_{A\in\mathcal{A},a\in M(A)} \mathcal{A}_A/Ann(a) \twoheadrightarrow M$.

Il résulte alors du lemme A.2.3 que M est semi-simple.

4 $\Longrightarrow$ 10 : le lemme A.2.9 montre que si $S \in \mathcal{A}$ est simple, alors $\mathcal{A}_S$ est simple ; en réappliquant ce même lemme, on voit que tout objet de $\mathcal{A}$ est semi-simple et de longueur finie.

Enfin, pour tout objet simple $S \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}(S,S) = \mathcal{A}\text{-}Mod(\mathcal{A}_S, \mathcal{A}_S)$ est un corps, donc $\mathcal{A}$ est abélienne d'après le lemme A.2.7.

10 $\Longrightarrow$ 11 : si $S \in \mathcal{A}$ est simple, $\mathcal{A}(S,S)$ est un corps (lemme de Schur), donc ne contient aucun idéal $\neq 0$ et $\mathcal{A}_S$ est simple. Il en résulte que $\mathcal{A}_A$ est de longueur finie, donc artinien, pour tout $A \in \mathcal{A}$.

11 $\Longrightarrow$ 10 : le lemme de Yoneda implique que tout objet de $\mathcal{A}$ est artinien, donc de longueur finie.

10 $\Longrightarrow$ 3 : comme dans la démonstration du lemme A.2.7, on se ramène au cas où $\mathcal{A}$ est isotypique. Soit M un $\mathcal{A}$-module à gauche. Choisissons un objet simple S de $\mathcal{A}$, et soit D le corps des endomorphismes de S (voir ci-dessus). Alors D opère naturellement à gauche sur $M(S)$. Pour tout objet A de $\mathcal{A}$, on a un homomorphisme naturel

$$\mathcal{A}(S,A) \otimes_D M(S) \to M(A)$$

où le produit tensoriel sur D est relatif à l'action à droite de D sur $\mathcal{A}(S,A)$, et l'hypothèse sur $\mathcal{A}$ montre que c'est un isomorphisme de groupes abéliens. On définit ainsi une équivalence

$$M \mapsto M(S)$$

de $\mathcal{A}$-Mod sur la catégorie des D-espaces vectoriels à gauche, dont tout objet est évidemment semi-simple.

6 $\Longrightarrow$ 10 est évident. (3 et 11) $\Longrightarrow$ 6 : la première hypothèse implique que $\mathcal{A}$ est semi-primitive au sens de [57, def. 2] (pour toute flèche non nulle f de $\mathcal{A}$, il existe un module simple S tel que $S(f) \neq 0$). La conclusion résulte alors de [57, th. 16].

6 $\Longrightarrow$ 5 : pour tout α, soit $\mathcal{I}_\alpha$ l'idéal bilatère de $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A}/\mathcal{I}_\alpha = \coprod_{\beta\neq\alpha} D_\alpha$. Il est clair que chaque $\mathcal{I}_\alpha$ est simple et que $\mathcal{A} = \bigoplus \mathcal{I}_\alpha$.

5$\Longrightarrow$ 9 : décomposons le bimodule $\mathcal{A}$ en $\bigoplus \mathcal{I}_\alpha$, où chaque idéal bilatère $\mathcal{I}_\alpha$ est simple. Soit $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}/\bigoplus_{\beta\neq\alpha} \mathcal{I}_\beta$. Alors $\mathcal{A}_\alpha$ s'identifie canoniquement à $\mathcal{I}_\alpha$, donc est simple ; en d'autres termes, $\mathcal{A}_\alpha$ est simple, et elle est évidemment artinienne. Le lemme A.2.9 montre que $\mathcal{A}$ s'identifie à la somme directe locale des $\mathcal{A}_\alpha$.

9 $\Longrightarrow$ 6 : on se ramène immédiatement au cas où $\mathcal{A}$ est simple. La conclusion résulte alors de [57, prop. 12 et th. 16].

11$\Longrightarrow$ 7 : cela résulte du lemme de Schur.

7 $\Longrightarrow$ 11 : cela résulte de [25, lemma 2] (où l'on peut remplacer l'hypothèse que $\mathcal{A}(A,A)$ soit de dimension finie sur K par : $\mathcal{A}(A,A)$ est artinienne.)

7 $\iff$ 8 : cela vient de ce que toute K-algèbre artinienne de radical nul est semi-simple.

3 $\Longrightarrow$ 5 : $\mathcal{A}_A$ est semi-simple, donc de longueur finie, donc artinien. Soit I l'ensemble des types d'objets simples de $\mathcal{A}$-Mod et, pour tout $\alpha \in I$, choisissons un module simple S_α de type α. Pour tout $\mathcal{A}$-module à gauche M, notons $Ann(M) = \{f \mid M(f) = 0\}$: c'est un idéal bilatère de $\mathcal{A}$. On va montrer l'égalité $\mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha\in I} Ann(\bigoplus_{\beta\neq\alpha} S_\beta)$ et que $Ann(\bigoplus_{\beta\neq\alpha} S_\beta)$ est un idéal bilatère simple pour tout α. Pour cela, étant donné $A \in \mathcal{A}$, décomposons $\mathcal{A}_A^o$ en une somme directe $\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$ de sous-modules isotypiques. Ecrivons d'abord $Id_A = \sum e_\alpha$, avec $e_\alpha \in M_\alpha(A)$ pour tout α. On remarque que les $M_\alpha(A)$ sont des idéaux bilatères de l'anneau $\mathcal{A}(A, A)$; il en résulte que les e_α forment un système d'idempotents orthogonaux. En particulier, comme $S_\beta(A)$ est facteur direct de $M_\beta(A)$, e_α opère par 0 sur $S_\beta(A)$ pour $\beta \neq \alpha$ et par l'identité pour $\beta = \alpha$. Soit maintenant $f \in \mathcal{A}(A, B)$, et soit $f = \sum f_\alpha$ sa décomposition sur les $M_\alpha(B)$. On a $f_\alpha = fe_\alpha$, donc f_α opère sur $M_\beta(B)$ par 0 pour $\beta \neq \alpha$ et par f pour $\beta = \alpha$. On a donc bien prouvé que $\mathcal{A}(A, B) = \bigoplus_{\alpha\in I} Ann(\bigoplus_{\beta\neq\alpha} S_\beta)(A, B)$. Enfin, montrons que, pour tout $\alpha \in I$, $\mathcal{I}_\alpha = Ann(\bigoplus_{\beta\neq\alpha} S_\beta)$ est simple. Soit $\mathcal{J}$ un sous-module non nul de $\mathcal{I}_\alpha$. Choisissons $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $\mathcal{J}(A, B) \neq 0$ et soit $0 \neq f \in \mathcal{J}(A, B)$. On a $S_\beta(f) = 0$ pour tout $\beta \neq \alpha$. Si $S_\alpha(f) = 0$, on a donc $M(f) = 0$ pour tout $\mathcal{A}$-module M, ce qui est absurde en choisissant $M = \mathcal{A}_A$. Par conséquent, $S_\alpha(f) \neq 0$.

10 $\Longrightarrow$ 12 : Pour tout objet semi-simple A, l'algèbre $\mathcal{A}(A, A)$ est semi-simple donc $\mathrm{rad}(\mathcal{A})(A, A) = 0$; on conclut grâce à l'additivité des idéaux sur les objets.

12 $\Longrightarrow$ 10 : Comme $\mathcal{A}$ est supposée abélienne et que tout objet est supposé de longueur finie, tout objet est somme directe finie d'indécomposables. Tout se ramène à montrer que tout indécomposable A est simple. Cela résulte du lemme 1.4.9 appliqué au monomorphisme $S \hookrightarrow A$, où S est un sous-objet simple de $\mathcal{A}$ (dans ce cas, le lemme dit que S est facteur direct de A, donc égal à A). $\square$

A.2.11**. Corollaire** (à la démonstration)**.** *Une K-catégorie $\mathcal{A}$ est simple (définition A.2.1) si et seulement si elle est semi-simple et n'a qu'un seul type de module simple.*

Démonstration. Cela résulte de la preuve de 6 $\Longrightarrow$ 5. $\square$

A.2.12**. Contre-exemple.** La catégorie du contre-exemple A.2.4 est semi-simple au sens de [57, déf. 4], mais pas au sens de la définition 2.1.1 ci-dessus.

A.2.13**. Lemme.** *Dans une catégorie abélienne semi-simple $\mathcal{A}$, tout morphisme est somme directe d'un morphisme nul et d'un isomorphisme.*

Démonstration. Soit $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{A}$. On peut décomposer

$$A = \operatorname{Ker} u \oplus A'$$
$$B = B' \oplus \operatorname{Im} u.$$

Sur cette décomposition, u a la forme désirée. $\square$

A.2.14**. Lemme.** *Tout foncteur additif $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre catégories abéliennes semi-simples est exact. De plus, les conditions suivantes :*

(i) *F est fidèle*
(ii) *F est conservatif*
(iii) *F n'envoie aucun objet non nul de $\mathcal{A}$ sur un objet nul de $\mathcal{B}$*

sont équivalentes.

Démonstration. Comme tout foncteur additif transforme une suite exacte courte scindée en une suite exacte courte scindée, la première affirmation est claire. (i) $\Longrightarrow$ (iii) est évident ; (iii) $\Longrightarrow$ (ii) et (ii) $\Longrightarrow$ (i) résultent immédiatement du lemme A.2.13.

A.3. **Catégories séparables (ou absolument semi-simples).**

A.3.1**. Théorème.** *Soit $\mathcal{A}$ une K-catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Le $\mathcal{A}^{\mathrm{o}} \boxtimes_K \mathcal{A}$-module $\mathcal{A}$ est projectif.*
(2) *Le $\mathcal{A}_L^{\mathrm{o}} \boxtimes_L \mathcal{A}_L$-module $\mathcal{A}_L$ est projectif pour toute extension L/K.*
(3) $\dim_K \mathcal{A}(A,B) < \infty$ *pour tous $A, B \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_L$ est semi-simple pour toute extension L/K.*
(4) *$\mathcal{A}_L$ est semi-simple pour toute extension L/K.*
(5) $\dim_K \mathcal{A}(A,B) < \infty$ *pour tous $A, B \in \mathcal{A}$ et* $\mathrm{rad}(\mathcal{A}_L) = 0$ *pour toute extension L/K.*
(6) *La catégorie $\mathcal{A}^{\mathrm{o}} \boxtimes_K \mathcal{A}$ est semi-simple.*
On dit alors que $\mathcal{A}$ est séparable*.*
Si $\mathcal{A}$ est K-linéaire, ces conditions sont encore équivalentes à
(7) *La K-algèbre $\mathcal{A}(A,A)$ est séparable pour tout objet A de $\mathcal{A}$.*

Démonstration. Les conditions 1–6 étant manifestement invariantes par passage à l'enveloppe K-linéaire, on peut supposer $\mathcal{A}$ K-linéaire.

3 $\Longrightarrow$ 4 et 3 $\Longrightarrow$ 5 sont évidents. 4 $\Longleftrightarrow$ 7 résulte de la caractérisation 7 du théorème A.2.10 et de la définition d'une K-algèbre séparable (définition 2.2.2 a)). 7 $\Longrightarrow$ 3 résulte de la caractérisation 3 des K-algèbres séparables dans la proposition 2.2.1. 7 $\Longrightarrow$ 6 résulte du lemme 2.2.5. 5 $\Longrightarrow$ 7 résulte de la caractérisation 5 des K-algèbres séparables dans la proposition 2.2.1. 6 $\Longrightarrow$ 1 résulte de la caractérisation 1 du théorème A.2.10. 1 $\Longrightarrow$ 2 résulte du corollaire A.1.5.

Il reste à démontrer que 2 $\Longrightarrow$ 4. Il suffit de traiter le cas $L = K$. Pour cela, nous allons reproduire la raisonnement de [11, ch. IX, dém. de la prop. 7.1] "à la main".

Si M et N sont deux $\mathcal{A}$-modules, on leur associe le $\mathcal{A}^e$-module

$$\underline{\mathrm{Hom}}_K(M,N) : (A,B) \mapsto Hom_K(M(A), N(B)).$$

Le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}$: $(\mathcal{A}\text{–}Mod)^{\mathrm{o}} \times \mathcal{A}\text{–}Mod \to \mathcal{A}^e\text{–}Mod$ est bi-exact.

Soit $0 \to N \to E \to M \to 0$ une extension de M par N. On lui associe une extension $\tilde{E}$ du $\mathcal{A}^e$-module $\mathcal{A}$ par $\underline{\mathrm{Hom}}_K(M,N)$ par pull-back via le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \underline{\mathrm{Hom}}_K(M,N) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \underline{\mathrm{Hom}}_K(E,N) \arrow[r] & \underline{\mathrm{Hom}}_K(N,N) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \underline{\mathrm{Hom}}_K(M,N) \arrow[r] & \tilde{E} \arrow[r, "\pi"] \arrow[u, "\rho"] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[u] & 0.
\end{tikzcd}$$

Soit s une section de π. Alors $\rho \circ s$ définit un homomorphisme $\mathcal{A} \to \underline{\mathrm{Hom}}_K(E, N)$. Celui-ci correspond à un homomorphisme $f : E \to N$, et la commutativité du diagramme montre que f est une rétraction du monomorphisme $N \to E$. Ainsi, $\mathcal{A}$ est semi-simple. $\square$

APPENDICE B. ERRATUM À [1]

O. Gabber nous a fait remarquer que la preuve de [1, Prop. 6] était (encore) incomplète. Le problème est que la démonstration donnée dans *loc. cit.* s'applique à un motif de la forme $h(X)$, où X est une variété projective lisse, mais pas *a priori* à un motif général M. Plus précisément, si M est effectif (pour fixer les idées) et que le projecteur de Künneth pair de M est algébrique, il n'est pas clair qu'on puisse choisir une variété X telle que $h(X)$ contienne M en facteur direct et telle que le projecteur de Künneth pair de X soit algébrique.

Voici deux manières de corriger ce point (la première est en substance celle que nous a proposée Gabber). Les notations sont celles de [1].

B.1. **Première correction.** Comme remarqué au début de la preuve de *loc. cit.* , il suffit de supposer que le corps de base k est de type fini sur $\mathbf{F}_p$.

B.1.1**. Lemme.** *Soient $H : Mot_{\mathrm{rat}} \to Modf\text{-}L$ une cohomologie de Weil classique à coefficients dans une* **Q**-*algèbre commutative semi-simple L et Mot_H la catégorie des k-motifs H-homologiques à coefficients rationnels. Pour tout $A \in Mot_H$, notons*

$$H^+(A) = \bigoplus_{i \text{ pair}} H^i(A), \quad H^-(A) = \bigoplus_{i \text{ impair}} H^i(A).$$

Alors, pour $A, B \in Mot_H$, on a

$$\mathcal{R}_H(A,B) = \\ \{f \in Mot_H(A,B) \mid \forall g \in Mot_H(B,A), \forall i \in \mathbf{Z}, trH^i(g \circ f) = 0\} \\ = \{f \in Mot_H(A,B) \mid \forall g \in Mot_H(B,A), trH^+(g \circ f) = trH^-(g \circ f) = 0\},$$

où $\mathcal{R}_H$ est le radical de Mot_H.

Démonstration. D'après [1, prop. 5], Mot_H est semi-primaire, donc son radical de Kelly coïncide avec son radical de Gabriel. L'énoncé résulte alors du lemme 1.4.3. $\square$

B.1.2**. Lemme.** *Avec les notations du lemme B.1.1, l'image réciproque* snum *de $\mathcal{R}_H$ dans la catégorie Mot_{rat} des motifs de Chow ne dépend pas du choix de H.*

Démonstration. Étant donné le lemme B.1.1, il suffit de voir que, pour toute k-variété projective lisse X et toute correspondance $c \in CH^{\dim X}(X \times X)$ et tout $i \in \mathbf{Z}$, $trH^i(c)$ est un nombre rationnel qui ne dépend pas de H. Par changement de base propre et lisse et par spécialisation des cycles algébriques, on se réduit par récurrence sur le degré de transcendance de k sur $\mathbf{F}_p$ au cas où k est fini (*cf.* [1, dém. de la prop. 5]). L'assertion résulte alors de [29]. $\square$

B.1.3**. Lemme** (*cf.* [1, lemme 7])**.** *Soient, pour fixer les idées, $\ell \neq \ell' \neq p$ deux nombres premiers. Alors le noyau du foncteur $Mot_{\ell\ell'} \to Mot_\ell$ est un idéal localement nilpotent.*

Démonstration. Cela résulte des lemmes B.1.1 et B.1.2. □

B.1.4**. Lemme.** *Les foncteurs pleins $Mot_\ell \to Mot_{\mathrm{snum}}, Mot_{\ell'} \to Mot_{\mathrm{snum}}$ induisent des bijections sur les classes d'isomorphisme d'objets. En particulier, pour tout objet M de Mot_ℓ, $b_i(M) = \dim H^i_\ell(M)$ ne dépend pas de ℓ, et ne dépend que de la classe d'isomorphisme de l'image de M dans Mot_{snum}.*

Démonstration. Par le lemme B.1.3, ces foncteurs sont essentiellement surjectifs et conservatifs. □

B.1.5**. Lemme.** *L'image M^*_{snum} de M^*_ℓ dans Mot_{snum} consiste en la sous-catégorie pleine formé des objets isomorphes à des sommes finies d'objets n'ayant qu'un seul nombre de Betti non nul. En particulier, M^*_{snum} est indépendant de ℓ. De même avec $M^\pm$.*

Démonstration. C'est clair par le lemme B.1.4, car on a la même proprieté au niveau de M^*_ℓ. □

B.1.6**. Lemme.** *$M^*_{snum} = M^*_{num}$ et $M^\pm_{snum} = M^\pm_{num}$.*

Démonstration. C'est clair. □

B.2. **Seconde correction.** Celle-ci ne marche que pour les $M^\pm$ mais s'applique à toute cohomologie de Weil, classique ou non.

D'après le théorème 9.2.1 c), pour toute cohomologie de Weil H on a $Mot^\pm_H = (Mot_H)_{\mathrm{kim}}$. D'autre part, la proposition 9.1.14 implique que le foncteur $(Mot_H)_{\mathrm{kim}} \to (Mot_{\mathrm{num}})_{\mathrm{kim}}$ est essentiellement surjectif. Ainsi, $Mot^\pm_{\mathrm{num}} = (Mot_{\mathrm{num}})_{\mathrm{kim}}$ pour toute cohomologie de Weil H. □

Table de concordance pour les références de [1]**.**

– Preuve du théorème 1 : remplacer [3, 6.7.3] par [3, 8.2.2].

– Preuve de la proposition 2 : remplacer [3, 6.7.9 et 1.4.2b] par [3, 8.3.1 et 1.4.4b].

– Début de **2** : remplacer [3, 9.2.1, 9.7.3, 11.3.5] par [3, 13.2.1, 13.7.1, 15.3.5].

APPENDICE C. FINITE DIMENSIONALITY OF REDUCTIVE ENVELOPES, BY PETER O'SULLIVAN

The object of this appendix is to determine when proreductive envelopes are finite dimensional and when their formation is compatible with extension of scalars. Let k be a field of characteristic 0, and let H be an affine k-group. Then the proreductive envelope of H is finite dimensional if and only if H is finite dimensional with prounipotent radical of dimension ≤ 1 (Theorem C.5). This is a consequence of Theorem C.1 characterising the affine k-groups with prounipotent radical of dimension ≤ 1 as those whose representations are "rigid". If the prounipotent radical U of H has dimension 1 the proreductive envelope of H is the semidirect product of H/U by $SL(2)$ (Theorem C.4). Let k' be an extension of k. Then ${}^{\mathrm{p}}\operatorname{Red}(H_{k'}) \to {}^{\mathrm{p}}\operatorname{Red}(H)_{k'}$ is an isomorphism if and only if either k' is algebraic over k or the prounipotent radical of H is of dimension ≤ 1 (Theorem C.3). This follows from Theorem C.2 which gives the conditions under which every representation of H over k' is a direct summand of one defined over k.

Throughout this appendix k denotes a field of characteristic 0. Unless otherwise stated, representations are assumed to be finite dimensional.

C.1. **Families of representations.** The object of this section is to prove Theorems C.1 and C.2. The proofs are based on Lemmas C.4 and C.5. Lemma C.5 is necessary also for the proof of Theorem C.4.

Lemma C.1. *Suppose that k is algebraically closed. Let M be a connected reductive k-group and let V be a representation of M. Denote by P the set of dominant weights of M relative to some maximal torus T and Borel subgroup $B \supset T$ of M, and for each $\mu \in P$ let V_μ be a representation of M with highest weight μ. Then if $\tau \in P$ is such that $\tau + \lambda \in P$ for each λ in the set Λ of weights of V, there is an M-isomorphism $V \otimes_k V_\tau \simeq \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_{\tau+\lambda}^{m(\lambda)}$, where $m(\lambda)$ is the multiplicity of λ in V.*

Proof. Denote by χ and χ_μ for $\mu \in P$ the respective restrictions of the characters of V and V_μ to T. It suffices to show that $\chi\chi_\tau = \sum_{\lambda\in\Lambda} m(\lambda)\chi_{\tau+\lambda}$.

Let W be the Weyl group of M relative to T and let δ be half the sum of the positive roots of M relative to T and B. For any π in the character group of T, write $e(\pi)$ for π regarded as an element of $k[T]$. Then we have

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} m(\lambda)e(\lambda) \sum_{w\in W} (\det w)e(w(\tau+\delta)) = \sum_{w\in W} (\det w)e(w(\tau+\delta)) \sum_{\lambda\in\Lambda} m(w\lambda)e(w\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} m(\lambda) \sum_{w\in W} (\det w)e(w(\tau+\lambda+\delta))$$

since Λ is stable under W and $m(w\lambda) = m(\lambda)$ for $w \in W$ and $\lambda \in \Lambda$. Thus if $Q = \sum_{w\in W}(\det w)e(w\delta)$, we have by Weyl's character formula

$$Q\chi\chi_\tau = Q\sum_{\lambda\in\Lambda} m(\lambda)\chi_{\tau+\lambda},$$

whence the required result, since $Q \neq 0$. □

Lemma C.2. *Suppose that k is algebraically closed. Let M be a non-commutative connected reductive k-group and let V be a faithful irreducible representation of M. Suppose that V has, relative to some maximal torus of M, at most 3 distinct* *non-zero weights. Then either the derived group M' of M is simple of type A_1 and V is of dimension 2 or 3, or M' is simple of type A_2 and V is of dimension 3.*

Proof. We may suppose that $M = M'$ is semisimple. Let $\tilde{M}$ be the universal cover of M, so that V may also be regarded as a representation of $\tilde{M}$. Let T be a maximal torus and $B \supset T$ a Borel subgroup of M, let X be the character group of T and W the Weyl group of M relative to T, and let $\lambda \in X$ be the highest weight of V relative to T and B. Since V has at most 3 distinct non-zero weights, the orbit Λ of λ under W has at most 3 elements. There is a decomposition $W = W_1 \times \cdots \times W_r$ corresponding to the simple factors of $\tilde{M}$ such that the representation of W on $X \otimes \mathbf{R}$ is the direct sum of non-trivial irreducible representations X_i of W_i for $i = 1, \ldots, r$. By faithfulness of the M-representation V, the projection of λ onto each X_i is non-zero. Thus $r = 1$ and $\tilde{M}$ is simple, since otherwise Λ would have at least 4 elements. The affine subspace of $X \otimes \mathbf{R}$ generated by Λ is of dimension ≤ 2 and is stable under W, so by irreducibility the rank $\dim_{\mathbf{R}}(X \otimes \mathbf{R})$ of $\tilde{M}$ is ≤ 2. Since W contains a rotation of order 4 when $\tilde{M}$ is of type B_2 and of order 6 when $\tilde{M}$ is of type G_2, it follows that $\tilde{M}$ must be of type A_1 or A_2.

If $\tilde{M}$ is of type A_1 any $\tilde{M}$-representation of dimension ≥ 4 has at least 4 distinct non-zero weights. If $\tilde{M}$ is of type A_2, let τ_1 and τ_2 be the highest weights of the two fundamental representations of $\tilde{M}$ relative to T and B, so that the simple positive roots of $\tilde{M}$ are $\mu_1 = 2\tau_1 - \tau_2$ and $\mu_2 = -\tau_1 + 2\tau_2$, and $\lambda = m_1\tau_1 + m_2\tau_2$ for integers $m_i \geq 0$. One of m_1, m_2 must be 0, since otherwise Λ would contain 6 elements. Thus either $\lambda = \tau_1$ or $\lambda = \tau_2$, since if for example $\lambda = m_1\tau_1$ with $m_1 \geq 2$ then $\lambda - \mu_1$ would be a non-zero weight of V not conjugate to λ under W, so V would have at least 6 distinct non-zero weights. $\square$

Lemma C.3. *Suppose that k is algebraically closed. Let M be a connected reductive k-group and let V be a representation of M which is either the direct sum of two non-isomorphic 1-dimensional representations or is irreducible of dimension 2 or 3. Then there exists a family $(V^i_j, r^i_j, s^i_j)_{i,j \in \mathbf{N}}$, with the V^i_j irreducible representations of M and the $r^i_j : V \otimes_k V^i_j \to V^{i+1}_j$ and $s^i_j : V \otimes_k V^i_{j+1} \to V^i_j$ non-zero M-homomorphisms, such that :*

(i) *for each integer m the V^i_j with $i - j = m$ are pairwise non-isomorphic ;*

(ii) *the restrictions of*

$$r^{i+1}_j \circ (V \otimes r^i_j) : V \otimes_k V \otimes_k V^i_j \to V^{i+2}_j,$$
$$s^i_{j-2} \circ (V \otimes s^i_{j-1}) : V \otimes_k V \otimes_k V^i_j \to V^i_{j-2},$$
$$s^{i+1}_{j-1} \circ (V \otimes r^i_j) + r^i_{j-1} \circ (V \otimes s^i_{j-1}) : V \otimes_k V \otimes_k V^i_j \to V^{i+1}_{j-1},$$

respectively to $\bigwedge^2 V \otimes_k V^i_j$, $\bigwedge^2 V \otimes_k V^i_j$, $\bigwedge^2 V \otimes_k V^i_j$, are 0 for $i, j \in \mathbf{N}$.

Proof. We may suppose that V is a faithful representation of M. If $V \simeq V_1 \oplus V_2$ with V_1 and V_2 1-dimensional and $p_1 : V \to V_1$ and $p_2 : V \to V_2$ are the projections, take $V^i_j = V_1^{\otimes i} \otimes_k (V_2^\vee)^{\otimes j}$ and (modulo canonical isomorphisms) $r^i_j = p_1 \otimes V^i_j$ and $s^i_j = p_2 \otimes V^i_{j+1}$. It is immediately checked that (i) and (ii) hold.

Now suppose that V is irreducible of dimension 2 or 3. Let T and $B \supset T$ be a maximal torus and Borel subgroup of M, and write λ and $\lambda^\vee$ for the respective highest weights of V and $V^\vee$ relative to T and B. Let V_j^i be an irreducible representation of M with highest weight $i\lambda + j\lambda^\vee$. Then (i) clearly holds because $\lambda + \lambda^\vee \neq 0$. All weights of $\bigwedge^2 V \otimes_k V_j^i$ are of the form $(i+2)\lambda + j\lambda^\vee - \pi$ where $\pi \neq 0$ is a sum of positive roots of M, so $\mathrm{Hom}_M(\bigwedge^2 V \otimes_k V_j^i, V_j^{i+2}) = 0$. Similarly

$$\mathrm{Hom}_M(\bigwedge^2 V \otimes_k V_{j+2}^i, V_j^i) = \mathrm{Hom}_M(V_{j+2}^i, \bigwedge^2 V^\vee \otimes_k V_j^i) = 0.$$

Thus it suffices to construct $r_j^i \neq 0$ and $s_j^i \neq 0$ for $i, j \in \mathbf{N}$ such that the restriction of the third homomorphism of (ii) to $\bigwedge^2 V \otimes_k V_{j+1}^i$ is 0.

Let $t_j^i \neq 0$ be an element of the highest weight space of V_j^i and let $u_+ \neq 0$ be an element of the highest weight space of V and $u_- \neq 0$ an element of the lowest weight space of V. The weights of t_j^i, u_+ and u_- are thus respectively $i\lambda + j\lambda^\vee$, λ and $-\lambda^\vee$. The k-linear map $V \to k$ which sends u_- to 1 and which is 0 on the other weight spaces of V is an element $u_+^\vee \neq 0$ of the highest weight space of $V^\vee$. Now $V \otimes_k V_j^i$ contains the weight $(i+1)\lambda + j\lambda^\vee$ with multiplicity 1, and all of its other weights are of the form $(i+1)\lambda + j\lambda^\vee - \pi$ where $\pi \neq 0$ is a sum of positive roots. Thus there is a unique M-homomorphism $r_j^i : V \otimes_k V_j^i \to V_j^{i+1}$ such that

$$r_j^i(u_+ \otimes t_j^i) = t_j^{i+1}. \tag{C.1}$$

Similarly there is a unique M-homomorphism $q_j^i : V_{j+1}^i \to V^\vee \otimes_k V_j^i$ such that $q_j^i(t_{j+1}^i) = u_+^\vee \otimes t_j^i$, whence for any constant $C_n = C_n(M, V)$ there is a unique M-homomorphism $s_j^i : V \otimes_k V_{j+1}^i \to V_j^i$ such that

$$s_j^i(u_- \otimes t_{j+1}^i) = C_{i+j} t_j^i. \tag{C.2}$$

Choose C_n as follows. By Lemma (C.2), either the derived group M' of M is of type A_1 and V is of dimension 2 or 3, or M' is of type A_2 and V is of dimension 3. Set

$$C_n = \begin{cases} 1/(n+2) & \text{if } M' \text{ is type } A_1 \text{ and } V \text{ is of dimension } 2, \\ (n+1)/(2n+3) & \text{if } M' \text{ is of type } A_1 \text{ and } V \text{ is of dimension } 3, \\ 1/(n+3) & \text{if } M' \text{ is of type } A_2. \end{cases} \tag{C.3}$$

The V_j^i, r_j^i, s_j^i just constructed are compatible with restriction from M to M', so to check that the third homomorphism of (ii) has restriction 0 to $\bigwedge^2 V \otimes_k V_{j+1}^i$ we may suppose that $M' = M$. We show first that $\mathrm{Hom}_M(\bigwedge^2 V \otimes_k V_{j+1}^i, V_j^{i+1})$ is 1-dimensional. This is immediate when M is of type A_1, since then $V_j^i \simeq V_0^{i+j}$ and $\bigwedge^2 V$ is either trivial 1-dimensional or M-isomorphic to V according as V is 2-dimensional or 3-dimensional. When M is of type A_2, V and $V^\vee$ are the two fundamental representations of M, so the dominant weights of M relative to T and B are the $i\lambda + j\lambda^\vee$ for $i, j \geq 0$. The weights of V are λ, $-\lambda + \lambda^\vee$, $-\lambda^\vee$, and $\bigwedge^2 V \simeq V^\vee$. Applying Lemma C.1 with V replaced by $\bigwedge^2 V$ and with $\tau =$

$i\lambda + (j+1)\lambda^\vee$ shows that $\bigwedge^2 V \otimes_k V^i_{j+1}$ contains V^{i+1}_j with multiplicity 1 when $i \geq 1, j \geq 0$. Similarly, when $j \geq 1$, $\bigwedge^2 V^\vee \otimes_k V^1_j$ contains V^0_{j+1} with multiplicity 1, whence $\bigwedge^2 V \otimes_k V^0_{j+1}$ contains V^1_j with multiplicity 1. That $\bigwedge^2 V \otimes_k V^0_1 \simeq V^\vee \otimes_k V^\vee$ contains $V^1_0 \simeq V$ with multiplicity 1 is clear. Thus $\mathrm{Hom}_M(\bigwedge^2 V \otimes_k V^i_{j+1}, V^{i+1}_j)$ is in all cases 1-dimensional. The restriction to $\bigwedge^2 V \otimes_k V^i_{j+1}$ of the third homomorphism of (iii) will thus be 0 provided that that the images of $(u_+ \otimes u_- - u_- \otimes u_+) \otimes t^i_{j+1}$ under $r^i_j \circ (V \otimes s^i_j)$ and $-s^{i+1}_j \circ (V \otimes r^i_{j+1})$ are non-zero and coincide. Now

$$s^i_j(u_+ \otimes t^i_{j+1}) = 0 \tag{C.4}$$

because the difference between the weight $(i+1)\lambda + (j+1)\lambda^\vee$ of $u_+ \otimes t^i_{j+1}$ and the highest weight $i\lambda + j\lambda^\vee$ of V^i_j is non-zero and dominant. Thus by (C.1), (C.2) and (C.3) it is enough to show that

$$s^{i+1}_j(u_+ \otimes r^i_{j+1}(u_- \otimes t^i_{j+1})) = (C_{i+j+1} - C_{i+j})t^{i+1}_j. \tag{C.5}$$

Write $\mathfrak{m}$ for the Lie algebra of M. Suppose first that M is of type A_1 and V is of dimension 2. Let e be an element of the positive root subspace of $\mathfrak{m}$, chosen so that $eu_- = u_+$, and let f, h be such that f is in the negative root subspace of $\mathfrak{m}$ and $[e,f] = h$, $[h,e] = 2e$, and $[h,f] = -2f$. Then $hu_+ = u_+$, $hu_- = -u_-$, $fu_+ = u_-$, and $ht^i_j = (i+j)t^i_j$. We have

$$\begin{aligned} r^i_{j+1}(u_- \otimes t^i_{j+1}) &= \frac{1}{i+j+2} f t^{i+1}_{j+1}, \\ u_+ \otimes f t^{i+1}_{j+1} &= f(u_+ \otimes t^{i+1}_{j+1}) - u_- \otimes t^{i+1}_{j+1}, \end{aligned}$$

where the constant $1/(i+j+2)$ in the first equality is determined by acting with e and using (C.1). Using (C.4), (C.2), and (C.3) we obtain (C.5).

When M is of type A_1 and V is of dimension 3, choose e and f, h such that $e^2 u_- = u_+$ and $[e,f] = h$, $[h,e] = 2e$, and $[h,f] = -2f$. Then $hu_+ = 2u_+$, $hu_- = -2u_-$, $fu_+ = 2eu_-$, $f^2 u_+ = 4u_-$, and $ht^i_j = 2(i+j)t^i_j$. We have

$$\begin{aligned} r^i_{j+1}(u_- \otimes t^i_{j+1}) &= \frac{1}{4(i+j+2)(2i+2j+3)} f^2 t^{i+1}_{j+1}, \\ u_+ \otimes f^2 t^{i+1}_{j+1} &= f(u_+ \otimes f t^{i+1}_{j+1} - f u_+ \otimes t^{i+1}_{j+1}) + 4u_- \otimes t^{i+1}_{j+1}, \end{aligned}$$

where the constant in the first equality is determined by acting with e^2. The images under s^{i+1}_j of $u_+ \otimes f t^{i+1}_{j+1}$ and $fu_+ \otimes t^{i+1}_{j+1}$ are 0 by weights, so using (C.2) and (C.3) we obtain (C.5).

Finally suppose that M is of type A_2. Then the simple positive roots of M are $\mu = 2\lambda - \lambda^\vee$ and $\mu^\vee = -\lambda + 2\lambda^\vee$. Let e and $e^\vee$ be elements of the root subspaces of $\mathfrak{m}$ corresponding respectively to μ and $\mu^\vee$. We may suppose e and $e^\vee$ chosen so that $ee^\vee u_- = u_+$. Let f, $f^\vee$, h, $h^\vee$ be the unique elements of $\mathfrak{m}$ such that f and $f^\vee$ lie in the root subspaces corresponding respectively to $-\mu$ and $-\mu^\vee$ and $[e,f] = h$, $[h,e] = 2e$, $[h,f] = -2f$, $[e^\vee, f^\vee] = h^\vee$, $[h^\vee, e^\vee] = 2e^\vee$, $[h^\vee, f^\vee] = -2f^\vee$. Then $[h, h^\vee] = 0$, $[h, e^\vee] = -e^\vee$, $[h^\vee, e] = -e$, $[h, f^\vee] = f^\vee$, $[h^\vee, f] = f$, and $[e, f^\vee] = [e^\vee, f] = 0$. Also $eu_- = f^\vee u_+ = 0$, $e^\vee u_- = fu_+$, $hu_+ = u_+$,

$h^\vee u_+ = 0$, $hu_- = 0$, $h^\vee u_- = -u_-$, $f^\vee f u_+ = u_-$, and $ht^i_j = it^i_j$, $h^\vee t^i_j = jt^i_j$, $et^i_j = e^\vee t^i_j = 0$. We have

$$\begin{aligned} r^i_{j+1}(u_- \otimes t^i_{j+1}) &= \frac{1}{(i+1)(i+j+3)}((i+2)f^\vee f - (i+1)ff^\vee)t^{i+1}_{j+1}, \\ u_+ \otimes f^\vee f t^{i+1}_{j+1} &= f^\vee(u_+ \otimes f t^{i+1}_{j+1}), \\ u_+ \otimes ff^\vee t^{i+1}_{j+1} &= f(u_+ \otimes f^\vee t^{i+1}_{j+1}) - f^\vee(fu_+ \otimes t^{i+1}_{j+1}) + u_- \otimes t^{i+1}_{j+1}, \end{aligned}$$

where the coefficients in the first equality are determined by acting with $ee^\vee$ and e. The respective weights of $u_+ \otimes ft^{i+1}_{j+1}$, $u_+ \otimes f^\vee t^{i+1}_{j+1}$, and $fu_+ \otimes t^{i+1}_{j+1}$ differ from the highest weight of V^{i+1}_j by the positive roots $\mu^\vee$, μ and $\mu^\vee$, so the image under s^{i+1}_j of all three elements is 0. Using (C.2) and (C.3) we obtain (C.5). □

Let H be an affine k-group and let S be a k-scheme. A family of representations of H over S, or simply a representation of H over S, is a locally free $\mathcal{O}_S$-module $\mathcal{V}$ of finite type together with a homomorphism $H_S \to GL(\mathcal{V})$ over S. Suppose that H is a semidirect product $U \rtimes M$. Then M acts on U by group automorphisms. A representation of H over S is the same as a representation $\mathcal{V}$ of M together with an M-homomorphism $\rho : U_S \to GL(\mathcal{V})$ over S. If U is of finite type and V is its Lie algebra, the M-structure on U defines a structure of M-Lie algebra on V. ¿From ρ we then obtain a homomorphism $\sigma : V \otimes_k \mathcal{O}_S \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{V})$ of $(M, \mathcal{O}_S)$-Lie algebras.

Suppose that U is a vector group and S is quasi-compact. Then the ρ correspond uniquely to the σ for which $\sigma^n = 0$ for some n. It follows that a representation of H over S is the same as a pair $(\mathcal{V}, \mu)$, where $\mathcal{V}$ is a representation of M over S and where μ is an M-homomorphism

(C.6) $$\mu : V \otimes_k \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$

of $\mathcal{O}_S$-modules such that the

(C.7) $$\mu^{(n)} : V^{\otimes n} \otimes_k \mathcal{V} \to \mathcal{V},$$

defined inductively by $\mu^{(0)} = 1_\mathcal{V}$ and $\mu^{(n)} = \mu \circ (V \otimes_k \mu^{(n-1)})$, are 0 for n large, and such that the restriction of $\mu^{(2)}$ to $\bigwedge^2 V \otimes_k \mathcal{V}$ is 0 (corresponding to $[\sigma, \sigma] = 0$).

When $S = \mathrm{Spec}(k)$ the images of the $\mu^{(n)}$ define an H-invariant filtration on $\mathcal{V}$. Further H acts on the associated graded $\mathrm{Gr}_\mu \mathcal{V}$ through M, and μ induces an M-homomorphism $V \otimes_k \mathrm{Gr}^n_\mu \mathcal{V} \to \mathrm{Gr}^{n+1}_\mu \mathcal{V}$ for each n.

Lemma C.4. *Suppose that k is algebraically closed, and let H be a connected affine k-group with prounipotent radical of dimension > 1. Then there exists a representation of H over the affine line $\mathbf{A}^1$ with fibres at k-points of $\mathbf{A}^1$ pairwise non-isomorphic.*

Proof. We may suppose that H is of finite type over k. If U is the prounipotent radical of H and $Z_1 \subset Z_2 \subset \cdots \subset Z_{m-1} \subset Z_m = U$ is the upper central series of U, then the Z_i are normal subgroups of H, and Z_m/Z_{m-1} is of dimension > 1 since U is of dimension > 1. Factoring out Z_{m-1}, we may suppose that U is commutative. We have $H = U \rtimes M$ with M a connected reductive subgroup of H. Write V for the Lie algebra of U. The action of M on U defines a representation of M on V. If $\bar{U}$ is an M-quotient of U of dimension > 1 we may replace $H = U \rtimes M$ by its quotient $\bar{U} \rtimes M$, so we may suppose that V is either irreducible of dimension > 1 or is the direct sum of two 1-dimensional representations. It will be convenient to distinguish the following three cases :

I V is the direct sum of two isomorphic 1-dimensional representations ;

II V is either the direct sum of two non-isomorphic 1-dimensional representations, or is irreducible of dimension 2 or 3 ;

III V is irreducible of dimension > 3.

Suppose I holds. Then we may identify U with $\mathbb{G}_a^2$, where M acts on both factors as the same character χ. With $\mathbf{A}^1 = \operatorname{Spec}(k[t])$, we may identify the endomorphism ring of $(\mathbb{G}_a)_{\mathbf{A}^1}$ over $\mathbf{A}^1$ with $k[t]$. If M acts on $(\mathbb{G}_a)_{\mathbf{A}^1}$ as χ, then the semidirect product over $\mathbf{A}^1$ of $(1, -t) : U_{\mathbf{A}^1} = (\mathbb{G}_a)^2_{\mathbf{A}^1} \to (\mathbb{G}_a)_{\mathbf{A}^1}$ with $M_{\mathbf{A}^1}$ is a homomorphism $p : H_{\mathbf{A}^1} \to (\mathbb{G}_a \rtimes M)_{\mathbf{A}^1}$ over $\mathbf{A}^1$. Given a faithful representation $\tau : \mathbb{G}_a \rtimes M \to GL(n)$, the kernel of the fibre above $x \in \mathbf{A}^1(k) = k$ of $\tau_{\mathbf{A}^1} \circ p : H_{\mathbf{A}^1} \to GL(n)_{\mathbf{A}^1}$ is the subgroup $\binom{x}{1} : \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a^2 = U$ of $U \subset H$. The fibres of the representation $\tau_{\mathbf{A}^1} \circ p$ of H over $\mathbf{A}^1$ are thus pairwise non-isomorphic.

Now suppose II holds. Apply Lemma C.3 to obtain a family $(V_j^i, r_j^i, s_j^i)_{i,j \in \mathbf{N}}$, with $r_j^i : V \otimes_k V_j^i \to V_j^{i+1}$ and $s_j^i : V \otimes_k V_{j+1}^i \to V_j^i$, such that (i) and (ii) of Lemma C.3 hold. Write $\mathbf{A}^1 = \operatorname{Spec}(k[t])$, and define a family $(\mathcal{E}_j^i, f_j^i, g_j^i)_{i,j \in \mathbf{N}}$ of free $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^1}$-modules of finite type $\mathcal{E}_j^i$ and $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^1}$-homomorphisms $f_j^i : \mathcal{E}_j^i \to \mathcal{E}_j^{i+1}$, $g_j^i : \mathcal{E}_{j+1}^i \to \mathcal{E}_j^i$ by $\mathcal{E}_0^0 = \mathcal{E}_0^1 = \mathcal{E}_1^0 = \mathcal{E}_1^2 = \mathcal{E}_2^1 = \mathcal{E}_2^2 = \mathcal{O}_{\mathbf{A}^1}$, $\mathcal{E}_1^1 = \mathcal{O}_{\mathbf{A}^1}^2$, $\mathcal{E}_j^i = 0$ for all other i, j, and $f_0^0 = g_0^0 = f_2^1 = g_1^2 = 1$ and $f_1^0 = \binom{1}{0}$, $g_0^1 = (1, -t)$, $g_1^1 = \binom{0}{1}$, $f_1^1 = (-1, 1)$. The non-zero $\mathcal{E}$, f, g thus form a commutative diagram

(C.8)
$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_{\mathbf{A}^1} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "\binom{0}{1}"] & \mathcal{O}_{\mathbf{A}^1} \arrow[d, "1"] \\
\mathcal{O}_{\mathbf{A}^1} \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "1"] & \mathcal{O}_{\mathbf{A}^1}^2 \arrow[r, "{(-1,1)}"] \arrow[d, "{(1,-t)}"] & \mathcal{O}_{\mathbf{A}^1} \\
\mathcal{O}_{\mathbf{A}^1} \arrow[r, "1"] & \mathcal{O}_{\mathbf{A}^1} &
\end{tikzcd}$$

Now set $\mathcal{V} = \bigoplus_{i,j \in \mathbf{N}} V_j^i \otimes \mathcal{E}_j^i$ and let $\mu : V \otimes_k \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ have component

$$V \otimes_k V_j^i \otimes_k \mathcal{E}_j^i \to V_{j'}^{i'} \otimes \mathcal{E}_{j'}^{i'}$$

given by $r_j^i \otimes f_j^i$ if $(i', j') = (i + 1, j)$, $s_j^i \otimes g_j^i$ if $(i', j' + 1) = (i, j)$, and 0 in all other cases. Clearly $\mu^{(3)} = 0$, and the restriction of $\mu^{(2)}$ to $\bigwedge^2 V \otimes_k \mathcal{V}$ is 0 by (ii) of Lemma C.3 together with the fact that (C.8) commutes. Thus $(\mathcal{V}, \mu)$ is a representation of H over $\mathbf{A}^1$.

We now show that an isomorphism between the fibres $(\mathcal{V}_x, \mu_x)$ and $(\mathcal{V}_y, \mu_y)$ of $(\mathcal{V}, \mu)$ at the k-points x and y of $\mathbf{A}^1$ induces an isomorphism between the fibres at x and y of the diagram (C.8). This will give an isomorphism $k^2 = (\mathcal{E}_1^1)_x \simeq (\mathcal{E}_1^1)_y = k^2$ which sends $\mathrm{Im}(g_1^1)_x$, $\mathrm{Ker}(f_1^1)_x$, $\mathrm{Im}(f_1^0)_x$, $\mathrm{Ker}(g_0^1)_x$ respectively to $\mathrm{Im}(g_1^1)_y$, $\mathrm{Ker}(f_1^1)_y$, $\mathrm{Im}(f_1^0)_y$, $\mathrm{Ker}(g_0^1)_y$, hence an isomorphism $\mathbf{P}^1 \simeq \mathbf{P}^1$ which sends $0, 1, \infty, x$ respectively to $0, 1, \infty, y$, and so will imply $x = y$ as required.

For any x we have $\mathcal{V}_x = \bigoplus_{i,j\in\mathbf{N}} V_j^i \otimes_k E_j^i$ with E_j^i the fibre of $\mathcal{E}_j^i$ at x. Write $\mathcal{V}_x^n = \bigoplus_{i-j=n} V_j^i \otimes_k E_j^i$, so that $\mathcal{V}_x = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{V}_x^n$. Then $\mu_x : V \otimes_k \mathcal{V}_x \to \mathcal{V}_x$ restricts to an M-homomorphism

$$\mu_x^n : V \otimes_k \mathcal{V}_x^n \to \mathcal{V}_x^{n+1}$$

for each n. Further μ_x^n is an epimorphism for $n \geq -1$ because its composite with each projection $\mathcal{V}_x^{n+1} \to V_j^i \otimes_k E_j^i$ is an epimorphism by (C.8), and the V_j^i with $i - j = n + 1$ are pairwise non-M-isomorphic by (i) of Lemma C.3. Since $\mu_x^n = 0$ for $n < -1$, it follows that the image of $\mu_x^{(n)} : V^{\otimes n} \otimes_k \mathcal{V}_x \to \mathcal{V}_x$ is $\bigoplus_{m\geq n-1} \mathcal{V}_x^m$. Hence $\mathrm{Gr}^n_{\mu_x} \mathcal{V}_x = \mathcal{V}_x^{n-1}$, and $V \otimes_k \mathrm{Gr}^n_{\mu_x} \mathcal{V}_x \to \mathrm{Gr}^{n+1}_{\mu_x} \mathcal{V}_x$ induced by μ_x coincides with μ_x^{n-1}. Thus any isomorphism $\theta : (\mathcal{V}_x, \mu_x) \to (\mathcal{V}_y, \mu_y)$ induces on passage to the associated graded an isomorphism

$$\theta^n : \mathcal{V}_x^n \to \mathcal{V}_y^n$$

for each n such that the diagram

$$\begin{array}{ccc} V \otimes_k \mathcal{V}_x^n & \xrightarrow{\mu_x^n} & \mathcal{V}_x^{n+1} \\ \downarrow{\scriptstyle V\otimes\theta^n} & & \downarrow{\scriptstyle \theta^{n+1}} \\ V \otimes_k \mathcal{V}_y^n & \xrightarrow{\mu_y^n} & \mathcal{V}_y^{n+1} \end{array} \tag{C.9}$$

commutes. Since for each n the V_j^i with $i - j = n$ are pairwise non-M-isomorphic by (i) of Lemma C.3, there are k-isomorphisms $\theta_j^i : E_j^i \to E_j^i$ such that

$$\theta^n = V_j^i \otimes_k \theta_j^i.$$

From (C.9) it then follows that

$$\begin{aligned} r_j^i \otimes (\theta_j^{i+1}(f_j^i)_x) &= r_j^i \otimes ((f_j^i)_y \theta_j^i) \\ s_j^i \otimes (\theta_j^i(g_j^i)_x) &= s_j^i \otimes ((g_j^i)_y \theta_{j+1}^i) \end{aligned}$$

for $i, j \geq 0$. Since the r_j^i and s_j^i are non-zero,

$$\begin{aligned} \theta_j^{i+1}(f_j^i)_x &= (f_j^i)_y \theta_j^i \\ \theta_j^i(g_j^i)_x &= (g_j^i)_y \theta_{j+1}^i, \end{aligned}$$

so the θ_j^i give an isomorphism between the fibres of (C.8) at x and y.

Finally suppose III holds. In the notation of Lemma C.1, choose $\tau \in P$ such that $\tau + \lambda \in P$ and $\tau + \lambda \notin \Lambda$ for $\lambda \in \Lambda$. Then $V \otimes_k V_\tau \simeq \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_{\tau+\lambda}^{m(\lambda)}$. Choose by Lemma C.2 distinct non-zero elements λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 of Λ, and write $V_0 = V_\tau$ and $V_j = V_{\tau+\lambda_j}$, $j = 1, 2, 3, 4$. The V_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ are then pairwise non-isomorphic irreducible representations of M, and V_j is a direct summand of $V \otimes_k V_0$ for $j = 1, 2, 3, 4$. Let $r_j : V \otimes_k V_0 \to V_j$ be a non-zero M-homomorphism for

$j = 1, 2, 3, 4$. With $\mathbf{A}^1 = \mathrm{Spec}(k[t])$, set $\mathcal{E}_0 = \mathcal{O}^2_{\mathbf{A}^1}$, $\mathcal{E}_j = \mathcal{O}_{\mathbf{A}^1}$ for $j = 1, 2, 3, 4$, and define $f_j : \mathcal{E}_j \to \mathcal{E}_0$ for $j = 1, 2, 3, 4$ by $f_1 = (1, 0)$, $f_2 = (-1, 1)$, $f_3 = (0, 1)$, $f_4 = (1, -t)$. Now set $\mathcal{V} = \bigoplus_{i=0}^4 V_i \otimes_k \mathcal{E}_i$ and let $\mu : V \otimes_k \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ have component

$$V \otimes_k V_i \otimes \mathcal{E}_i \to V_{i'} \otimes \mathcal{E}_{i'}$$

given by $r_j \otimes f_j$ when $i = 0, i' = j$ and $j = 1, 2, 3, 4$, with all other components 0. Then $\mu^{(2)} = 0$ so $(\mathcal{V}, \mu)$ is a representation of H over $\mathbf{A}^1$.

Suppose that $\theta : \mathcal{V}_x \to \mathcal{V}_y$ is an isomorphism between the fibres $(\mathcal{V}_x, \mu_x)$ and $(\mathcal{V}_y, \mu_y)$ at x and y. Since $\mathcal{V}_x = \bigoplus_{i=0}^4 V_i \otimes_k E_i$ with E_i the fibre of $\mathcal{E}_i$ at x, and since the V_i are pairwise non-M-isomorphic, we have $\theta = \bigoplus_{i=0}^4 V_i \otimes \theta_i$ for isomorphisms $\theta_i : E_i \to E_i$. Compatibility of θ with μ_x and μ_y then shows that for $j = 1, 2, 3, 4$

$$r_j \otimes (\theta_j (f_j)_x) = r_j \otimes ((f_j)_y \theta_0)$$

whence

$$\theta_j (f_j)_x = (f_j)_y \theta_0$$

since $r_j \neq 0$. Thus the θ_i give an isomorphism $k^2 = E_0 \simeq E_0 = k^2$ which sends $\mathrm{Ker}(f_j)_x$ to $\mathrm{Ker}(f_j)_y$ for $j = 1, 2, 3, 4$, and hence an isomorphism $\mathbf{P}^1 \simeq \mathbf{P}^1$ which sends $0, 1, \infty, x$ respectively to $0, 1, \infty, y$. Thus $x = y$ as required. $\square$

Lemma C.5. *Let H be an affine k-group with prounipotent radical U of dimension ≤ 1. Then there exists a k-homomorphism $H \to GL(2)$ with restriction to U an embedding. If g is such a k-homomorphism and $p : H \to H/U$ is the projection then every indecomposable representation of H is isomorphic to $g^* V \otimes_k p^* W$ for some representation V of $GL(2)$ and W of H/U.*

Proof. We may suppose that U is of dimension 1. Then $M = H/U$ acts on U as a character χ. Taking a Levi decomposition of H and identifying U with $\mathbb{G}_a$ we may suppose $H = \mathbb{G}_a \rtimes_\chi M$. The restriction to U of the k-homomorphism $H \to GL(2)$ defined by

$$am \mapsto \begin{pmatrix} \chi(m) & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

for points a of $\mathbb{G}_a$ and m of M is then an embedding.

A representation of H on a k-vector space E is a representation of M on E together with an M-homomorphism $E \otimes_k \chi \to E$ such that $E \otimes_k \chi^r \to E$ induced by iteration is 0 for r large. Equivalently, a representation of H on E is a representation of M on E together with a structure of module on E over the polynomial ring $k[n]$ such that n acts nilpotently and $mne = \chi(m)nme$ for each k-algebra k', $m \in M(k')$ and $e \in E \otimes_k k'$.

If D is the standard 2-dimensional representation of $GL(2)$, then the kernel of $g^* D \to g^* D$ defined by the action of n is 1-dimensional and stable under M. Let $d_0 \neq 0$ be an element of a 1-dimensional M-stable subspace of $g^* D$ complementary to this kernel. Then $d_1 = nd_0 \neq 0$, $nd_1 = 0$, and $md_0 = \chi_0(m) d_1$, $md_1 = \chi(m)\chi_0(m) d_1$ for points m of M and some character χ_0 of M. Thus if V is the rth symmetric power of D, there is a basis $v_0, \dots, v_r$ of $g^* V$ for which $mv_i = \chi^i(m)\chi_0^r(m) v_i$ and $nv_i = v_{i+1}$ if $i < r$ and $nv_r = 0$.

Now let E be a representation of H. Let E_0 be an M-subrepresentation of E, and suppose that $n^{r+1}E = 0$. Then if $W = E_0 \otimes \chi_0^{-r}$, the assignment $v_i \otimes w \mapsto n^i w$ defines an H-homomorphism $\varphi : g^*V \otimes_k p^*W \to E$. For the second statement, it will thus suffice to show that if E is H-indecomposable, and if r and E_0 are chosen so that $n^r E \neq 0$, $n^{r+1}E = 0$, and $E_0 \oplus nE = E$, then φ is an isomorphism, i.e. each $e \in E$ has a unique decomposition

$$e = e_0 + ne_1 + \cdots + n^r e_r \tag{C.10}$$

with $e_i \in E_0$ for $i = 0, \ldots, r$. In fact from $E_0 \oplus nE = E$ it follows inductively that $E = E_0 + \cdots + n^i E_0 + n^{i+1}E$ so taking $i = r$ shows that each $e \in E$ has a decomposition (C.10). To prove the uniqueness, write E'' for the kernel of n^r restricted to E_0 and let E' be an M-subspace of E_0 such that $E_0 = E' \oplus E''$. Since $n^r E \neq 0$ we have $E' \neq 0$. If $e' = \sum_{i=0}^r n^i e'_i$ and $e'' = \sum_{i=0}^r n^i e''_i$ with $e'_i \in E'$ and $e''_i \in E''$, then $e' = e''$ implies $e'_i = 0$ for $i = 0, 1, \ldots, r$, as is seen by induction on i : given that $e'_0 = e'_1 = \cdots = e'_{i-1} = 0$, from $n^{r-i}e' = n^{r-i}e''$ we have $n^r e'_i = n^r e''_i = 0$ whence $e'_i = 0$. Thus $k[n]E' \cap k[n]E'' = 0$ and $E = k[n]E_0 = k[n]E' \oplus k[n]E''$. Since E is H-indecomposable and $k[n]E'$ and $k[n]E''$ are H-subspaces of E, we have $E'' = 0$ and $E' = E_0$, whence the required uniqueness since $e' = 0$ implies $e'_i = 0$ for $i = 0, 1, \ldots, r$. $\square$

Lemma C.6. *Let H be an affine k-group, let k' be an extension of k, and let V' be a representation of H over k'.*

(i) *If H is proreductive then V' is a direct summand of some $V \otimes_k k'$.*

(ii) *If k' is algebraic over k then V' is a direct summand of some $V \otimes_k k'$.*

(iii) *If k is algebraically closed and V' is a direct summand of $V \otimes_k k'$, then $V' \simeq V_0 \otimes_k k'$ for some direct summand V_0 of V.*

Proof. There is a canonical epimorphism

$$V' \otimes_k k' \to V' \to 0 \tag{C.11}$$

of (not necessarily finite dimensional) H-representations over k'. Since V' is finite-dimensional over k' there is a finite dimensional H-subrepresentation V of V' over k such that the restriction of (C.11) to $V \otimes_k k'$ is an epimorphism. If H is reductive, V' is a direct summand of $V \otimes_k k'$, whence (i). To prove (ii) we may suppose k' finite over k. Then V' is finite dimensional over k and there is a canonical splitting of (C.11), defined using the trace from k' to k. For (iii), note that if $A = \mathrm{End}_H(V)$, any idempotent e in $A \otimes_k k'$ is conjugate to one in A. Indeed e generates a semisimple k'-subalgebra of $A \otimes_k k'$ and so some conjugate lies in the extension to k' of a maximal semisimple subalgebra of A. With k algebraically closed, it is then obvious that some conjugate lies in A. $\square$

Theorem C.1. *If H is an affine k-group the following conditions are equivalent :*

(a) *the prounipotent radical of H is of dimension ≤ 1 ;*

(b) *for every k-scheme S of finite type and family $\mathcal{V}$ of representations of H over S, there is a finite extension k' of k and a stratification of $S_{k'}$ by locally closed subschemes such that the family $\mathcal{V}_{k'}$ of representations of $H_{k'}$ over $S_{k'}$ is constant along each stratum ;*

(c) *for every k-scheme S of finite type and family $\mathcal{V}$ of representations of H over S, the set of H-isomorphism classes of the fibres of $\mathcal{V}$ at k-points of S is finite ;*

(d) *for every family $\mathcal{V}$ representations of H over $\mathbf{A}^1$ there exists a representation V of H over k such that $\mathcal{V}_x \simeq V$ for an infinite set of $x \in \mathbf{A}^1(k)$.*

Proof. (a) $\Longrightarrow$ (b) : We may suppose that k is algebraically closed. It is enough to show then that, assuming the prounipotent radical U of H is of dimension ≤ 1, each representation $\mathcal{V}$ of H over a non-empty reduced and irreducible k-scheme S of finite type is constant along some non-empty open subscheme of S. Let V_1 be the generic fibre of $\mathcal{V}$. If $K = GL(2) \times M/U$ and k' is the function field of S there is by Lemma C.5 a k-homomorphism $f : H \to K$ such that $V_1 \simeq f_{k'}^* V'$ for some representation V' of $K_{k'}$. Further $V' \simeq V \otimes_k k'$ for some representation V of K by (i) and (iii) of Lemma C.6, so there is an H-isomorphism $V_1 \simeq f^* V \otimes_k k'$. This extends to an H-isomorphism of $\mathcal{V}$ with the constant family $f^* V$ along some non-empty open subscheme of S.

(b) $\Longrightarrow$ (c) : It is enough to note that representations V and W of H which become isomorphic over k' are themselves isomorphic, because the determinant is then not identically zero on $\mathrm{Hom}_H(V, W)$.

(c) $\Longrightarrow$ (d) is immediate.

(d) $\Longrightarrow$ (a) : Call the fibres of a representation $\mathcal{V}$ of H over $\mathbf{A}^1$ almost distinct if for each representation V of H over k we have $\mathcal{V}_x \simeq V$ for only a finite set of $x \in \mathbf{A}^1(k)$. The fibres of $\mathcal{V}$ are almost distinct provided that those of the representation obtained from $\mathcal{V}$ by either extension of scalars, pullback along some $H' \to H$, or passage to a direct summand, are almost distinct. This is immediate in the first two cases and in the case of direct summands follows from the fact that by Krull–Schmidt any $\mathcal{V}_x$ has only a finite set of pairwise non-H-isomorphic direct summands. Now suppose that (a) does not hold. Then we show that there exists a $\mathcal{V}$ whose fibres are almost distinct, so that (d) does not hold. To do this we may suppose by passing to a quotient that H is of finite type.

Consider first the case where k is algebraically closed. If H^0 is the connected component of H there is then by Lemma C.4 a representation $\mathcal{V}^0$ of H^0 over $\mathbf{A}^1$ with almost distinct fibres. Since $\mathcal{V}^0$ is a direct H^0-summand of the induced H-representation $\mathrm{Ind}_{H^0}^H \mathcal{V}^0$, the fibres of $\mathrm{Ind}_{H^0}^H \mathcal{V}^0$ are almost distinct.

For arbitrary k, with algebraic closure $\bar{k}$, there is thus a representation $\bar{\mathcal{V}}$ of H over $\mathbf{A}^1_{\bar{k}}$ with almost distinct fibres. We have $\bar{\mathcal{V}} = \mathcal{V}' \otimes_{k'} \bar{k}$ for some finite extension k' of k and H-representation $\mathcal{V}'$ over $\mathbf{A}_{k'}$. If $p : \mathbf{A}^1_{k'} \to \mathbf{A}^1$ is the projection and we write $\mathcal{V} = p_* \mathcal{V}'$ then $\mathcal{V}'$ is a direct H-summand of $\mathcal{V} \otimes_k k' = p^* p_* \mathcal{V}'$. The fibres of $\mathcal{V}'$ and hence $\mathcal{V}$ are thus almost distinct. □

Theorem C.2. *Let H be an affine k-group and let k' be an extension of k. Then every representation of H over k' is a direct summand of a representation defined over k if and only if either k' is algebraic over k or the prounipotent radical of H has dimension ≤ 1.*

Proof. If k' is algebraic over k then each representation V' of H over k' is a direct summand of some $V \otimes_k k'$ by Lemma C.6(ii). Suppose that the prounipotent radical

U of H has dimension ≤ 1. If $K = GL(2) \times M/U$ there is then by Lemma C.5 a k-homomorphism $f : H \to K$ such that any representation V' of $H_{k'}$ is isomorphic to $f_{k'}^* W'$ for some representation W' of $K_{k'}$. Then W' is a direct summand of $W \otimes_k k'$ for some representation W of K by Lemma C.6(i), so V' is a direct summand of $f^* W \otimes_k k'$.

For the converse, suppose that k' is transcendental over k and that the prounipotent radical of H has dimension > 1. Then by the equivalence of (a) and (d) of Theorem C.1, there is a representation $\mathcal{V}$ of H over $\mathbf{A}^1$ with an infinite set of pairwise non-isomorphic fibres at k-points of $\mathbf{A}^1$. Choose an embedding of $k(t)$ in k', and let V_1 be the generic fibre of $\mathcal{V}$. We show that $V_1 \otimes_{k(t)} k'$ is not a direct summand of any $V \otimes_k k'$. In fact suppose the contrary. Then for some V the identity of V_1 lies in the image of the composition homomorphism

$$\mathrm{Hom}_{H,k(t)}(V \otimes_k k(t), V_1) \otimes_{k(t)} \mathrm{Hom}_{H,k(t)}(V_1, V \otimes_k k(t)) \to \mathrm{End}_{H,k(t)} V_1,$$

since this is so after extending scalars from $k(t)$ to k'. Thus for some n there are H-homomorphisms $r_i : V \otimes_k k(t) \to V_1$, $s_i : V_1 \to V \otimes_k k(t)$, $i = 1, \dots, n$ over $k(t)$ such that $r_1 s_1 + \dots + r_n s_n = 1_{V_1}$. This implies that V_1 is a direct summand of $V^n \otimes_k k(t)$. Thus $\mathcal{V}$ is a direct summand of the constant family V^n along some non-empty open subscheme of $\mathbf{A}^1$. By Krull–Schmidt this contradicts the fact that $\mathcal{V}$ has an infinite set of pairwise non-isomorphic fibres. $\square$

C.2. **Application to proreductive envelopes.** In connection with proreductive envelopes it will be convenient to use the following terminology. Let $f : H \to K$ be a k-homomorphism from an affine k-group to a proreductive k-group. Call f *universal* if each k-homomorphism $H \to K'$ to a proreductive K' factors, uniquely up to conjugation by a k-point of K', through f. Equivalently, f is universal if its conjugacy class is the embedding of H into its proreductive envelope. Théorème 19.3.1 states that for each H there exists a universal f. Call f *minimal* if f factors through no proper proreductive subgroup of K. If L is proreductive, $h : H \to L$ is universal, and $f = lh$, then f is universal if and only if l is an isomorphism and f is minimal if and only if l is faithfully flat.

By considering k-homomorphisms to general linear groups it can be seen that if f is universal then f^* induces a bijection on isomorphism classes of objects (Proposition 19.3.4). We note also the following fact, which generalises a result due to Kostant [33, Theorem 3.6]. If f is universal, then any k-homomorphism $h : H \to K'$ to a proreductive K' factors through f uniquely up to conjugation by a *unique* k-point of the prounipotent radical $R_u C_{K'}(h)$ of the centraliser $C_{K'}(h)$ of h. Equivalently, if $h = lf$ then $C_{K'}(l)$ is a Levi subgroup of $C_{K'}(h)$, i.e. $C_{K'}(h)$ is the semidirect product of $R_u C_{K'}(h)$ and $C_{K'}(l)$. To verify this, let L be a Levi subgroup of $C_{K'}(h)$. Then h factors through the proreductive subgroup $C_{K'}(L)$ of K', so by universality of f the conjugate of l by some k-point z of $C_{K'}(h)$ factors through $C_{K'}(L)$. Thus $L \subset z C_{K'}(l) z^{-1} \subset C_{K'}(h)$ and $z C_{K'}(l) z^{-1} = L$ since $C_{K'}(l)$ is proreductive.

The main facts required about universal and minimal k-homomorphisms are contained in the following lemma.

Lemma C.7. *Let $f : H \to K$ be a k-homomorphism from an affine k-group to a proreductive k-group. Then*

(i) *f is universal if and only if f is minimal and each representation of H is a direct summand of f^*V for some representation V of K.*

(ii) *If f is minimal then $f_{k'} : H_{k'} \to K_{k'}$ is minimal for any extension k' of k.*

(iii) *If f is universal then $f_{k'} : H_{k'} \to K_{k'}$ is universal for any algebraic extension k' of k.*

Proof. Factor f as $H \xrightarrow{g} L \xrightarrow{l} K$ with L proreductive and g universal. Then g^* induces a bijection on isomorphism classes of objects, and f is universal (resp. minimal) if and only if l is an isomorphism (resp. faithfully flat).

Thus f is universal $\iff$ f is minimal and l is a closed immersion. Further l is a closed immersion $\iff$ each representation of L is a direct summand of some l^*V (because L is proreductive) $\iff$ each representation of H is a direct summand of some f^*V. This gives (i).

If W is representation of a k-group G, write $m_G(W)$ for the multiplicity of the trivial G-representation k in a decomposition of W into G-indecomposables. Clearly $m_G(W)$ is the rank of the canonical k-homomorphism $W^G \to W_G$, so it is preserved by extension of the scalars. Then l is surjective $\iff$ l^* is fully faithful (because L is proreductive) $\iff$ $\dim_k \operatorname{Hom}_K(k, V) = \dim_k \operatorname{Hom}_L(k, l^*V)$ for each representation V of K $\iff$ $m_K(V) = m_L(l^*V)$ for each V $\iff$ $m_K(V) = m_H(f^*V)$ for each V $\iff$ each V is a direct summand of some V_1 for which $m_K(V_1) = m_H(f^*V_1)$ (because $m_K(V) \le m_H(f^*V)$). By Lemma C.6(i), if the last condition is satisfied it is also satisfied with f, H and K replaced by $f_{k'}$, $H_{k'}$ and $K_{k'}$. This gives (ii).

For (iii) it is enough by (i) and (ii) to show if each representation of H is a direct summand of some f^*V then each representation of $H_{k'}$ is a direct summand of some $f_{k'}^*V'$. This is clear from Lemma C.6(ii). □

Theorem C.3. *Let H be an affine k-group and let k' be an extension of k. Then the canonical morphism ${}^{\mathrm{p}}\operatorname{Red}(H_{k'}) \to {}^{\mathrm{p}}\operatorname{Red}(H)_{k'}$ is an isomorphism if and only if either k' is algebraic over k or the prounipotent radical of H is of dimension ≤ 1.*

Proof. Let $f : H \to K$, with K proreductive, be universal. Then ${}^{\mathrm{p}}\operatorname{Red}(H_{k'}) \to {}^{\mathrm{p}}\operatorname{Red}(H)_{k'}$ is an isomorphism $\iff$ $f_{k'}$ is universal $\iff$ each representation of $H_{k'}$ is a direct summand of some $f_{k'}^*W'$ (Lemma C.7) $\iff$ each representation of $H_{k'}$ is a direct summand of some $f^*W \otimes_k k'$ (Lemma C.6(i)) $\iff$ each representation of $H_{k'}$ is a direct summand of some $V \otimes_k k'$. The result thus follows from Theorem C.2. □

Theorem C.4. *Let U be a unipotent k-group of dimension 1, equipped with an action of the proreductive k-group M. Then*

(i) *There exists an M-embedding $U \to SL(2)$ for some action of M on $SL(2)$.*

(ii) *If $f : U \to SL(2)$ is an M-embedding and $h : U \to K$ is an M-homomorphism with K proreductive, then there is an M-homomorphism $l : SL(2) \to K$, unique up to conjugation by a k-point of K fixed by M, such that $h = lf$.*

(iii) *If $f : U \to SL(2)$ is an M-embedding then (the conjugacy class of) $f \rtimes M : U \rtimes M \to SL(2) \rtimes M$ is the embedding of $U \rtimes M$ into its proreductive envelope.*

Proof. By Lemma C.5 there is a k-homomorphism $g : U \rtimes M \to GL(2)$ non-trivial on U. The restriction of g to U factors through an M-embedding $f : U \to SL(2)$, where M acts on $SL(2)$ through g and the inner action of $GL(2)$. This gives (i).

It will suffice to prove (ii) and (iii) for the f just constructed. Consider first (iii). Let L be a proreductive subgroup of $SL(2) \rtimes M$ through which $f \rtimes M$ factors. Then $L \cap SL(2) \supset U$ is reductive since $SL(2)$ is normal in $SL(2) \rtimes M$, so $L \cap SL(2) = L$ and $L \supset SL(2)$. Also $L \supset M$, so $L = SL(2) \rtimes M$. Thus $f \rtimes M$ is minimal. The projection $U \rtimes M \to M$ factors through $f \rtimes M : U \rtimes M \to SL(2) \rtimes M$, and g factors through $f \rtimes M$ by construction. Thus $(f \rtimes M)^*$ is essentially surjective by Lemma C.5, and so universal by Lemma C.7(i).

Given h as in (ii), $h \rtimes M$ is by universality of $f \rtimes M$ the composite of $f \rtimes M$ with a k-homomorphism $SL(2) \rtimes M \to K \rtimes M$, necessarily of the form $l \rtimes M$ for some M-homomorphism l. Thus $h = lf$. If also $h = l'f$ for an M-homomorphism l', then l and l' are by universality of f conjugate by a unique k-point α of the prounipotent radical of the centraliser of h. This implies that $l_{k'}$ and $l'_{k'}$ are conjugate by $m\alpha$ for any extension k' of k and $m \in M(k')$. Since M stabilises the centraliser of h and so the prounipotent radical of this centraliser, M fixes α by uniqueness. □

An affine k-group G will be called finite dimensional if its quotients of finite type are of bounded dimension. It is equivalent to require that the connected component of G be an extension of a group of finite type by a proétale group.

Lemma C.8. *If k is algebraically closed then a connected finite dimensional reductive k-group has only a finite number of non-isomorphic irreducible representations of given dimension and determinant.*

Proof. The connected semisimple case follows from Weyl's dimension formula. In general, a connected finite dimensional reductive group is a quotient of $T \times G$ for some protorus T and connected semisimple G. An irreducible representation of $T \times G$ of dimension n and determinant χ is the tensor product of an n-dimensional irreducible representation of G with a 1-dimensional representation of T defined by a character ψ with $\psi^n = \chi$. Since there is at most one such ψ, the result follows from the connected semisimple case. □

Theorem C.5. *The proreductive envelope of an affine k-group H is of finite type over k (resp. finite dimensional) if and only if H is of finite type over k (resp. finite dimensional) and the prounipotent radical of H is of dimension ≤ 1.*

Proof. The "if" is clear by Theorem C.4(iii). Let $f : H \to K$, with K proreductive, be universal. For the "only if", it suffices to show that if the prounipotent radical of H has dimension > 1 then K is not finite dimensional. By Lemma C.7(iii) we may suppose that k is algebraically closed. If $\bar{H}$ is a quotient of H and $\bar{H} \to \bar{K}$, with $\bar{K}$ proreductive, is universal, then $H \to \bar{H} \to \bar{K}$ is minimal, and so factors through a faithfully flat $K \to \bar{K}$. Replacing H by an appropriate $\bar{H}$, we may thus further suppose H to be of finite type (see also Proposition 19.4.7 c)). Let $j : H^0 \to H$

be the embedding of the connected component of H and $g : H^0 \to L$, with L proreductive, be universal, so that $fj = lg$ for some $l : L \to K$. Then l is a closed immersion. Indeed otherwise some representation of L would not be a direct summand of any l^*V, whence the same would hold with L and l replaced by H^0 and j, since f^* and g^* induce bijections on isomorphism classes of objects. But each representation W of H^0 is a direct summand of $j^* \operatorname{Ind}_{H^0}^H W$. Replacing H by H^0 we may thus suppose H connected (see also Proposition 19.4.7 a)). Then K also is connected, as is seen by considering k-homomorphisms to finite groups.

By Theorem C.1 there is a family $\mathcal{V}$ of representations of H, parametrised by $\mathbf{A}^1$, such that the set of H-isomorphism classes of the fibres $\mathcal{V}_x$ for $x \in \mathbf{A}^1(k)$ is infinite. There thus exists an infinite set $\mathcal{S}$ of pairwise non-isomorphic irreducible representations V of H such that each $V \in \mathcal{S}$ is a direct summand of some $\mathcal{V}_x$ for $x \in \mathbf{A}^1(k)$. Let T be the radical of a a Levi subgroup of H. The restrictions to T of the $\mathcal{V}_x$ are isomorphic, so among direct summands of the $\mathcal{V}_x$ there are only a finite number of possible T-isomorphism classes. Since the determinant of a representation of H is defined uniquely by its restriction to T, it follows that there is an infinite subset $\mathcal{S}'$ of $\mathcal{S}$ such that each $V \in \mathcal{S}'$ has the same determinant χ. Then $\chi = \psi \circ f$ for a unique character ψ of K. Each $V \in \mathcal{S}'$ is isomorphic to f^*W for some representation W of K, and each such W has determinant ψ and dimension at most that of the fibres of $\mathcal{V}$. Lemma C.8 then shows that K is not finite dimensional. $\square$

By a similar argument it can be shown for example that if k is uncountable the proreductive envelope of an affine k-group with prounipotent radical of dimension > 1 is not a countable limit of k-groups of finite type.

RÉFÉRENCES

[1] Y. André, B. Kahn, Construction inconditionnelle de groupes de Galois motiviques, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér I. **331** (2002), 989–994.

[2] A. Beilinson, Height pairing between algebraic cycles, in : K-theory, Arithmetic and Geometry, Lect.notes in Math. **1289**, Springer (1987), 27–41.

[3] D. Benson, *Representations and cohomology I*, Cambridge studies **30**, Cambridge Univ. Press,1995.

[4] F. Beukers, D. Brownawell, G. Heckman, Siegel normality, Annals of Math. **127** (1988), 279–308.

[5] N. Bourbaki, *Algèbre*, chapitre VIII, Hermann, 1958.

[6] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, chapitre VI, Hermann/CCLS, 1975.

[7] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, chapitre VIII, Hermann/CCLS, 1975.

[8] L. Breen, Tannakian categories, *in* Motives, Proc. Symposia pure Math. **55** (I), AMS, 1994, 337–376.

[9] A. Bruguières, Théorie tannakienne non commutative, Comm. in Algebra, **22**(14) (1994), 5817–5860.

[10] A. Bruguières, Tresses et structure entière sur la catégorie des représentations de SL_N quantique, Comm. in Algebra **28** (2000), 1989–2028.

[11] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton Univ. Press, 1956.

[12] P. Cartier, Construction combinatoire des invariants de Vassiliev-Kontsevich des nœuds, C. R. Acad. Sci. Paris **316** (1993), 1205–1210.

[13] J. Cuntz, D. Quillen, Algebra extensions and nonsingularity, Journal A.M.S. **8** 2 (1995), 251–289.

[14] P. Deligne, Catégories tannakiennes, in : The Grothendieck Festschrift, vol. 2, Birkhäuser P.M. **87** (1990), 111–198.

[15] P. Deligne et *al.*, *Quantum fields and strings : a Course for Mathematicians*, AMS, 1999.

[16] P. Gabriel, Des catégories abéliennes, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323–448.

[17] P. Gabriel, Problèmes actuels de théorie des représentations, L'Ens. Math. **20** (1974), 323–332.

[18] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Springer, 1971.

[19] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku Math. J. (2), **9** (1957), 119–221.

[20] V. Ginzburg, Principal nilpotent pairs in a semisimple Lie algebra. I, Invent. Math. **140** (2000), 511–561.

[21] V. Guletskii, C. Pedrini, The Chow motive of the Godeaux surface, prépublication (2001).

[22] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras*, London Math. Soc. Lect. notes **119** (1988), Cambridge Univ. Press.

[23] G. Higman, On a conjecture of Nagata, Proc. Camb. Philos. Soc. **52** (1956), 1–4.

[24] N. Jacobson, Ann. of Math. **36** (1935), 875–881.

[25] U. Jannsen, Motives, numerical equivalence and semi-simplicity, Invent. Math. **107** (1992), 447–452.

[26] U. Jannsen, Equivalence relations on algebraic cycles, *in* The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998), 225–260, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., **548**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[27] A. Joyal, R. Street, Braided monoidal categories, Adv. in Math. **102** (1993), 20–78.

[28] C. Kassel, M. Rosso, V. Turaev, *Quantum groups and knot invariants*, S.M.F. Panoramas et synthèses **5** (1997).

[29] N. Katz, W. Messing, Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields, Invent. Math. **23** (1974), 73–77.

[30] G. M. Kelly, On the radical of a category, J. Australian Math. Soc. **4** (1964), 299–307.

[31] O. Kerner, A. Skowroński, On module categories with nilpotent infinite radical, Compos. Math. **77** 3 (1991), 313–333.

[32] S.I. Kimura, Chow motives can be finite-dimensional, in some sense, à paraître au J. of Alg. Geom.

[33] B. Kostant, The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group, Amer. J. Math. **81** (1959), 973–1032.

[34] K. Künneman, On the Chow motive of an abelian scheme, in : Motives, Proc. Symposia pure Math. **55** (I), AMS, 1994, 189–205.

[35] P.Y. Leduc, catégories semi-simples et catégories primitives, Canad. J. Math. **20** (1968), 612–628.

[36] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, 2ème éd., Springer GTM **5** (1998).

[37] G. A. Margulis, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, Springer, Berlin, 1991.

[38] B. Mitchell, Rings with several objects, Adv. Math. **8** (1972), 1–161.

[39] V.V. Morozov, Sur un élément nilpotent dans une algèbre de Lie semi-simple (en russe), Dokl. Akad. Nauk SSSR **36** (1942), 83–86.

[40] V.V. Morozov, Sur le centralisateur d'une sous-algèbre semi-simple d'une algèbre de Lie semi-simple (en russe), Dokl. Akad. Nauk SSSR **36** (1942), 259–261.

[41] J.P. Murre, On a conjectural filtration on the Chow groups of an algebraic variety, parts I and II, Indag. Math. **4** (1993), 177–201.

[42] M. Nagata, On the nilpotency of nil-algebras, J. Math. Soc. Japan **4** (1952), 296–301.

[43] M. Nathanson, Classification problems in K-categories, Fund. Math. **105** 3 (1979/80), 187–197.

[44] P. O'Sullivan, lettres aux auteurs, 29 avril et 12 mai 2002.

[45] D. I. Panyushev, Nilpotent pairs in semisimple Lie algebras and their characteristics, Internat. Math. Res. Notices **2000** 1–21.

[46] A. Piard, Indecomposable representations of a semi-direct product $sl(2) \ltimes \mathcal{A}$ and semi-simple groups containing $sl(2) \ltimes \mathcal{A}$, in : Sympos. Math. XXXI (Roma, 1988), 185–195, Acad. Press, 1990.

[47] Platon, *Phédon*, § LIII.

[48] N. Popescu, *Abelian categories with applications to rings and modules*, Acad. Press, 1973.

[49] M. Prest, *Model theory and modules*, L.M.S. Lecture note series **130**, Cambridge Univ. Press 1988.

[50] C. M. Ringel, Recent advances in the representation theory of finite dimensional algebras, in Representation theory of finite groups and finite-dimensional algebras, Birkhäuser Progress in Math. **95** (1991).

[51] L. Rowen, *Ring theory*, vol. 1, Acad. Press, 1988.

[52] W. Rump, Doubling a path algebra, or : how to extend indecomposable modules to simple modules, in : Representation theory of groups, algebras and orders (Costanţa, 1995), An. Ştiinţ. Univ. Ovidius Constanţa Ser Mat. **4** 2 (1996), 174–185.

[53] N. Saavedra Rivano, *catégories tannakiennes*, Lect. Notes in Math. **265**, Springer, 1972.

[54] J.-P. Serre, Gèbres, L'Ens. Math. **39** (1993), 33–85.

[55] J.-P. Serre, Propriétés conjecturales des groupes de Galois motiviques et des représentations l-adiques, *in* Motives, Proc. Symposia pure Math. **55** (I), AMS, 1994, 377–400.

[56] D. Simson, A. Skowroński, The Jacobson radical power series of module categories and the representation type, Bol. Soc. Mat. Mexicana **5** 2 (1999), 223–236.

[57] R. Street, Ideals, radicals and structure of additive categories, Appl. Cat. Structures **3** (1995), 139–149.

[58] R. Thomason, The classification of triangulated categories, Compos. Math. **105** (1997), 1–27.

[59] V. Voevodsky, A nilpotence theorem for cycles algebraically equivalent to zero, International Mathematics Research Notices **4** (1995), 1–12.

[60] P. Vogel, Invariants de Witten-Reshetikin-Turaev et théories quantiques des champs, in : Panoramas et synthèses **7** (1999), 117-143.

INDEX TERMINOLOGIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS, ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,, 45 RUE D'ULM, 75230 PARIS CEDEX 05, FRANCE.
E-mail address: andre@dmi.ens.fr

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU, 175–179 RUE DU CHEVALERET, 75013 PARIS, FRANCE.
E-mail address: kahn@math.jussieu.fr

39 EDGECLIFFE AVE, COOGEE, NSW 2034, AUSTRALIA
E-mail address: pjosullivan@optusnet.com.au