Table des matières

1 Cours 13 - 08/11

Dans ce cours, on utilise les propriétés de courbure négative démontrées au cours précédent pour prouver le théorème de monodromie locale de Borel. On énonce aussi un résultat de finitude de Deligne, qui utilise le même genre de techniques.

1.1 Un peu de courbure négative

On rappelle le résultat principal démontré au cours précédent :

Proposition 1.1.
- *La courbure bisectionnelle holomorphe pour X, Y horizontaux (i.e. dans $\mathfrak{g}^{-1,1}$) qui commutent est*

$$K_{X,Y} = -\frac{\left\langle [X, Y^*], \overline{[X, Y^*]} \right\rangle}{\langle X, X^* \rangle \langle Y, Y^* \rangle} \leq 0.$$

- *La courbure sectionnelle holomorphe $K_X := K_{X,X}$ est strictement négative et est donc bornée supérieurement par une constante < 0 sur D.*

On va utiliser cette proposition pour démontrer le résultat suivant de Griffiths :

Théorème 1.2 (Griffiths)**.** *Soit D un domaine de périodes et $f : \Delta \to D$ une application holomorphe et horizontale. Alors, à une constante de normalisation près, f décroit les distances :*

$$\exists C > 0 : \forall x, y \in \Delta, d_D(f(x), f(y)) \leq C.d_\Delta(x, y).$$

Considérons S une variété complexe de dimension 1, munie d'une métrique hermitienne $h = h(z)dz \otimes \overline{dz}$, où $h(z) > 0$. La 2-forme ω associée s'écrit alors

$$\omega = \frac{i}{2} h(z) dz \wedge \overline{dz}.$$

La courbure Ω et la courbure sectionnelle holomorphe $K_{\partial/\partial z}$ sont données par

$$\Omega = -\partial\bar{\partial} \log h$$
$$K_{\partial/\partial z} = -2h^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log h.$$

On a la relation $i\Omega = K\omega$.

- Si $S = \Delta$ est le disque unité, on dispose de la métrique de Poincaré $h = 4(1 - |z|^2)^{-2} dz \otimes \overline{dz}$, de courbure sectionnelle holomorphe $K_{\partial/\partial z} = -1$.
- Dans le modèle du demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z \mid \Im z > 0\}$, $h = (\Im z)^{-2} dz \otimes \overline{dz}$, avec encore l'égalité $K_{\partial/\partial z} = -1$.
- Le demi-plan supérieur revêt le disque unité épointé par l'application $z \mapsto \xi = e^{iz}$, d'où $\Im z = -\log |\xi|$. La métrique sur $\mathbb{H}$ étant invariante par translations horizontales, elle induit une métrique sur le disque épointé :
$$h_{\Delta^*} = \frac{4}{|\xi|^2 (\log |\xi|^2)^2} d\xi \otimes \overline{d\xi},$$
avec encore $K_{\partial/\partial z} = -1$.

Le lemme suivant implique directement le théorème 1.2.

Lemme 1.3 (Ahlfors-Schwarz). *Soit (Y, h) une variété complexe munie d'une métrique hermitienne et soit $f : \Delta \to Y$ holomorphe telle que $K^Y_{df(X)} \leq -1$. Alors, avec $\omega = \frac{i}{2}h(z)dz \wedge \overline{dz}$,*

$$f^*\omega \leq \omega_\Delta$$

et donc $d_Y(f(x), f(y)) \leq d_\Delta(x, y)$.

Démonstration. Comme la courbure d'un fibré holomorphe hermitien décroit sur ses sous-fibrés, on a $K_{\Delta, f^*h} \leq -1$.

On considère la forme de Ricci de (Y, h), notée Ric_{ω_h} définie par $\mathrm{Ric}_{\omega_h} = 2\pi c_1(K_Y, h)$, où K_Y est le fibré en droites canonique sur Y. On a

$$\mathrm{Ric}_{f^*h} = -i\Omega_{T\Delta, f^*h} = -K_{\Delta, f^*h}\omega_{f^*h}.$$

Donc

$$f^*\omega_h = \omega_{f^*h} \leq \mathrm{Ric}\, \omega_{f^*h}. \tag{1}$$

Pour r strictement inférieur à 1, considérons la métrique renormalisée sur Δ_r, disque ouvert de rayon r, définie par la 2-forme $\omega_r := \frac{2ir^2}{(r^2 - |z|^2)^2} dz \wedge \overline{dz}$, à courbure sectionnelle -1.

Soit u_r la fonction positive sur Δ_r définie par

$$f^*\omega_{h|\Delta_r} = u_r(z)\omega_r. \tag{2}$$

Comme ω_r tend vers l'infini quand $|z|$ tend vers r et comme $f^*\omega_{h|\Delta_r}$ est bornée sur Δ_r, la fonction $u_r(z)$ atteint son maximum en un point $z_r \in \Delta_r$.

Donc en z_r, on a

$$i\partial\bar{\partial} \log u_r \leq 0 \tag{3}$$

Mais, par (2) et un petit calcul, on a $\mathrm{Ric}\, f^*\omega_{h|\Delta_r} = i\partial\bar{\partial} \log u_r + \mathrm{Ric}\, \omega_r$. Donc le terme de gauche de (3) est égal à $\mathrm{Ric}\, f^*\omega_{h|\Delta_r} - \mathrm{Ric}\, \omega_r$ et $\mathrm{Ric}\, \omega_r = -K_{\omega_r}\omega_r = \omega_r$.

En z_r, on a donc l'inégalité

$$\mathrm{Ric}\, f^*\omega_{h|\Delta_r} \leq \omega_r.$$

Combinée à (1), cela donne $u_r(z) \leq 1$ en z_r donc, sur tout Δ_r. On a donc l'inégalité

$$f^*\omega_{h|\Delta_r} \leq \omega_r,$$

pour tout r strictement inférieur à 1. Un passage à la limite quand r tend vers 1 donne le résultat. □

Avec le théorème 1.2, on peut prouver le théorème de monodromie locale de Borel, dont on rappelle l'énoncé :

Théorème 1.4. *Soit $(H_\mathbb{Z}, h : \mathcal{S} \to GL(H_\mathbb{R}), Q)$ une $\mathbb{Z}$-VHS sur Δ^* (disque unité épointé). On considère la monodromie $\rho : \pi_1(\Delta^*) = \mathbb{Z} \to G_\mathbb{Z} \subset GL(H_\mathbb{Z})$ et on note T l'image du générateur 1 par ρ. Alors T est quasi-unipotente : $\exists N, M \geq 1 : (T^N - Id)^M = 0$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que les valeurs propres de T sont des racines de l'unité. Soit $f : \mathbb{H} \to D$ l'application des périodes pour $(H_\mathbb{Z}, h : \mathcal{S} \to GL(H_\mathbb{R}), Q)$. C'est une application holomorphe, horizontale et ρ-équivariante : $\forall y \in \mathbb{H}, f(y + 1) = T.f(y)$.

Fixons $x_0 \in D$ un point-base et écrivons $f(y) = g_y x_0$, avec $g_y \in G$. On a

$$\begin{aligned} d_D(f(y+1), f(y)) &= d_D(Tg_y x_0, g_y x_0) \\ &= d_D((g_y^{-1}Tg_y)x_0, x_0) \leq d_\mathbb{H}(y, y+1) \cong_{y\to\infty} \frac{1}{\Im y} \end{aligned}$$

Donc, $d_D(g_y^{-1}Tg_y.x_0, x_0) \to_{y\to\infty} 0$. Ainsi, pour $\Im y$ suffisamment grand, les $g_y^{-1}Tg_y$ sont contenus dans un voisinage compact de l'identité de G. Donc, une valeur d'adhérence de conjugués de T stabilise x_0, donc est dans le sous-groupe compact V. Les valeurs propres de T sont ainsi de module égal à 1.

Par ailleurs, comme $T \in G_\mathbb{Z}$, les valeurs propres de T sont des entiers algébriques et cet ensemble est stable par conjugaison. On conclut par le lemme suivant dû à Kronecker. □

Lemme 1.5 (Kronecker, 1857). *Soit α un entier algébrique dont tous les conjugués sont de module inférieur à 1. Alors α est une racine de l'unité.*

Démonstration. Notons E l'ensemble des polynômes unitaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$, ayant leurs racines dans Δ et de degré le nombre de conjugués de α (y compris α). En écrivant les coefficients des polynômes de E comme polynômes symétriques en les racines, on montre que E est fini.

Notons $z_j, j = 1, \ldots, n$ les conjugués de α, avec $\alpha = z_1$. Posons $f = \prod_{j=1}^n (z - z_j)$ et, pour tout k entier naturel non nul, $f_k(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j^k)$. Le polynôme f est dans E par hypothèse et, comme les f_k sont symétriques en les z_j, ils sont aussi à coefficients entiers, donc dans E.

Comme E est fini, il existe deux entiers distincts k et l tels que $f_k = f_l$. Donc, il existe une permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$ telle que, pour tout r dans $\{1, \ldots, n\}$, $z_r^j = z_{\sigma(r)}^k$. En notant m l'ordre de σ, on a les égalités :

$$z_1^{k^m} = \left(z_1^k\right)^{k^{m-1}} = \left(z_{\sigma(1)}^l\right)^{k-1} = \cdots = z_{\sigma^n(1)}^{l^m} = z_1^{l^m}.$$

Comme k et l sont distincts, $z_1 = \alpha$ est une racine de l'unité. □

Ceci conclut la preuve du théorème de monodromie locale de Borel.

1.2 Un théorème de finitude de Deligne

On va démontrer (en partie) le théorème suivant

Théorème 1.6 (Deligne,1987). *Soit S un ouvert de Zariski d'une variété $\bar{S}$ analytique compacte (en particulier, on peut prendre S quasi-projective). Soit N un entier fixé. Les systèmes locaux de $\mathbb{Q}$-vectoriels sur S de dimension N sur $\mathbb{Q}$, qui sont facteurs directs d'un $\mathbb{Q}$-système local sous-jacent à une $\mathbb{Z}$-variation de structures de Hodge polarisées sur S, ne forment qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme.*

Pour démontrer ce théorème, on utilise la métrique hyperbolique sur Δ pour définir une pseudo-distance intinsèque sur toute variété complexe (ou analytique) Y : c'est la *pseudo-distance de Kobayashi.* Il s'agit de la plus grande pseudo-distance sur Y telle que, pour toute fonction f holomorphe de Δ dans Y, $d_Y(\phi(x), \phi(y)) \leq d_\Delta(x, y)$.

La définition est la suivante : étant donnés deux points x et y sur Y, on considère des points $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ dans Y, des points $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ dans Δ et des applications holomorphes $f_j, j = 1, \ldots, n$ telles que, pour tout j, $f_j(a_j) = x_{j-1}$ et $f_j(b_j) = x_j$. La pseudo-distance de Kobayashi sur Y est l'infimum, sur tous les choix possibles de telles constructions, de la quantité $\sum_{j=1}^n d_\Delta(a_j, b_j)$.

Exercice 1.7. Calculer la pseudo-distance de Kobayashi pour le disque Δ, pour $\mathbb{C}$.

La proposition suivante est un corollaire du théorème 1.2.

Proposition 1.8. *Soit $f : \tilde{S} \to D$ une application holomorphe et horizontale. Alors,*

$$\forall x, y \in \tilde{S},\ d_D(f(x), f(y)) \leq C.d_{\tilde{S}}(x, y),$$

où $d_{\tilde{S}}$ est la pseudo-distance de Kobayashi sur $\tilde{S}$ et C est une constante strictement positive.

Démonstration. On définit une pseudo-distance sur $\tilde{S}$ par $d'_{\tilde{S}}(x, y) = d_D(f(x), f(y))$. Si ϕ est holomorphe de Δ dans $\tilde{S}$, on a $f \circ \phi : \Delta \to D$ holomorphe et horizontale, donc, d'après le théorème 1.2, $d_D(f \circ \phi(x), f \circ \phi(y)) \leq C.d_\Delta(x, y)$, i.e. $d'_{\tilde{S}}(\phi(x), \phi(y)) \leq C.d_\Delta(x, y)$.

Comme la distance de Kobayashi $d_{\tilde{S}}$ est la plus grande distance satisfaisant cette inégalité, on a $d_D(f(x), f(y)) \leq C.d_{\tilde{S}}(x, y)$. □

Passons maintenant à la preuve du théorème 1.6. Pour simplifier, on se contente de démontrer la forme plus faible suivante.

Théorème 1.9 (Deligne, bis). *Soit S' un ouvert de Zariski d'une variété analytique compacte $\bar{S}$ et soit $N \in \mathbb{N}$. Les systèmes locaux de $\mathbb{Q}$-vectoriels de dimension n sous-jacents à une $\mathbb{Z}$-VHS polarisées sur S ne forment qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'étant donné un domaine de périodes D pour des types $h^{p,q}$ fixés vérifiant $\sum h^{p,q} = N$, il existe un nombre fini de classes de conjugaison de $\rho : \pi_1(S) \to G_{\mathbb{Q}}$ pour lesquelles il existe $f : \tilde{S} \to D$ holomorphe, horizontale, ρ-équivariante définissant une $\mathbb{Z}$-VHS.

Pour une telle paire $(f : \tilde{S} \to D, \rho)$, notons $o_{\tilde{S}}$ un point-base de $\tilde{S}$ envoyé sur o_D par f. Pour tout $\gamma \in \pi_1(S)$, on a $d_D(\rho(\gamma).o_D, o_D) = d_D(f(\gamma.o_{\tilde{S}}), f(o_{\tilde{S}})) \leq d_{\tilde{S}}(\gamma.o_{\tilde{S}}, o_{\tilde{S}})$. Ce dernier terme étant indépendant de ρ, ceci prouve qu'étant donné $\gamma \in \pi_1(S)$, $\rho(\gamma)$ appartient à un compact de $G_{\mathbb{R}}$, indépendant de ρ.

D'où :

Proposition 1.10. *A N fixé, pour chaque γ dans $\pi_1(S)$, $\exists C_\gamma > 0$ tel que pour tout ρ comme ci-dessus,*

$$|\operatorname{Tr}\rho(\gamma)| \leq C_\gamma.$$

Comme $\operatorname{Tr}\rho(\gamma) \in \mathbb{Z}$, il n'y a, à N fixé, qu'un nombre fini de valeurs possibles pour $\operatorname{Tr}\rho(\gamma)$. On finit alors la preuve par les deux théorèmes suivants :

Théorème 1.11 (Théorème 1)**.** *Soit Γ un groupe de type fini. Soit N un entier. Il existe une partie finie F de Γ telle que si deux représentations linéaires de dimension N de Γ sur un corps de caractéristique 0, de caractère χ_1 et χ_2 vérifient $\chi_1 = \chi_2$ sur F, alors $\chi_1 = \chi_2$.*

Théorème 1.12 (Théorème 2, Deligne)**.** *Si S est un ouvert de Zariski d'une variété analytique compacte $\bar{S}$ et si ρ est la monodromie d'une $\mathbb{Q}$-variation de structures de Hodge polarisées sur S, alors ρ est semi-simple.*

Le premier théorème implique qu'il n'y a pour ρ qu'un nombre fini de caractères possibles et le second montre que de telles représentations ρ de $\pi_1(S)$ sont définies par leur caractère, à isomorphisme près. $\square$