# L'enseignement philosophique et les sciences

## Fondation Simone et Cino Del Duca

## Paris 9 mai 2012

Charles TOROSSIAN

Inspecteur général de l'Education nationale

## Avant propos !

Je souhaite dans un premier temps remercier nos collègues de l'Institut pour avoir initié et réalisé l'idée d'un tel colloque qui rassemble ce matin un grand nombre de personnes dans un lieu prestigieux. C'est dire l'intérêt que l'institution et donc par osmose la société accordent à la chose.

Merci à nos hôtes.

Il est sans doute difficile en 10 à 15 minutes de brosser un panorama assez vaste d'un sujet aussi essentiel que la relation des sciences et plus particulièrement des mathématiques à la philosophie. Tel ne sera donc pas mon propos ; je crois que d'autres personnes bien plus savantes ont écrit depuis des siècles sur la question. À dire vrai le sujet est intarissable.

Mon propos ce matin, se bornera à rappeler dans un premier temps ce que l'on attend des mathématiques dans l'enseignement scolaire et d'examiner dans un deuxième temps quelques exemples issus des programmes de lycée qui pourraient donner lieu à des débats utiles dans l'interaction mathématiques et philosophie.

## La place des mathématiques dans l'espace scientifique scolaire.

Traditionnellement les mathématiques ont une place de choix dans l'enseignement scolaire français ; elles sont présentes de la maternelle à l'université. Les volumes horaires sont importants (5h en primaire, 4h au collège jusqu'à 8h en Terminale scientifique, 12h en CPGE) ; générant des masses enseignantes importantes (12 000 agrégés, 40 000 certifiés). L'agrégation de mathématiques recrute à elle-seule ¼ des agrégés.

D'abord à travers le calcul, puis à travers le raisonnement souvent issu de la géométrie, que l'on espère formateur pour le citoyen et enfin à travers l'outil, pourrais-je dire le bras armé pour le professionnel en devenir que sont les ingénieurs, les professeurs, les chercheurs, l'enseignement scolaire place les mathématiques dans la résolution des problèmes ou l'acquisition de compétences.

Faire des mathématiques *c'est résoudre des problèmes.* Faire des mathématiques c'est *acquérir des compétences* : *chercher, raisonner, calculer, modéliser, s'exprimer*.

La situation laisse peu de place en vérité à la réelle compréhension du lien avec les autres sciences. Pourrais-je dire ici, de manière non officielle, que la situation est perfectible car les disciplines dans l'enseignement scolaire se sont recentrées, sans doute à l'excès, sur leur propre champ, oubliant leur cousinage et perdant sans doute en richesse d'interactions.

Cet *outil* que les millénaires ont rendu efficace, terriblement efficace est l'objet d'admiration mais aussi de peurs. Du pilotage des tirs de canon à celui des missiles, des prédictions météorologiques à la conquête spatiale, du codage romain à Internet, de la mesure à la prédiction, les mathématiques sont présentes partout, souvent cachées.

Au-delà de ces banalités, il convient de s'interroger comment l'esprit humain arrive à condenser en sept symboles mathématiques les équations de Maxwell[1] ; $dF = 0$ et $d * F = * J$. Pourquoi Newton peut-il décrire la gravitation universelle en trois symboles ; $\sum \vec{f} = M\,\vec{a}$ ?

Les mathématiques sont puissantes et la question qui se pose est de savoir si ce langage est consubstantiel au monde ou à l'esprit humain. Mon camarade Stanislas Dehaene viendra lors de la remise des prix des Olympiades de mathématiques le 6 juin prochain nous parler de *l'évolution du cerveau et l'origine de certaines intuitions mathématiques*. Vaste sujet.

La mathématisation de la biologie est de mon point de vue, un objectif essentiel du XXIème siècle. Le vivant en ce moment, si l'on me permet ce parallèle, se trouve dans l'état de la physique avant l'arrivée de la dérivée et de Newton. Nous attendons des choses exceptionnelles dans la mathématisation du vivant au cours de XXIème siècle ; les objets mathématiques qui permettront d'interpréter le vivant n'existent pas encore ou personne ne les a encore imaginés. Peut-on penser par exemple à des applications des catégories dérivées, je le pense, car ces objets sont conçus pour englober la fonctionnalité dans toute sa hiérarchie et l'on apprend de Teilhard de Chardin que le vivant se situe dans la branche de la complexité.

Notre ambition aujourd'hui en tant que professionnels de l'éducation est d'ouvrir l'esprit de notre jeunesse à des champs larges pour espérer y voir émerger des idées nouvelles qui révolutionneront l'interaction des mathématiques et du vivant.

Il est temps de faire une pause et de s'ouvrir au-delà des formules incantatoires, à une véritable réflexion sur la nature de la relation des mathématiques avec le monde et l'homme.

Au final nous pensons que les mathématiques ne sont pas uniquement un outil pour décrypter le monde, c'est un langage pour comprendre ce que nous sommes.

## Quelques exemples issus des programmes de lycée dans l'interaction mathématiques et philosophie.

Je prendrai 4 exemples pour illustrer mon propos.

1. **Les Nombres complexes :**

C'est au XVIème siècle qu'apparaissent réellement les nombres complexes. Vers 1535 Tartaglia redécouvre la technique de Del Ferro et l'explique imprudemment à Cardan qui passera à la postérité. En voulant

[1] Ici $F = B - dt \wedge E$ est le champ électromagnétique, $B$ le champ magnétique (c'est une 2-forme), $E$ le champ électrique (c'est une 1-forme), $J = -\rho\, dt + j_x dx + j_y dy + j_z dz$ la 1-forme courant, $*$ l'opérateur de Hodge et $d$ l'opérateur différentiel sur les formes.

résoudre les équations du 3ème degré, l'introduction d'une racine carrée au nombre $-1$ s'impose comme une technique astucieuse, sans doute incomprise mais qui donne un résultat certain : en transitant par des nombres imaginaires on obtient bien 3 solutions réelles d'une équation ! Comment est-ce possible ?

Comme on sait que le carré d'un nombre réel est positif, cette racine $\sqrt{-1}$ n'est pas réelle. Est-elle imaginaire ? Le terme est resté et le statut incertain de ce nombre questionne. Le franchissement de l'interdit permet de résoudre un problème ; c'est-à-dire que l'interdit n'indiquait pas un gouffre dangereux mais une porte sur l'inconnu.

Si l'objet est insaisissable, son rôle est tellement fondamental dans la résolution des problèmes que l'on souhaite qu'il existe. Peut-on alors poser le problème de la cohérence, peut-on affirmer que toutes les difficultés des calculs sont surmontables grâce à l'affirmation de l'existence d'un tel imaginaire. Affirmer est-ce se convaincre de l'existence ? Il a fallu attendre Gauss en 1797 pour avoir une interprétation géométrique de ces nombres.

L'enseignement scolaire a abandonné l'écriture $\sqrt{-1}$ préférant l'emploi du symbole $i$. Ainsi nous avons $i^2 = -1$. Mais au fond on substitue un problème par un autre. Le changement d'une notation ambiguë pour une notation algébrique plus droitière, plus désincarnée (*je hais l'algèbre* disait Simone Weil) n'est qu'une illusion. C'est cette approche qui figure dans le futur programme de mathématiques de 2012.

Et pourtant l'algèbre apporte une solution intéressante à ce problème. En voulant résoudre l'équation $x^2 + 1 = 0$ la solution est dans le problème. En vérité l'inconnue, le fameux $x$, est la solution du problème lui-même. Cette idée est déconcertante (elle déstabilise nos candidats à l'agrégation) mais est cohérente d'un point de vue mathématique [2]. Bref, l'algèbre nous apprend que poser le problème c'est déjà le résoudre et renvoie clairement à la question du positionnement dans le discours.

J'encourage nos professeurs à réfléchir à cet aspect des choses.

## 2. La Dérivée :

En 1620, Fermat propose une méthode originale pour trouver le maximum d'une aire d'un rectangle connaissant son périmètre. C'est le problème phare dans l'enseignement des classes de seconde. Il est dommage de ne pas se référer à l'histoire quand nos professeurs abordent aujourd'hui ce problème en manipulant logiciel ou autre démarche d'investigation.

Que fait Fermat ? Il imagine que le produit $xy$ est maximal ($x, y$ sont les longueurs des cotés) et se propose de dire qu'il en est à peu près de même pour le produit $(x + e)(y - e)$, ce qui nous amène rapidement à penser que $ex \sim ey + e^2$, c'est-à-dire après avoir divisé par $e$ , $x \sim y + e$. Comme $e$ vaut $0$ (ou presque) on trouve $x = y$ c'est-à-dire que la solution est le carré.

La question qui m'intéresse ici, c'est de comprendre le statut de l'objet $e$. Est-il nul ou non ? C'est le scandale de l'époque. L'incompréhension de la technique, malgré son efficacité rend suspect le raisonnement. Est-il juste ?

Là encore des décennies (les notions de quotients algébriques, des hyper-réels) ont réhabilité le raisonnement de Fermat. Sans doute trop tard. Dans les programmes de 2011, le nombre dérivé est défini

[2] Il faut quand même dire quelque chose autour de l'irréductibilité du polynôme $X^2 + 1$.

comme limite du taux d'accroissement $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quand $h$ tend vers $0$. On ne donne pas de définition formelle de la limite. En définitive nous en sommes revenus à la méthode de Fermat de 1623.

Ce qui est intéressant, c'est de comprendre d'un point de vue de l'épistémologie le parcours qu'il a fallu réaliser pour comprendre ce que Fermat faisait. La question transversale qui doit intéresser nos collègues professeurs est d'accomplir ce même questionnement avec leurs élèves.

Les débats philosophiques de l'époque n'ont pas manqué, il serait dommage de nous en priver aujourd'hui.

La question latente dans l'histoire de la dérivée de Fermat à nos jours est celle de l'efficacité eu égard à la question de l'existence, de la vérité (le juste), voire de la morale.

Notre enseignement n'est pas sorti de cette vision et il se méfie en général de l'efficacité symbolique (le mot de Simone Weil que je citais tout à l'heure le prouve) que l'on soupçonne toujours de cacher une vérité plus noble. Mais en vérité, l'histoire prouve souvent que ce qui est efficace est souvent fondé. Je pense notamment aux calculs de renormalisation des intégrales divergentes en physique théorique, qui se trouvent aujourd'hui justifiés grâce aux travaux de Connes- Kreimer et la théorie des groupes.

Bref, j'encourage nos professeurs à replacer le débat de l'efficacité dans une perspective historique.

3. **Le Hasard :**

Beaucoup de hasard fonde la stabilité. C'est déjà un sujet de philosophie. Je jette un dé non truqué 10 000 fois et je note combien de fois je trouve les chiffres 1, 2 , …, 6. J'ai peu de chance de tirer 10 000 fois de suite le nombre 6. En définitive, les choses semblent aller de soi, et chaque nombre va sortir environ 160 fois. La physique statistique procède de la même idée.

Ce qui est quand même intéressant, c'est de mesurer aussi les écarts par rapport à cette stabilité, cette moyenne, cette normalité.

Bref, des milliards d'êtres humains sont en moyenne tous équivalents (vu de loin, de très loin, tous les êtres se ressemblent), mais nous souhaitons nous positionner par rapport à cette moyenne. Tous les champs des relations sociales et humaines voire économiques ou politiques sont guidés par cette mesure à la normalité.

Ce que nous apprennent les mathématiques c'est que cet écart est universel, ce sont les fameuses gaussiennes, les courbes en cloche qui ne nous quittent pas depuis l'enfance ; le poids, la circonférence du crâne, la taille, les résultats scolaires, les études internationales, les salaires, *etc*.

Cette découverte fondamentale est forcément stupéfiante. Elle signifie que le hasard total est contrôlé au premier ordre, mais ce que l'on oublie de dire dans le cours de mathématiques, c'est que l'on ne peut pas aller beaucoup plus loin dans l'analyse. Bref l'écart à la normalité étant lui-même standardisé, il est élevé au statut de vérité, voire de dogme.

J'encourage nos professeurs à réfléchir avec leurs collègues, à l'universalisme apparent du gaussien et à s'interroger sur le fait qu'une formulation aussi magnifique puisse être un guide de pensée pour l'homme, sans le conduire à des catastrophes. Les crises financières se fondent sur ces croyances ; le modèle de Black et Scholes exploite de manière fondamentale cette idée.

Sans doute nos élèves et nos professeurs n'ont pas pris assez de recul sur les objets qu'ils manipulent. Il serait temps d'y remédier et au plus vite.

4. **La Notion de groupe :**

Elle a été introduite dans l'enseignement scolaire après la révolution des mathématiques modernes. Ce fut un échec patent.

Il est assez intéressant de comprendre le pourquoi de cet échec sur l'exemple de la notion de groupes mathématiques. En vérité, l'enseignement s'est concentré sur la description des éléments d'un groupe et des lois de composition. Bref, ce qui importait était de comprendre les états de l'objet. C'était surtout très ennuyeux et cela l'est toujours en première d'année universitaire.

Je crois que ce qui est important dans un groupe, c'est la manière dont il agit sur les autres objets mathématiques. C'est ce que nous apprenons à nos candidats à l'agrégation. Je ne suis pas sûr qu'ils comprennent bien de quoi il s'agit… ce qui n'est pas pour me rassurer.

En vérité, l'action du groupe révèle la nature profonde de l'objet. On le voit lorsqu'on veut différentier les groupes de dimension 1, $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$ ; les représentations algébriques dévoilent leurs différences fondamentales. L'exemple montre que l'action est plus importante que l'état et que les choses se dévoilent par leurs actions. C'est clairement un pont sur un champ philosophique classique et c'est une ligne de fracture dans les mathématiques et dans la pensée philosophique.

Au fond la question renvoie à l'étude de l'objet pour lui-même ou pour ce qu'il fait ou peut faire.

Comme on le voit sur cet exemple élémentaire, les mathématiques, y compris dans l'enseignement secondaire portent déjà tout le questionnement du positionnement des sciences, par rapport à leurs actions ou leurs interactions [3].

## CONCLUSION.

Je crois que les exemples que j'ai donnés, montrent qu'il est inutile d'attendre l'Université pour aborder les problématiques philosophiques qui sous-tendent l'enseignement des mathématiques.

Je vous remercie pour votre attention.

---

[3] Le raisonnement par récurrence m'a toujours fasciné. Nous devrions nous attarder sur cet exemple. Si $P(0)$ est vrai et si je démontre que pour tout $n$, $P(n) \rightarrow P(n+1)$, alors j'aurais démontré que $P(n)$ est toujours vrai. J'aurais démontré une infinité de propositions. Cette maitrise de l'infini, la transcendance la pensée sur la matière est à mon sens spectaculaire. Elle touche à la définition profonde de l'être.