Problème de Kashiwara-Vergne et les Associateurs de Drinfeld

Université de Lyon 1

Lundi 11 Octobre 2010

par

Charles Torossian

Ministère Education Nationale,

Chercheur associé à Univ. Paris 7

Quelques références utiles

Anton Alekseev+ CT, The Kashiwara-Vergne Conjecture and Drinfeld's associators *math.RT/0802.4300*.

Anton Alekseev + B. Enriquez + CT, Drinfeld associators and solutions of the Kashiwara-Vergne equations *math.RT/0903.4067* accepté aux Publ. Math IHES.

AA + CT, On triviality of the KV problem for quadratic Lie algebras, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009)*.

Luc Albert + Pascale Harinck + CT, Solution non universelle pour le problème KV-78, *Journal of Lie Theory, vol 18, n. 2 (2008)*.

I- Introduction

Soient X, Y deux matrices de taille n

$$X = \begin{pmatrix} \ddots & \\ & \ddots \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} \ddots & \\ & \ddots \end{pmatrix}$$

Je note

$$\mathrm{ad}\,(X)Y := [X,Y] := XY - YX,$$

c'est le crochet de Lie. Il vérifie les deux propriétés suivantes

$[X,Y] = -[Y,X]$ (antisymétrie)

$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ (Identité de Jacobi)

Ces deux propriétés définissent la notion d'algèbre de Lie.

On note en général $gl(n)$ l'espace vectoriel des matrices de taille n muni de cette structure d'algèbre de Lie.

II- Formule de Campbell-Hausdorff

Sophus Lie (1842 - 1899) établit un lien entre les groupes continus (on dit aujourd'hui groupes de Lie) comme $GL(n)$ et les algèbres de Lie comme $gl(n)$.

Ce lien est donné par l'application exponentielle.

La dérivée de l'exponentielle fait intervenir la série de Bernoulli

$$\frac{x}{1-e^{-x}} = 1+\frac{x}{2}+\sum_{n\geq 1}\frac{b_{2n}}{2n!}x^{2n} = 1+\frac{x}{2}+b(x)$$

Le point important est que la propriété

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

ne s'étend pas pour les matrices de taille $n \geq 2$. On peut toutefois calculer le produit

$$\exp(X)\exp(Y)$$

C'est une matrice de la forme

$$\exp(\cdots)$$

Je note $\mathrm{ch}(X, Y)$ cette chose $\cdots$ qui dépend de X, Y. Comme la multiplication des matrices est associative notre loi

$$(X, Y) \mapsto \mathrm{ch}(X, Y)$$

définit une loi associative. On peut alors calculer que

$$\mathrm{ch}(X,Y) = X+Y+\tfrac{1}{2}[X,Y]+\tfrac{1}{12}[X,[X,Y]]+\tfrac{1}{12}[Y,[Y,X]]$$
$$-\tfrac{1}{24}[X,[Y,[X,Y]]]+\cdots$$

C'est la formule de Baker-Campbell-Hausdorff. Elle exprime $\mathrm{ch}(X,Y)$ comme une somme infinie de **crochets** de X, Y avec des coefficients rationnels faisant intervenir les nombres de Bernoulli.

Commentaires sur la formule BCH

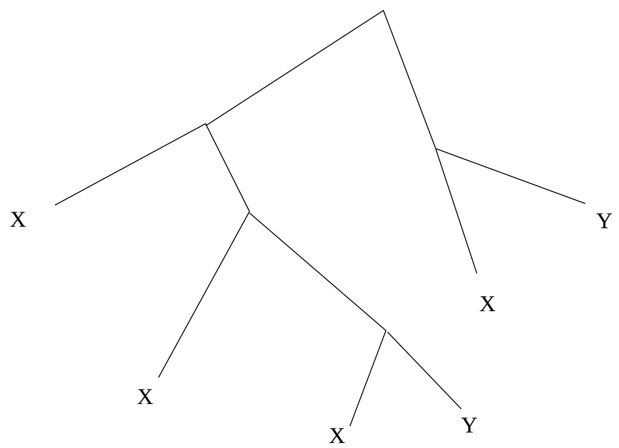
– A cause de la propriété de Jacobi qui lie les crochets de trois matrices, il n'y a pas une unique façon d'écrire ch(X, Y) comme série de X, Y.

– Cette formule est utile pour résoudre de manière approximative des équations différentielles.

– Une expression du genre

$$[[X, [X, [X, Y]]], [X, Y]]$$

est de degré 6 en X, Y que l'on appelle monôme de Lie. On peut coder tout monôme de Lie par un graphe enraciné binaire.



Le fait que X, Y soient des matrices n'est pas très important.

On va considérer les variables formelles associées.

On notera $\mathfrak{lie}_n = \mathfrak{lie}(x_1, \ldots, x_n)$ l'algèbre de Lie libre en les variables $x_1, \ldots, x_n$ et Ass_n l'algèbre associative libre en les variables $x_1, \ldots, x_n$.

III- "Associatore" et Pentagone

Nous disposons donc de deux lois associatives sur nos algèbres de Lie : $X+Y$ et ch(X,Y).

Soit F soit une transformation (automorphisme de $\mathfrak{lie}_2$) du genre

$$X \mapsto aXa^{-1}$$

$$Y \mapsto bYb^{-1}$$

avec a, b des éléments de type groupe dépendant de X, Y. On parlera d'automorphisme tangentiel.

Imaginons que $F = F^{1,2}$ transforme la loi $X+Y$ en la loi $\mathrm{ch}(X,Y)$:

$$F(X+Y) = aXa^{-1} + bYb^{-1} = \mathrm{ch}(X,Y)$$

Comme les lois sont associatives, on a

$$F^{1,2}F^{12,3}(X+Y+Z) =$$
$$F^{1,2}\mathrm{ch}(X+Y,Z) = \mathrm{ch}(\mathrm{ch}(X,Y),Z)$$

$$F^{2,3}F^{1,23}(X+Y+Z) =$$
$$F^{2,3}\mathrm{ch}(X,Y+Z) = \mathrm{ch}(X,\mathrm{ch}(Y,Z))$$

ce qui donne

$$F^{1,2}F^{12,3} = F^{2,3}F^{1,23}$$

Notons alors

$$\Phi = \left(F^{1,2}F^{12,3}\right)^{-1}F^{2,3}F^{1,23}.$$

Cette transformation (automorphisme tangentiel en trois variables) vérifie

$$\Phi(X+Y+Z) = X+Y+Z$$

et l'équation Pentagonale

$$\Phi^{1,2,3}\Phi^{1,23,4}\Phi^{2,3,4} = \Phi^{12,3,4}\Phi^{1,2,34}$$

IV- Introduction au problème KV

Notions de **divergence**

Tout élément $a \in Ass_2 = Ass(x,y)$ peut s'écrire uniquement comme

$$a = \partial_x(a)x + \partial_y(a)y$$

Les applications partielles $D_x a$ et $D_y b$ définies par

$$a(x+th,y) = a(x,y) + t(D_x a)\cdot h + \ldots$$

sont linéaires et on peut calculer la trace comme application de $gl(n)$. On définit la *divergence* $div(a,b)$

$$div(a,b) = \mathrm{Tr}_{gl(n)}(adxD_xa + adyD_yb)$$

C'est (presque) la divergence du champ de vecteurs

$$[x,a]\cdot\partial_x + [y,b]\cdot\partial_y$$

Si on veut formaliser ceci on introduit Cyc_2 l'espace vectoriel des mots cycliques

$$\mathrm{Cyc}_2 = Ass_2/\langle(ab-ba); a,b \in Ass_2\rangle.$$

On définit la **trace universelle** comme la projection tr de Ass_n sur Cyc_2 car $tr(ab-ba) = 0$

L'application ad s'étend à Ass_2 et on peut vérifier que $D_x a = \mathrm{ad}\,(\partial_x a)$ et donc

$$\mathrm{Tr}(adxD_x a + adyD_y b) =$$

$$\mathrm{tr}\Big(\mathrm{ad}\,(x)\mathrm{ad}\,(\partial_x a) + \mathrm{ad}\,(y)\mathrm{ad}\,(\partial_y b)\Big).$$

On définit alors la **divergence universelle** par

$$\mathrm{div}(a,b) = \mathrm{tr}\Big(x\partial_x(a) + y\partial_y(b)\Big) \in \mathrm{Cyc}_2$$

Le problème de Kashiwara-Vergne ('78) :

Trouver des séries $A, B \in \mathfrak{lie}_2$,telles que :

$$\begin{cases} x+y-\mathrm{ch}(y,x)=(1-e^{-\mathrm{ad}\,x})A+(e^{\mathrm{ad}\,y}-1)B & \text{in} \quad \mathfrak{lie}_2 \\ \mathrm{div}(A,B)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big(b(x)-b(\mathrm{ch}(x,y))+b(y)\Big) & \text{in} \quad \mathrm{Cyc}_2 \end{cases}$$

Rappelons que l'on a

$$\frac{x}{1-e^{-x}}=1+\frac{x}{2}+\sum_{n\geq 1}\frac{b_{2n}}{2n!}x^{2n}=1+\frac{x}{2}+b(x)$$

On dira que $(A,B)\in Sol(KV)$.

C'est un problème affine.

En fait on peut remplacer la série de Bernoulli par n'importe quelle série g telle la partie paire vaut b.

V- MOTIVATIONS

Le problème KV a une conséquence importante en analyse harmonique : toute solution "transporte" l'analyse harmonique G-invariante sur un groupe de Lie G en l'analyse $\mathfrak{g}$- invariante sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

C'est la philosophie d' Harish-Chandra's étendue à tout groupe de Lie ! !

En particulier on va en déduire le théorème d'isomorphisme de Duflo pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et les extensions de ce théorème :

Soit $\beta : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ la symétrisation et

$$q(x) = \exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{b_{2n}}{2n!2n} x^{2n}\right) = \frac{\sinh(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}.$$

THÉORÈME(Duflo '79) $\beta \circ \partial(q^{1/2})$ est un isomorphisme d'algèbres de $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ sur $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

THÉORÈME (Andler-Sahi-Dvorsky-T.'00) Extension aux germes de distributions invariantes près de $0 \in \mathfrak{g}$.

THÉORÈME (Pevzner-T. '03) Extension à l'algèbre de cohomologie $H(\mathfrak{g}, S(\mathfrak{g}))$ sur $H(\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g}))$.

Le problème KV a été résolu par Alekseev-Meinrenken en 2006, en utilisant une déformation de la formule de Campbell Hausdorff que j'avais définie grace à **la formule de quantification de Konsevich**.

V- LE PROBLEME KV TANGENT

Comme le problème KV est affine on va essayer de regarder un problème linéaire associé

$(1 - e^{-\mathrm{ad}\, x})A + (e^{\mathrm{ad}\, y} - 1)B = 0$ et $\mathrm{div}(A, B) = 0$.

Les termes (A_0, B_0) de plus bas degré des séries A, B sont solution du problème

$$\begin{cases} [x, A_0] + [y, B_0] = 0 & \text{in} \quad \mathfrak{lie}_2 \\ \mathrm{div}(A_0, B_0) = 0 & \text{in} \quad \mathrm{Cyc}_2 \end{cases}$$

C'est un système linéaire et je note $\mathfrak{krv}_2$ l'espace des solutions.

LEMME (AT) : $\mathfrak{krv}_2$ forme une algèbre de Lie graduée (crochet des dérivations tangentielles).

Ce n'est pas trivialement 0 car $c = (y, x) \in \mathfrak{krv}_2$ est l'unique solution en degré 1.

La première équation avait été résolue par Drinfeld en utilisant les graphes trivalents, mais étrangement personne n'avait remarqué la chose !

En fait la difficulté réside dans la deuxième équation. Toutefois dans le cas des algèbres quadratiques on a le résultat

PROPOSITION (AT '09) Pour $gl(n)$ et plus généralement les algèbres de Lie quadratiques la première équation implique la seconde.

Nous avons commencé à chercher des solutions par ordinateur grace à l'aide de Luc Albert (CPGE, Nice) et voici le tableau des dimensions jusqu'en degré 16 (24h de calcul pour écrire le système en dimension 16 !)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\mathfrak{kv}_2$	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	2	2	3	3	5

Voici la solution en degré 8 où on observe une symétrie remarquable (conjecture ?) $B(x,y) = A(y,x)$

$$
\begin{aligned}
A(x,y) = 4*[[x,y],[y,[x,[x,[x,[x,y]]]]]]+\\
6*[[x,y],[y,[y,[x,[x,[x,y]]]]]]\\
-6*[[x,y],[y,[y,[y,[x,[x,y]]]]]]-4*[[x,y],[y,[y,[y,[y,[x,y]]]]]]\\
-4*[[x,y],[[x,y],[x,[x,[x,y]]]]]+6*[[x,[x,y]],[y,[x,[x,[x,y]]]]]\\
+6*[[x,[x,y]],[y,[y,[x,[x,y]]]]]-3*[[x,[x,y]],[y,[y,[y,[x,y]]]]]\\
+2*[[x,[x,y]],[[x,y],[x,[x,y]]]]-3*[[x,[x,y]],[[x,y],[y,[x,y]]]]\\
+4*[[y,[x,y]],[x,[x,[x,[x,y]]]]]+9*[[y,[x,y]],[y,[x,[x,[x,y]]]]]\\
-12*[[y,[x,y]],[y,[y,[x,[x,y]]]]]-10*[[y,[x,y]],[y,[y,[y,[x,y]]]]]\\
+9*[[y,[x,y]],[[x,y],[x,[x,y]]]]-3*[[y,[x,y]],[[x,y],[y,[x,y]]]]\\
-6*[[x,[x,[x,y]]],[y,[x,[x,y]]]]-3*[[x,[x,[x,y]]],[y,[y,[x,y]]]]\\
+3*[[y,[x,[x,y]]],[y,[y,[x,y]]]],
\end{aligned}
$$

Considérons le problème KV-étendu où je note $\widehat{\mathfrak{krv}}_2$ l'algèbre de Lie des solutions :

$(A, B) \in \widehat{\mathfrak{krv}}_2$ si $\exists n \geq 2$

$$\begin{cases} [x, A] + [y, B] = 0 & \text{in} \quad \mathfrak{lie}_2 \\ \operatorname{div}(A, B) = \operatorname{tr}\Big(x^n - (x + y)^n + y^n\Big) & \text{in} \quad \mathsf{Cyc}_2 \end{cases}$$

Les degrés n sont nécessairement impairs et voici les dimensions des espaces de solutions jusqu'en degré 16 :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\widehat{\mathfrak{krv}}_2$	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5

On utilise la site *Sloane Sequences server*

http ://www.research.att.com/ njas/sequences/

"0,1,0,1,0,1,1,1,1,2,2,3,3,4,5" qui fournit la solution "Irreducible multiple zeta values of weight n" ! ! !

Les Multizetas sont reliés aux associateurs de Drinfeld... et nous avons pensé ce jour là que nous avions trouvé un lien profond entre l'algèbre de Drinfeld $\mathfrak{grt}_1$ et le problème KV.

VI- L'algèbre $\mathfrak{grt}_1$ de Drinfeld

Soit $\mathcal{T}_n$ l'algèbre de Lie des tresses pures engendrée par les symboles $t_{i,j}$, pour $1 \leq i \neq j \leq n$ avec les relations $t_{i,j} = t_{j,i}$,

$[t_{i,j}, t_{i,k} + t_{k,j}] = 0$ et

$[t_{i,j}, t_{k,l}] = 0$ si $k, l \neq i, j$.

On note $t_{ij,k} = t_{i,k} + t_{j,k}$

Drinfeld definit l'algèbre $\mathfrak{grt}_1$ comme l'algèbre de Lie (munie du crochet d'Ihara) des $\varphi \in \mathfrak{lie}_2$ vérifiant

$$\varphi(x, y) + \varphi(y, x) = 0 \qquad \text{(Sym.)}$$

$$\varphi(x, y)+\varphi(y, z)+\varphi(z, x) = 0 \text{ pour } x+y+z = 0 \qquad \text{(Hex.)}$$

$$\varphi(t_{1,2}, t_{2,34}) + \varphi(t_{12,3}, t_{3,4}) = \varphi(t_{2,3}, t_{3,4})+\varphi(t_{1,23}, t_{23,4})+\varphi(t_{1,2}, t_{2,3}) \qquad \text{(Pent.)}$$

L'équation Pent. est très compliquée (c'est la version linéarisée de l'équation Pentagonale) mais c'est une équation très importante.

En fait Furusho ('07) a montré que Pent. implique Sym. + Hex.

THÉORÈME (AT) : L'application

$$\Psi : \mathfrak{grt}_1 \to \widehat{\mathfrak{krv}_2}$$

$$\varphi \mapsto (\varphi(-x-y,x), \varphi(-x-y,y))$$

est une application de Lie injective.

En fait Drinfeld a défini pour tout $n \geq 1$, des "générateurs" σ_{2n+1} de degré $2n+1$. On a vérifié que l'élément de degré 8 ci dessus vaut $\Psi([\sigma_3, \sigma_5])$. Jusqu'en degré 16 (et même plus) la conjecture suivante est vraie :

CONJECTURE : $\mathfrak{grt}_1 \sim \widehat{\mathfrak{krv}_2}/ < c >$

VII- Associateurs and $Sol(\widehat{KV})$

Soit $\Phi = \Phi(t_{1,2}, t_{2,3}) \in T_3 = \exp(\mathcal{T}_3)$ vérifiant l'équation Pentagonale

$$\Phi^{2,3,4}\Phi^{1,23,4}\Phi^{1,2,3} = \Phi^{1,2,34}\Phi^{12,3,4}$$

c'est à dire

$\Phi(t_{1,2}, t_{2,34})\Phi(t_{12,3}, t_{3,4}) =$
$\Phi(t_{2,3}, t_{3,4})\Phi(t_{1,23}, t_{23,4})\Phi(t_{1,2}, t_{2,3}).$

C'est donc automatiquement un associateur de Drinfeld, c'est à dire qu'il vérifie Sym. + Hex.

Drinfeld montre que le groupe de Grothendieck-Teichmüller

$$GRT_1 = \exp(\mathfrak{grt}_1)$$

agit librement et transitivement sur ses associateurs.

C'est un ensemble non vide, car il contient l'associateur de Knizhnik-Zamolodchikov Φ_{KZ}

que l'on construit comme transport parallèle de $0 \to 1$ du système différentiel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}G(z) = \frac{1}{2i\pi}\Big(\frac{t_{1,2}}{z} + \frac{t_{2,3}}{z-1}\Big)G(z).$$

THEOREM (AT) : Tout associateur de Drinfeld (et plus généralement de $\exp(\mathfrak{krv}_3)$) se factorise en

$$\Phi^{-1} = (F^{1,2}F^{12,3})^{-1}F^{2,3}F^{1,23} \qquad (*)$$

avec de plus $F(x+y) = \mathrm{ch}(x,y)$. Par ailleurs (A,B) défini par

$$(A,B) := F^{-1}\partial_s F(sx,sy)|_{s=1} \qquad (**)$$

est une solution dans $Sol(\widehat{KV})$.

Réciproquement toute solution (symétrique) $(A,B) \in Sol(\widehat{KV})$ définit une transformation F par (**) qui définit un associateur Φ_F.

En fait **Damien Calaque** a observé que si Φ est un associateur de Drinfeld alors la transformation μ_Φ définie par

$$\mu_\Phi(x) = Ad(\Phi(x, -x-y)) \cdot x$$

$$\mu_\Phi(y) = Ad(e^{-(x+y)/2}\Phi(y, -x-y)) \cdot y$$

vérifie $\mu_\Phi(\mathrm{ch}(x,y)) = x + y$.

On a montré avec Enriquez et Alekseev que

THEOREM (AET) : On a la factorisation suivante

$$\Phi(t_{1,2}, t_{2,3}) \circ \mu_\Phi^{1,2} \circ \mu_\Phi^{12,3} = \mu_\Phi^{2,3} \circ \mu_\Phi^{1,23}.$$

En particulier la transformation μ_Φ induit une solution explicite du problème KV.