Du jeu de Pile ou Face à la formule de Black and Sholes

Mardi 17 Décembre 2013

Cours donné à l'ESEN aux IPR et IEN stagiaires par

Charles Torossian

Inspection générale de l'Education nationale
110, rue de Grenelle, F-75007 Paris
charles.torossian@education.gouv.fr

1 Introduction

La rénovation des programmes de classes de première et terminale, introduit de manière majeure la loi binomiale, les variables à densité (de manière assez formelle) et une introduction au théorème limite central.

Dans cet exposé, nous allons illustrer comment la superposition de ces éléments permet d'introduire sans trop d'efforts un des objets probabilistes majeurs du XXème siècle, le mouvement Brownien.

2 Le jeu de pile ou face

Soit le jeu de la fortune suivant : **Pile** me rapporte 1€, **Face** me fait perdre 1 €. Quelle est ma fortune après avoir joué n fois ?

Chaque tirage, supposé être indépendant les uns des autres, représente une variable aléatoire qui a deux issues $+1; -1$ avec probabilité $\frac{1}{2}$. La moyenne est nulle et l'écart type vaut 1. Chaque tirage suit ce que l'on appelle une loi binomiale.

Mon jeu de la fortune et la question qui y est associée (combien vais-je gagner ou perdre à la fin du jeu) est un problème intéressant, mais certainement mal posé.

On va modéliser la situation pour voir quels types de mathématiques interviennent dans ce problème. Notons $X_i = \pm 1$ le gain pour le i-ème coup. Ma fortune S_n au n-ème coup peut donc s'écrire :

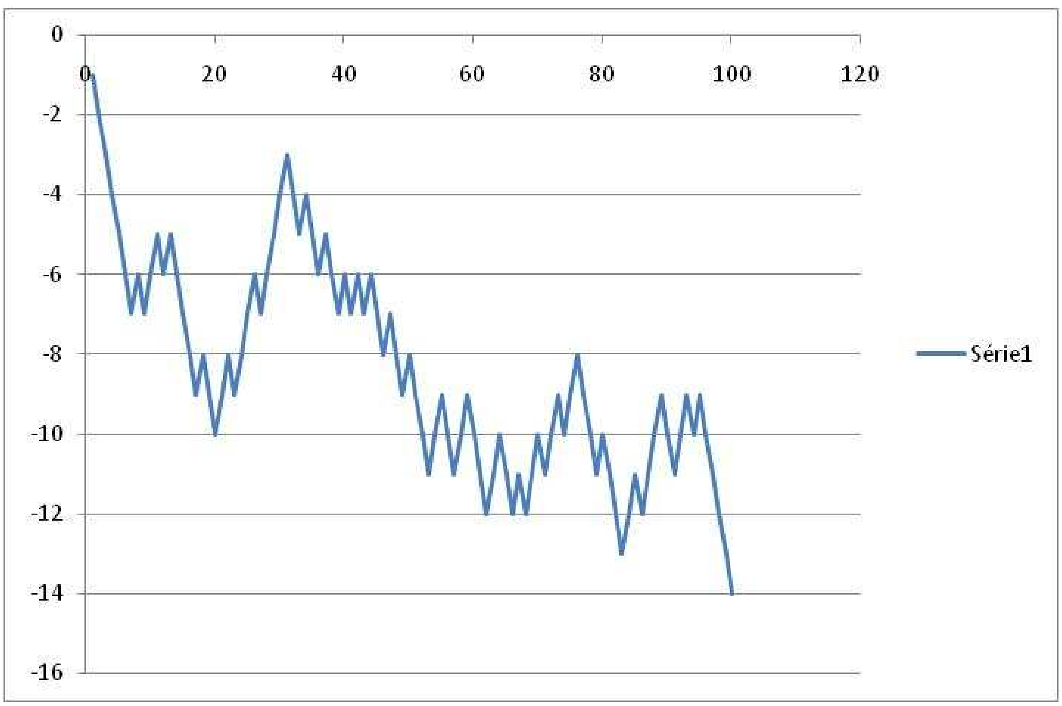
$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Dans le programme du lycée on lit que X_i suit une loi binomiale centrée (c'est à dire de moyenne nulle) de paramètre $\frac{1}{2}$.

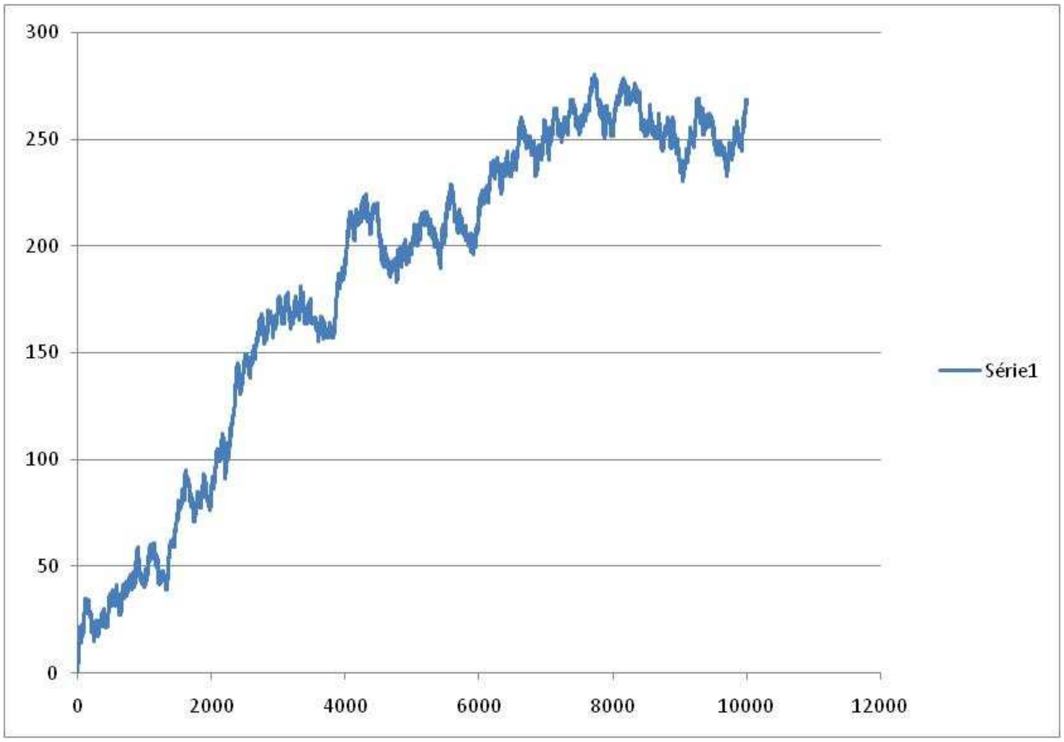
3 Approche expérimentale

Ma fortune est comprise dans l'intervalle $[-n, n]$, ce qui veut dire que ma fortune est certainement aléatoire... elle dépend du gain à chaque étape. On peut commencer par prendre un ordinateur et voir ce qui se passe.

Voici une simulation numérique pour $n = 100$ et $n = 10000$.



Jeu de la fortune pour 100 tirages



Jeu de la fortune pour 10000 tirages

Comme on peut le voir sur cet exemple, je ne termine pas avec une dette -10 000€. Pour ce faire, il aurait fallu que je tire 10 000 fois **Face**, ce que personne n'imagine. On peut tester que souvent je termine mon jeu entre $[-200; +200]$.

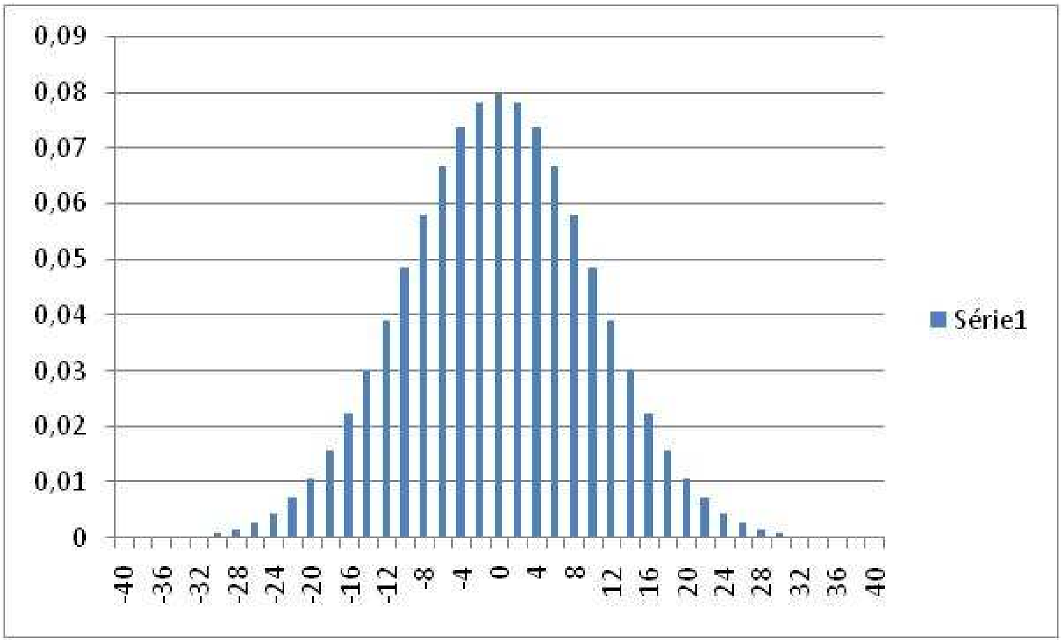
La variable S_n est une somme de variables aléatoires binomiales indépendantes, donc binomiale. On sait même qu'il s'agit d'une loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. Donc le calcul des probabilités de gains se fait directement grace aux coefficients binomiaux. Si durant le jeu, je tire p fois **Pile** et $n-p$ fois **Face**, alors ma fortune est $k = p$ € - $(n-p)$ € = $(2p-n)$ €.
La probabilité d'un tel évènement est :

$$P\left(S_n = (2p-n)\right) = \left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array}\right) (\frac{1}{2})^n,$$

avec $\left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array}\right)$ le coefficient binomiale (mon but n'est pas de préciser sa valeur exacte).

La valeur la plus probable est en fait 0 (si n est pair).

Le calcul précis des coefficients ne présente pas d'intérêt. Voici la distribution de probabilités de ma loi, pour $n = 100$.



Distribution de probabilité pour 100 tirages dans le jeu de la fortune

Cette distribution est une approximation de la distribution gaussienne, qui écrase les évènements au delà de ± 30. Le théorème de Laplace donne une précision sur cette distribution de probabilité lorsque n est assez grand.

3.1 Quelques éléments quantitatifs

Ma fortune S_n est aléatoire. Que puis-je espérer en moyenne ?

La réponse provient d'un calcul rapide :

1. En moyenne le gain est nul, c'est à dire que l'espérance $E(S_n) = 0$, ... ce qui n'est pas très étonnant. Comme l'espérance est linéaire on en déduit aussi que le gain moyen $\frac{S_n}{n}$ est lui aussi en moyenne nul.

2. La Loi faible des grands nombres dit qu'en plus $\frac{S_n}{n}$ tend vers 0 en probabilité, c'est à dire que
$$\lim_{n\to\infty} P(|S_n/n| > \epsilon) = 0.$$

3. La loi forte des grands nombres, dit que presque sûrement $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0$.

En définitive, il semble que jouer ne sert pas à grand chose ... sauf que parfois notre fortune grandit sérieusement (la situation contraire se rencontre aussi).

4 Une conséquence du théorème limite central (Laplace)

(Laplace) Comme il n'est pas aisé que calculer les coefficients binomiaux...et comme je ne cherche pas à être très précis, je m'intéresse au fait de savoir que si fortune peut se situer dans un intervalle $[a;b]$ avec $a, b \in [-n;n]$.

Le théorème limite central, va préciser cette assertion. En probabilité, $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ tend vers la loi centrée normale réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

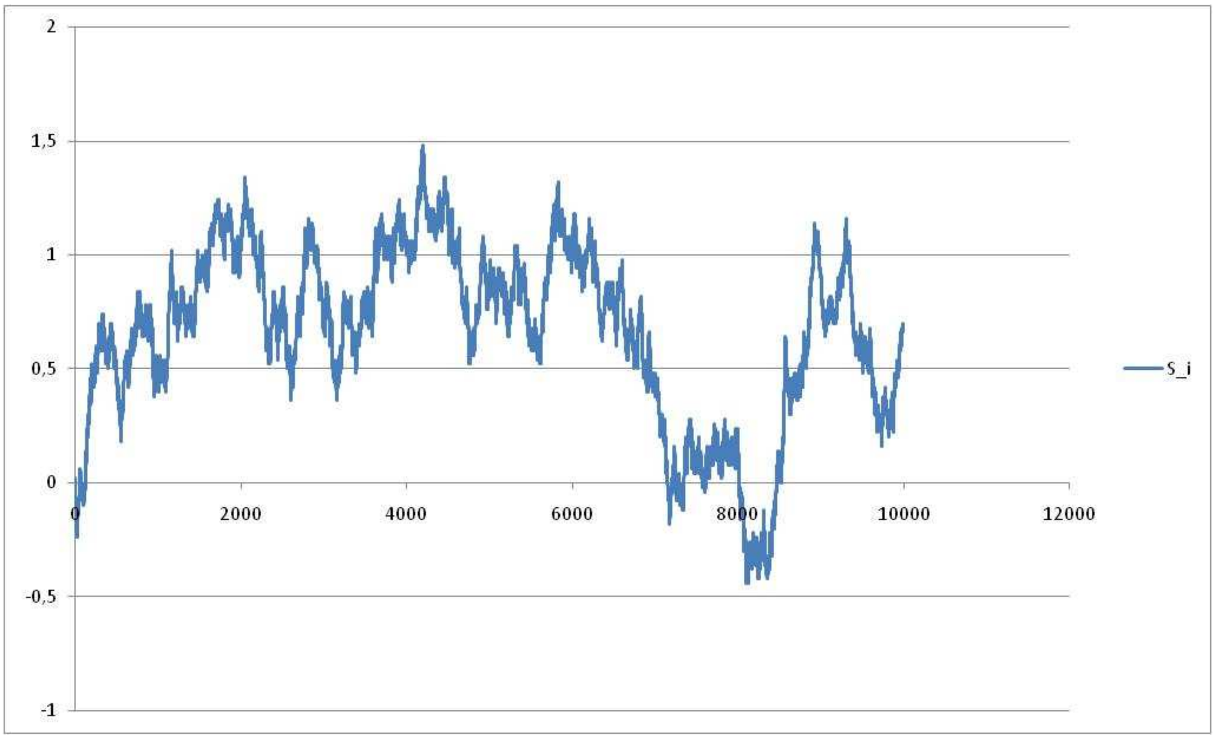
Donc pour $a < b$ on a

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n \in [a\sqrt{n}, b\sqrt{n}]) = P(\mathcal{N}(0,1) \in [a,b]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t.$$

Ce résultat asymptotique est intéressant, mais que veut-il vraiment dire ?

Reprenons ma feuille Excel pour $n = 10000$ où je fais apparaître $\frac{S_n}{50}$. Pour $n = 2500$ j'ai une bonne approximation de $\mathcal{N}(0,1)$ et pour $n = 10000$ j'ai une bonne approximation de $2\mathcal{N}(0,1) = \mathcal{N}(0,4)$, c'est à dire d'écart type $\sigma = 2$.

Question : pourquoi ?
La quantité $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ s'appelle la quantité centrée réduite.



Jeu de la fortune réduit pour 10000 tirages

Cela veut dire que le point d'arrivée correspondant à $n = 10000$, doit en gros rester dans l'intervalle $[-2\sigma; +2\sigma] = [-4, +4]$ dans à peu près 95% des tirages ; c'est à dire 1 fois sur 20, dans le jeu de la fortune je sors de l'intervalle $[-200, +200]$, ce que l'on peut observer expérimentalement.

Question : qui prend le risque de perdre dans 5% des cas ?

5 Que se passe-t-il quand $n \to \infty$

Si on avait pris $n = 1000000$ et dessiné la courbe $(k, \frac{S_k}{1000})$ comme dans la feuille Excel, dans une fenêtre de taille fixée en longueur raisonnable, alors nous aurions l'impression que la courbe est continue, ou du moins à la perception humaine...

Question : En finance, on génère 1 000 000 de courbes pour simuler des futurs possibles. Quelles conséquences pour les calculs et la fiabilité sur le générateur aléatoire d'Excel et des couvertures des options sur les actions sur le marché dérivé ?

5.1 La courbe limite

Que dire de cette courbe limite ? En tout cas cette courbe limite n'est sûrement pas dérivable.

Explications : en avançant en x de 10^{-6} , je monte en y de $\pm 10^{-3}$. Je produis ainsi une courbe continue alors que la tangente est ± 1000.

Imaginons que l'on dessine la courbe pour n tendant vers l'infini dans une fenêtre en longueur (les abscisses x) donnée et qui corresponde à $x = 1$ pour n (qui tend lui-même vers l'infini). Le point d'abscisse $t \in [0, 1]$ a pour ordonnée $\frac{\lim S_{nt}}{\sqrt{n}}$ qui tend en loi vers

$$\sqrt{t}\mathcal{N}(0, 1) = \mathcal{N}(0, t).$$

Question : Pourquoi ?

Ainsi nous sommes en train de visualiser une courbe continue B_t, on pourrait dire un processus aléatoire B_t, nulle part dérivable dont la distribution des valeurs pour t donné correspond à $\mathcal{N}(0, t)$, la distribution gaussienne de variance t.

1. En fait $B_0 = 0$ et pour des instants $(t_1, \cdots, t_N)$ le vecteur

   $$(B_{t_1}, \cdots, B_{t_N})$$

   est un vecteur gaussien.

2. Le processus est à accroissements indépendants, c'est à dire ce qui se passe après B_t est indépendant de la nouvelle origine B_t, plus précisément $B_{t'} - B_t$ et B_t sont indépendants.
3. On a pour $t' > t$, $B_{t'} - B_t = N(0, t' - t)$.

On remarque qu'il est bien pratique de noter le carré dans le loi Normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Exercice : Vérifier que

1. $E(B_t) = 0$
2. $V(B_t) = t$
3. $E(B_t B'_t) = \min(t, t')$.
4. Pour $t < t'$, $(B'_t - B_t)$ est indépendant de B_u pour $u \leq t$.

Solution

1. Pour la première assertion on a $E(B_t) = \lim E\left(\frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}\right) = \lim 0 = 0$.

2. On calcule, grace à l'indépendance

$$V(B_t) = V\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{nt}{n}\right) = t.$$

3. Pour le calcul de la covariance, encore une fois grace à l'indépendance

$$E(B_t B_t') = E\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}} \times \frac{S_{nt'}}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E(S_{nt}S_{nt'}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \inf(nt, nt') = \min(t, t') \quad (1)$$

4. Vérifions pour $t < t'$, que $(B_t' - B_t)$ est indépendant de B_u pour $u \leq t$.
   En effet, $(B_t' - B_t) = \lim_{n\to\infty} \frac{(S_{nt'} - S_{nt})}{\sqrt{n}}$, qui clairement est indépendant de $\lim_{n\to\infty} \frac{S_{nu}}{\sqrt{n}}$, car les sommes sont disjointes et les variables qui y interviennent sont par conséquent indépendantes.

Au final nous avons construit le mouvement Brownien, c'est à dire un processus aléatoire à accroissement indépendants et gaussien.

6 Variation quadratique

Écrivons que $\mathrm{d}B_t = B_{t+\mathrm{d}t} - B_t$, c'est l'élément différentiel stochastique. Remarquons que nous sommes en train de faire ce que faisaient Leibniz et Fermat du temps de l'émergence des dérivées. Cette astuce historique, va permettre d'introduire le calcul intégral stochastique.

D'une certaine manière, l'élément différentiel est une *variable aléatoire infinitésimale* et c'est un processus gaussien de variance infinitésimal $\mathrm{d}t$. Comme on a $B_{t'} - B_t = N(0, t' - t)$ pour $t' > t$, peut donc écrire de manière un peu abusive la formule fondamentale

$$\mathrm{d}B_t = \mathcal{N}(0, \mathrm{d}t).$$

6.1 Comment comprendre cette variance instantanée ?

Reprenons notre courbe avec 1000000 de points : si j'avance en t de $\mathrm{d}t = 10^{-6}$, j'avance en y de $\pm 10^{-3}$; mais ce carré est de 10^{-6}, c'est à dire vaut $\mathrm{d}t$. Ainsi la croissance au carré en y n'est plus aléatoire !

Je peux *donc* écrire à la limite que $(\mathrm{d}B_t)^2 = (B_{t+\mathrm{d}t} - B_t)^2 = \mathrm{d}t$. Ainsi cette variance, qui mesure en moyenne, les carrés des écarts à la moyenne (qui elle est nulle ici), nous indique que cet écart n'est plus aléatoire (donc inutile de faire une moyenne).

C'est là que l'on comprend que la *variation quadratique est donnée par la variance* (d'où l'intérêt d'indiquer cette variance σ^2 dans la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$).

Retenons donc que le carré de l'élément stochastique est l'élément infinitésimal $\mathrm{d}t$. C'est à dire que B_t n'est pas un processus dérivable, mais la variation quadratique infinitésimale l'est, $(\mathrm{d}B_t)^2 = \mathrm{d}t$. La racine carrée de l'élément différentiel est donc un processus aléatoire.

Cette formule n'est pas au programme de l'agrégation et pourtant *accessible* dès la Terminale.

7 Introduction rapide au calcul d'Ito en une variable

Je considère le processus $X_t = \exp(B_t)$, c'est à dire l'exponentielle de la courbe que j'ai obtenue.

Louis Bachelier l'inventeur de la finance moderne avait introduit le mouvement brownien pour rendre compte des fluctuations des valeurs des actifs. En fait comme les intérêts sont plutôt cumulés, il faut considérer $\exp(B_t)$ pour modéliser la variation de l'actif, ce que Bachelier n'a pas fait. Sans doute est-ce pour celà qu'il n'est pas passé à la postérité.

En gros tout a été redécouvert dans les années 70 avec Black et Scholes qui ont obtenu le prix Nobel.

7.1 Les intérêts aléatoires cumulés

Soit l'espérance de X_t que je note $m_t = E(\exp(B_t))$. C'est important pour estimer les prix des actifs (voir section suivante) et de mesurer en moyenne l'expansion de son portefeuille.

On va le faire à la physicienne, en cherchant une équation différentielle vérifiée par cette fonction. On écrit $\mathrm{d}B_t = B_{t+\mathrm{d}t} - B_t$ qui suit la Loi $\mathcal{N}(0, t + \mathrm{d}t - t) = N(0, \mathrm{d}t)$.

Ce que l'on voit c'est que $\mathrm{d}B_t$ est un processus indépendant de B_t (comme on l'a dit, le processus est à accroissements indépendants). On a donc

$$\exp(B_{t+\mathrm{d}t}) = \exp(B_{t+\mathrm{d}t} - B_t + B_t)) = \exp(B_t)\exp(\mathrm{d}B_t).$$

Je fais un joli développement limité :

$$\exp(\mathrm{d}B_t) \sim 1 + \mathrm{d}B_t + \frac{1}{2}(\mathrm{d}B_t)^2 = 1 + \mathrm{d}B_t + \frac{\mathrm{d}t}{2}.$$

C'est un cas particulier de la Formule d'Ito, qui dit en gros que pour calculer les différentielles stochastiques, il faut pousser les dérivées à l'ordre 2 et remplacer les carrés par la *variation quadratique* *infinitésimale*, c'est à dire ici $(\mathrm{d}B_t)^2 = \mathrm{d}t$.

Au passage, cela veut dire qu'il faut savoir faire des DL d'ordre 2 en $N-$variables si on veut prétendre à travailler en Finance.

On a donc

$$\exp(B_{t+\mathrm{d}t}) = \exp(B_t) + \exp(B_t)\mathrm{d}B_t + \frac{1}{2}\exp(B_t)\mathrm{d}t.$$

On utilise la linéarité et l'indépendance des accroissements pour conclure :

$$E(\exp(B_{t+\mathrm{d}t})) \sim E(\exp(B_t)) + E(\exp(B_t)\mathrm{d}B_t) + E(\exp(B_t)\frac{\mathrm{d}t}{2}.$$

Or $E(\exp(B_t)\mathrm{d}B_t) = E(\exp(B_t)E(\mathrm{d}B_t) = 0$, car $\mathrm{d}B_t$ est indépendant de $\exp(B_t)$ et $E(\mathrm{d}B_t) = 0$.

Tout ceci nous amène à une équation différentielle élémentaire :
$m_{t+\mathrm{d}t} \sim m_t + m_t\frac{\mathrm{d}t}{2}$, c'est à dire

$$\frac{\mathrm{d}m_t}{\mathrm{d}t} = \frac{m_t}{2}.$$

Bref on obtient la formule $m_t = \exp(\frac{t}{2})$.

Question : pouvait-on deviner la réponse ?

8 Introduction aux équations différentielles stochastiques

On va utiliser la première équation différentielle stochastique que nous venons de rencontrer comme modélisation des actifs financiers.

Si A_t est la valeur d'un actif (par exemple une action, un panier), son rendement peut être compris comme étant la somme d'un terme non aléatoire (disons le rendement systémique) et d'un terme aléatoire :

$$\frac{\mathrm{d}A_t}{A_t} = \underbrace{a\mathrm{d}t}_{\text{rendement moyen}} + \underbrace{\sigma\mathrm{d}B_t}_{\text{rendement aléatoire}}.$$

C'est en gros le modèle standard en finance. Le calcul d'Ito, introduit ci-dessus, nous explique comment résoudre cette première équation différentielle stochastique (chose que l'on fait en Master 2 en général).

On va se convaincre que

$$A_t = A_0 \exp\left((a - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t\right),$$

et qui justifie l'intérêt d'avoir introduit $\exp(B_t)$ dans la section précédente.

En effet, pour dériver un processus aléatoire, on *pousse* le calcul à la dérivée seconde pour faire apparaître les dt. Ainsi

$$\frac{\mathrm{d}A_t}{A_t} = (a - \frac{\sigma^2}{2}) + \sigma \mathrm{d}B_t + \frac{\sigma^2}{2}\mathrm{d}t.$$

Donc A_t vérifie bien l'équation différentielle stochastique (et on dispose des mêmes théorèmes d'unicité que dans le cas déterministe).

On trouve par exemple, grace au calcul de $E(\exp(B_t)$ que $E(A_t) = \exp(at)$, comme il se doit car c'est le rendement moyen. Remarquons que dans ce cas on a intérêt à acheter car ça rapporte !

9 Formule de Black and Scholes

Cas des Call : à échéance T, un acheteur d'une option avec comme prix d'exercice K, peut espérer gagner $(S_T - K)_+ = \max(S_T - K, 0)$, c'est à dire l'écart entre le prix de l'actif et le prix d'exercice.

Le prix de l'option est nécessairement le gain moyen potentiel, sinon il y a un biais, c'est à dire que l'option vaut $C_0 = E((S_T - K)_+)$.

Cette formule n'est pas correcte, car l'actif a un rendement non nul, et donc d'une certaine manière on se trompe de probabilité. Il faut trouver un probabilité équivalente sous laquelle l'actif est une martingale, sinon il y a un deuxième biais.

En gros cela revient à tuer le "a" dans l'équation différentielle. Après avoir fait cette opération, on en déduit que le prix de l'option est maintenant donné par la belle formule qui a fait rêver des milliers de traders.

$$C(0,T) = E((S_T - K)_+) = E\left((\exp(\sigma B_T - T\frac{\sigma^2}{2}) - K)_+\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \left(\left(\exp(\sigma\sqrt{T}y - T\frac{\sigma^2}{2}) - K\right)_+\right)\exp(-\frac{y^2}{2})\mathrm{d}y. \quad (2)$$

On termine le calcul en introduisant le cumulante de Gaussien et on trouve le prix de l'option. Disons que c'est un exercice de calcul pour un bon taupin. Voila pour un Prix Nobel d'économie ....