Méthodes cinématiques pour la géométrie

Mardi 13 Décembre 2016

Cours donné à l'ESEN aux IPR et IEN stagiaires par

Charles Torossian

Inspection générale de l'Education nationale
110, rue de Grenelle, F-75007 Paris
charles.torossian@education.gouv.fr

Introduction

La place de la géométrie dans les programmes de collège et lycée questionne les mathématiciens. Longtemps considérée comme le support essentiel au raisonnement déductif, la géométrie classique (c'est-à-dire issue de la pensée grecque) est en perte de vitesse. Les arguments sont connus depuis longtemps et nous allons les discuter durant cette session :

- Trop dur pour les élèves ;
- Pas assez contextualisée dans le monde contemporain, surtout si l'on pense aux mathématiques à la mode américaine (cf. COMAP), les compétences et la vie quotidienne, bref tout le discours centré sur l'élève apprenant par lui-même ;
- Trop isolée dans les sciences en interaction, pas assez moderne ;
- La géométrie demande une maitrise du langage que nos élèves de collège ou lycée n'ont plus ;
- Les preuves géométriques sont « hors sol »

En fait la plupart de ces arguments sont faux. Les avancées technologiques du moment (Dig

Data, reconnaissance des formes, optimisation, probabilité en interaction, je pense à la percolation, aux exposants critiques dans les modèles d'Ising, génie moléculaire, théorie des particules, etc...) prennent leur source dans la géométrie. La première médaille Fields en probabilité (Wendelin Werner) est due essentiellement à l'interaction entre probabilité et géométrie conforme. La médaille Fields de Cédric Villani est aussi due aux interactions entre l'analyse et géométrie du transport optimal.

Ce qui est vrai, c'est que la preuve géométrique telle qu'elle est pratiquée dans la classe a tué la géométrie. Il faut dire que ce que l'on demande aux élèves est insupportable : « citer la propriété » prend souvent plus de lignes que l'argument lui-même ; au fond les élèves ont le sentiment de tourner en rond et ne savent plus s'ils disent des choses correctes, utiles et pertinentes. Je plaide ici pour alléger l'argumentaire des élèves, construire pas à pas un discours clair vis à vis des élèves et étudiants, mais surtout se concentrer en classe sur l'argument en géométrie et la construction de la pensée autour de l'argument.

Cédric me disait connaitre toutes les propriétés du triangle et avoir passé toute sa jeunesse à les démontrer de manière exhaustive ! C'est sans doute une bonne formation.

L'exposé qui suit, se veut illustrer de manière parfois provocatrice, le problème de la preuve en géométrie. Au fond pourquoi faire des preuves ? Je pense que les preuves mathématiques formatent l'esprit vers une efficacité très utile pour les métiers de cadres, que ce soit pour organiser une réunion, animer une discussion ou élaborer des projets d'envergure.

- Distinguer les hypothèses des conclusions me parait essentiel : le début et la fin, l'introduction et les conclusions. C'est le cœur du raisonnement cartésien, typique des Français.
- Mener un raisonnement en citant des résultats (de manière rapide et intelligible). Par exemple « On a $(d)//(d')$ car $(d),(d') \perp \Delta$ », n'est pas dans le style le plus académique, mais me semble acceptable. Écrire $(d),(d') \perp \Delta$ au lieu du long discours habituel des élèves n'est qu'une figure de style.
- Bien avoir en tête que les conclusions ne sont pas isolées, ni les hypothèses. Elles forment un corpus que l'on construit par les apprentissages, les exercices et les automatismes. Il n'y a pas de génies en mathématiques, seulement des gens qui ont emmagasiné beaucoup de méthodes et qui ont parfois des intuitions. C'est pourquoi, il est indispensable de s'entrainer de de visiter de nombreux problèmes qu'il faut mémoriser. Le rôle de la mémoire et de l'entrainement est ici indispensable dans les apprentissages, quels qu'ils soient.

En détaillant le corpus de pensées, on arrive à dégager un paysage contextuel. Le contexte des hypothèses et le contexte des conclusions ne sont pas si éloignés, séparés souvent pas une rivière, parfois un fleuve. L'idée consiste alors à créer un pont, parfois un viaduc entre ces deux bassins d'attraction. En gros il faut s'extraire des hypothèses et se laisser guider par les conclusions après avoir franchi le pont des idées...

Remarque : dans les exemples qui suivent, je précise à l'oral, comment construire à partir des objectifs le cheminement inverse et arriver à faire émerger l'idée qui est mentionnée dès le début. Si j'ai le temps, je rédigerai prochainement des explications plus détaillées.

1 Triangle napoléonien

On cite le théorème de l'Empereur.

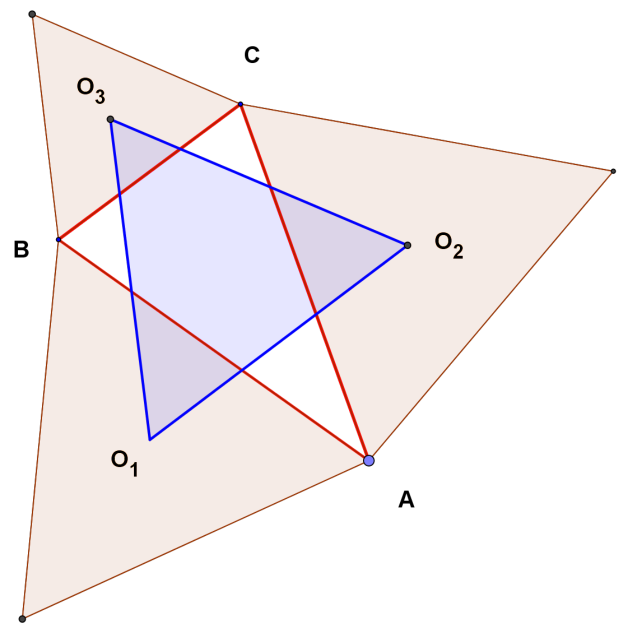
Problème : On considère ABC un triangle quelconque et on construit les trois triangles équilateraux sur les trois cotés. Montrer que les centres de ces trois triangles forment aussi un triangle équilatéral.

Ce résultat admet de nombreuses preuves ; analyse complexe, méthode cartésienne, etc.

La preuve complexe est assez élégante : on peut se ramener au triangle $0, 1, z$ et remarquer que les centres sont donnés par

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\pi/6} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\pi/6}z \quad \omega_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\pi/6}(z-1)+1.$$

On vérifie par un calcul que $(\omega_2 - \omega_1) = e^{+i\pi/3}(\omega_3 - \omega_1)$.



Théorème de Napoléon

Preuve cinématique : on bouge le point C et on regarde comment se déplacent les centres. Les points A, O_1, B restent fixes. Comme $\overrightarrow{AO_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{rot}_{-\pi/6}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BO_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{rot}_{\pi/6}\overrightarrow{BC}$, en passant aux vitesses on en déduit que

$$\overrightarrow{v}_{O_3} = \mathrm{rot}_{\pi/3}\overrightarrow{v}_{O_2}.$$

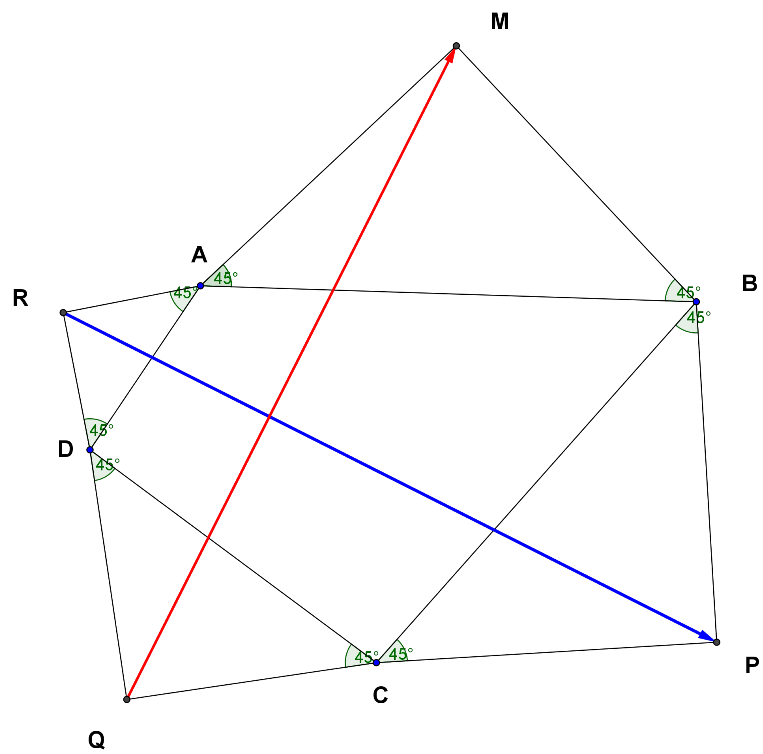
On en déduit que

$$\overrightarrow{O_1O_3} = \mathrm{rot}_{\pi/3}\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{\mathrm{Cte}}.$$

En prenant $C = A$, on se convainc facilement que la constante vectorielle est nulle.

2 Quadrilatère

Problème : Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque. On construit quatre triangles rectangles et isocèles sur les quatre côtés. Montrer que les diagonales des sommets sont orthogonales et de même longueur.



Théorème du quadrilatère

Preuve cinématique : on déplace là encore le point C. Les points Q, P bougent aussi, les points R, M, A, B, D sont fixes.

On a $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{rot}_{+\pi/4}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{rot}_{-\pi/4}\overrightarrow{DC}$. Il vient $\overrightarrow{v}_P = \mathrm{rot}_{\pi/2}\overrightarrow{v}_Q$, c'est-à-dire

$$\overrightarrow{RP} = \mathrm{rot}_{\pi/2}\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{\mathrm{Cte}}.$$

Lorsque $C = A$, on se retrouve dans une situation dégénérée : notre quadrilatère est formé de deux segments sur lesquels on construit des carrés. Les points Q, M se déduisent de R, P par la rotation de centre A et d'angle $\pi/2$, donc la constante vectorielle est nulle.

3 Parallélogramme

Problème : On considère un parallélogramme $ABCD$ sur lequel on construit quatre carrés à partir des côtés. Montrer que les centres de ces carrés forment aussi un carré.

Preuve cinématique : selon le même principe, on fait bouger les points D, C tout en maintenant la condition $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Les points A, B, N sont alors fixes.

Tout d'abord on remarque que $\overrightarrow{v}_C = \overrightarrow{v}_D$, car le vecteur $\overrightarrow{DC}$ est constant.

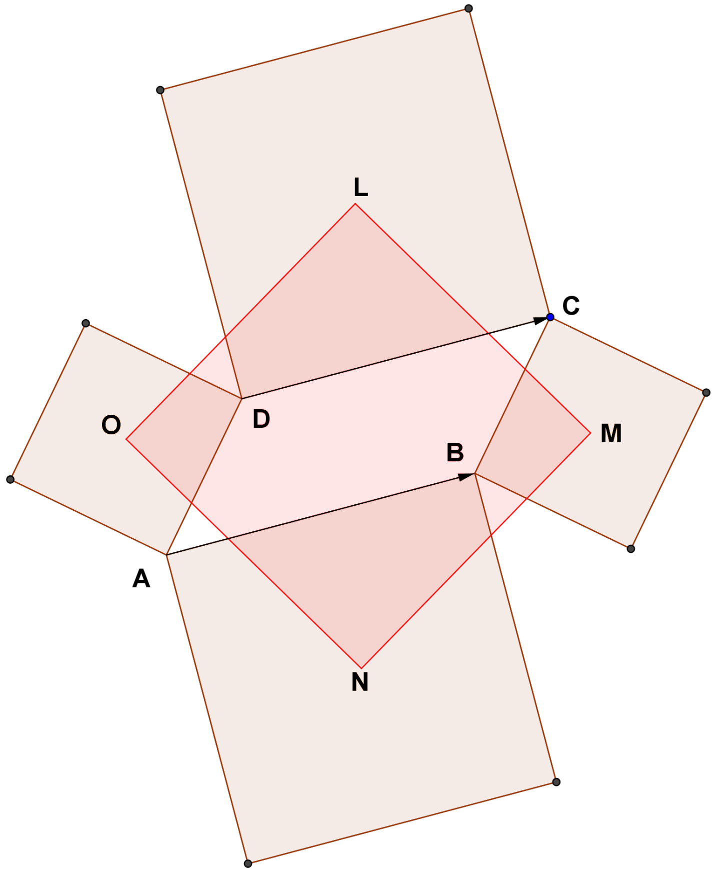
On a clairement $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{rot}_{-\pi/4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{rot}_{+\pi/4}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{rot}_{+\pi/4}\overrightarrow{AD}$. En considérant les vitesses associées, il vient que

$$\overrightarrow{v}_L = \overrightarrow{v}_C = \overrightarrow{v}_D$$

et

$$\overrightarrow{v}_O = \mathrm{rot}_{+\pi/2}\overrightarrow{v}_M.$$

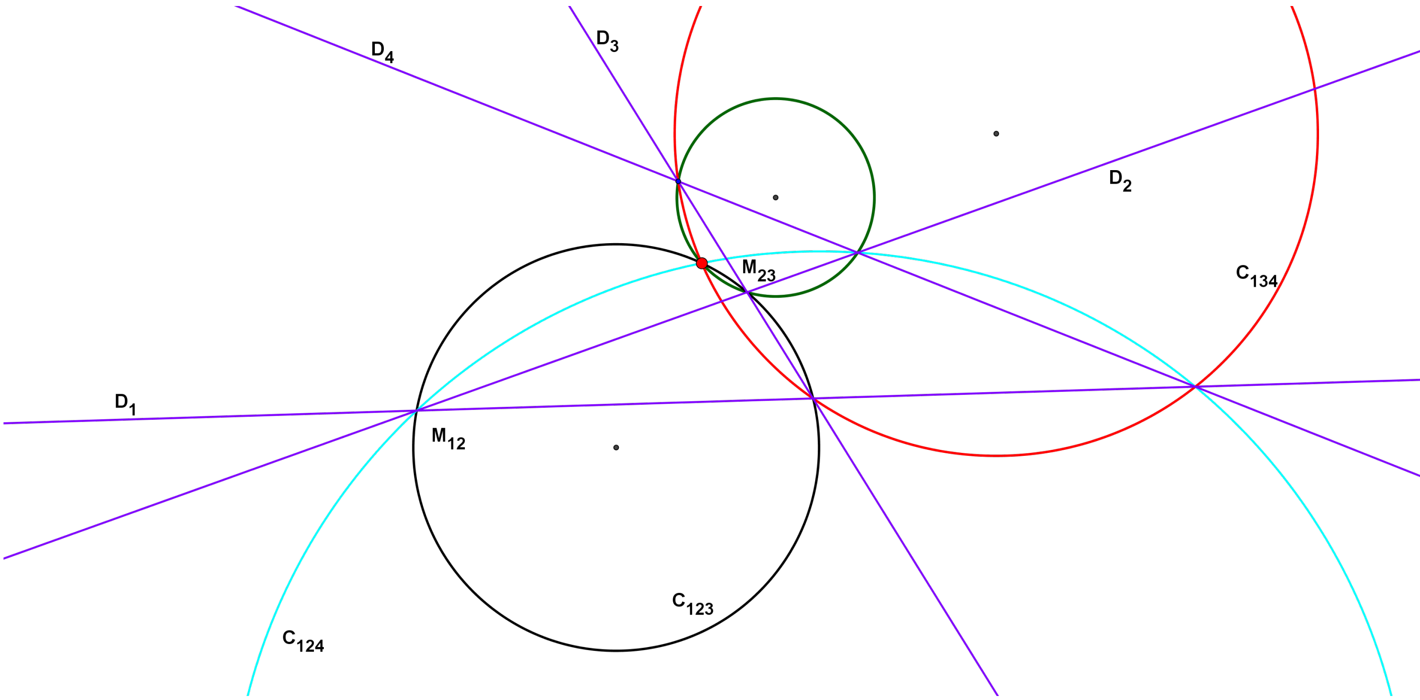
On en déduit que $\overrightarrow{NO} = \mathrm{rot}_{\pi/2}\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{\mathrm{Cte}}$. Lorsque $C = B$, la situation est dégénérée et on se convainc facilement que la constante vectorielle est nulle.



Théorème du parallélogramme

4 Quatre cercles et droites

Problème : Deux droites D_1 et D_2 se coupent un point M_{12}. Si j'ajoute une droite D_3, j'obtiens deux autres points d'intersection $M_{23} = D_2 \cap D_3$ et $M_{13} = D_1 \cap D_3$. Il passe un seul cercle C_{123} par ces trois points, c'est bien-sûr le cercle circonscrit. Considérons alors une quatrième droite D_4. Les 4 cercles que l'on peut construire en considérant les 4 triplets de droites sont alors concourants en un point M_{1234} appelé point de Miquel (1838). Les généralisations sont dues à Clifford et Steiner (1828).



Point de Miquel

Preuve cinématique : on fixe la droite D_1 et on fait pivoter les droites D_2, D_3 et D_4 à la même vitesse angulaire. Le point M_{23} se déplace, mais l'angle de droite issu de M_{23} est constant, donc ce point se déplace sur un cercle fixe [angle inscrit], qui est le cercle C_{123}. De même les cercles C_{124} et C_{134} sont fixes.

Considérons le point J intersection des cercles C_{123} et C_{124} autre que le point M_{12}. On veut montrer que ce point J est aussi sur le cercle C_{134}.

Lorsqu'on fait pivoter les droites, le point M_{23} va se confondre à un moment avec le point J. À cet instant, on a $J \in D_2$ et $J \in D_3$. Mais $J \in C_{124}$, on en déduit que $J \in D_2 \cap C_{124} =$

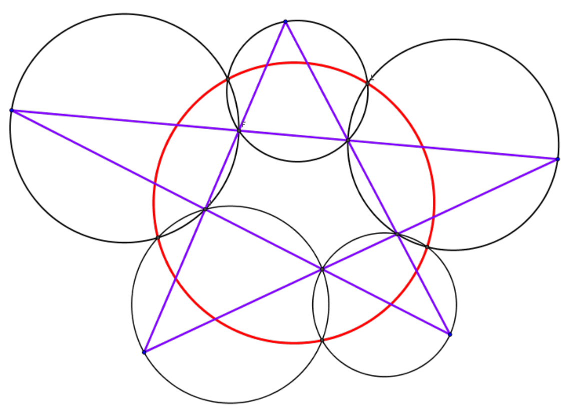
$\{M_{12}, M_{24}\}$. Ce ne peut être que M_{24}, en particulier $J \in D_4$ et les trois droites sont alors concourantes en J. On en déduit que $J = M_{34} \in C_{134}$ cercle qui est fixe !

Pour montrer que $J \in C_{234}$ on fixe la droite D_2 et on fait pivoter les autres droites à vitesse constante.

5 Étoile chinoise

Durant le congrès mondial des mathématiques en 2002 à Pékin, le président chinois Yang Zemin a posé à un problème de géométrie à un parterre de mathématiciens. Laurent Lafforgue et Alain Connes ont passablement essayer de résoudre ce problème. Alain Connes en parle dans un séminaire Bourbaki consacré à la renormalisation de Dick Kreimer, *Symétries galoisiennes et Renormalisation.*

Problème : On considère une étoile à cinq branches et on construit sur les 5 triangles dessinés par les pointes des branches, les cercles circonscrits. Montrer que les points d'intersection deux à deux, sont sur un même cercle.



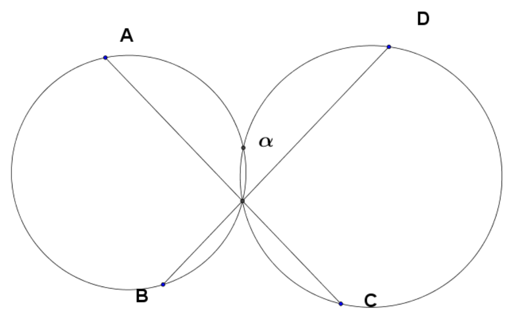
L'étoile du Président Yang Zemin

Preuve calculatoire issu d'un calcul en Maple : En annexe, on calcule les coordonnées de l'intersection de deux droites données chacunes par deux points, puis on cherche les coefficients d'une équation d'un cercle $x^2+y^2+ax+by+c=0$ qui passe par trois points en résolvant le système d'inconnues a, b et c. On détermine les coordonnées de l'intersection des cercles deux à deux. Ces points sont notés dans l'annexe, $A2, B2, C2, D2$ et $E2$. On vérifie que $D2$ et $E2$ sont sur le cercle qui passe par $A2, B2$ et $C2$. Ainsi les cinq points sont cocycliques.

Ce genre de calculs pose un problème didactique.

- Qu'apprend-on d'un tel calcul ?
- Est-ce une preuve acceptable avec les élèves ?
- Peut-on utiliser une telle séquence en cours ?
- Y a-t-il quelque chose à comprendre ?

Alain Connes signale dans son article, qu'il existe une belle formule sur le calcul du point α dans le diagramme ci-dessous :



Point de Miquel α

En fait c'est le point de Miquel pour les droites $(AB), (DC), (AC)$ et (BD). La formule est donnée en complexe par

$$\alpha = \frac{ad - bc}{a + d - b - c},$$

où a, b, c, d sont les affixes de A, B, C et D. C'est une résolvante dans la résolution des équations du quatrième degré. En effet, par permutation des variables a, b, c et d, une telle expression ne prend que 3 valeurs.

Preuve du théorème de l'étoile. C'est en fait une preuve combinatoire très simple. Notons M_{1234} le point de Miquel des droites D_1, D_2, D_3 et D_4. On va montrer que les points $M_{1234}, M_{1235}, M_{1245}$ et M_{1345} sont cocycliques. En effet on a le tableau suivant qui décrit les intersections :

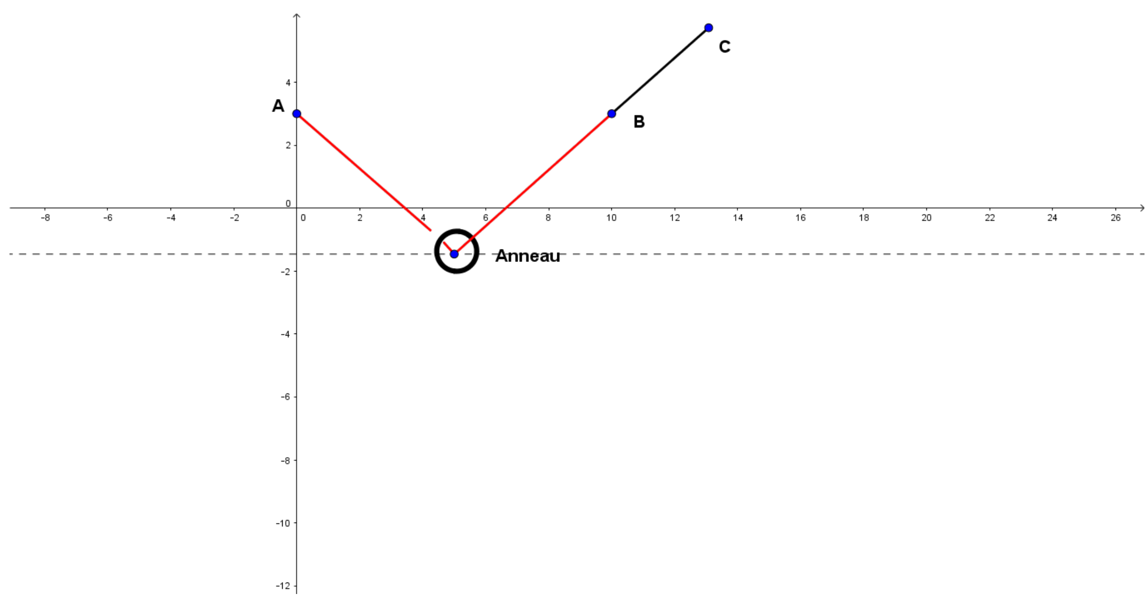
Point	Cercle	Cercle	Autre Point
M_{1234}	S_{134}	S_{123}	M_{13}
M_{1235}	S_{123}	S_{125}	M_{12}
M_{1245}	S_{125}	S_{145}	M_{15}
M_{1345}	S_{145}	S_{134}	M_{14}

Or les points M_{12}, M_{13}, M_{14} et M_{15} sont alignés (ils sont sur la droite D_5). Un autre théorème de Miquel, dit des 4 cercles, nous assure que les points $M_{1234}, M_{1235}, M_{1245}$ et M_{1345} sont cocycliques. Ce résultat est assez facile et résulte du birapport de 4 points.

6 Tangente à l'ellipse

Problème : Déterminer la tangente à une ellipse.

On va utiliser la gravité pour déterminer la tangente à l'ellipse. Regardons dans un premier temps la situation où l'on fait glisser un anneau autour d'un fil tendu. L'anneau se met en équilibre à la position la plus basse, fils tendus.



Fil tendu supportant un anneau

Si les points A, B sont à la même hauteur dans un plan vertical, alors regarder de face ou par derrière, revient à faire un demi-tour par rapport à l'axe médiateur vertical. La position d'équilibre M est donc sur cet axe et l'anneau est donc dans le plan vertical et placé sur la médiatrice du segment $[AB]$. En particulier l'axe horizontal est la bissectrice extérieure des segments $[MA]$, $[MB]$.

Lorsque les foyers de l'ellipse sont en A, C, il suffit de considérer, après avoir mis l'ellipse dans le champ de gravité, le point B placé à la même hauteur que A.

7 Où mettre l'école des enfants

Problème : Trois villages A_1, A_2, A_3, ont respectivement 50, 70 et 100 enfants. Où faut-il placer l'école afin de minimiser le trajet des enfants ?

On supposera qu'une fois placée l'école, la communauté de communes trace les routes qui permettent l'accès à cette école.

Solution mécanique : On dessine le triangle A_1, A_2 et A_3 sur une table de hauteur h et on perce la table au niveau des sommets. On attache aux extrémités de 3 brins des masses de $p_1 = 500$g, $p_2 = 700$g et $p_3 = 1000$g. On noue ces brins ensemble, appelons M le noeud. On insère les brins dans les trous correspondant qu'on a faits. Le système se met en équilibre et le noeud indique où il faut placer l'école.

Explications. Le système minimise l'énergie potentielle,

$$E = h_1 p_1 + h_2 p_2 + h_3 p_3,$$

avec h_i les hauteurs des trois masses par rapport au sol. Or si l_i désigne la longueur des brins, jusqu'au noeud central, on a $l_i = (h - h_i) + MA_i$. Ainsi minimiser E revient à minimiser

$$F(M) = p_1 MA_1 + p_2 MA_2 + p_3 MA_3,$$

qui est clairement notre problème. Ce genre de fonctionnelle a été étudiée par Fermat.

Ce genre d'activité est très transversale. En effet, on peut commencer par deux villages, ou placer les villages sur une droite.

- Lorsque les N villages sont sur une droite, le problème consiste à minimiser la fonction

$$f(x) = n_1|x - x_1| + \ldots + n_N|x - x_N|.$$

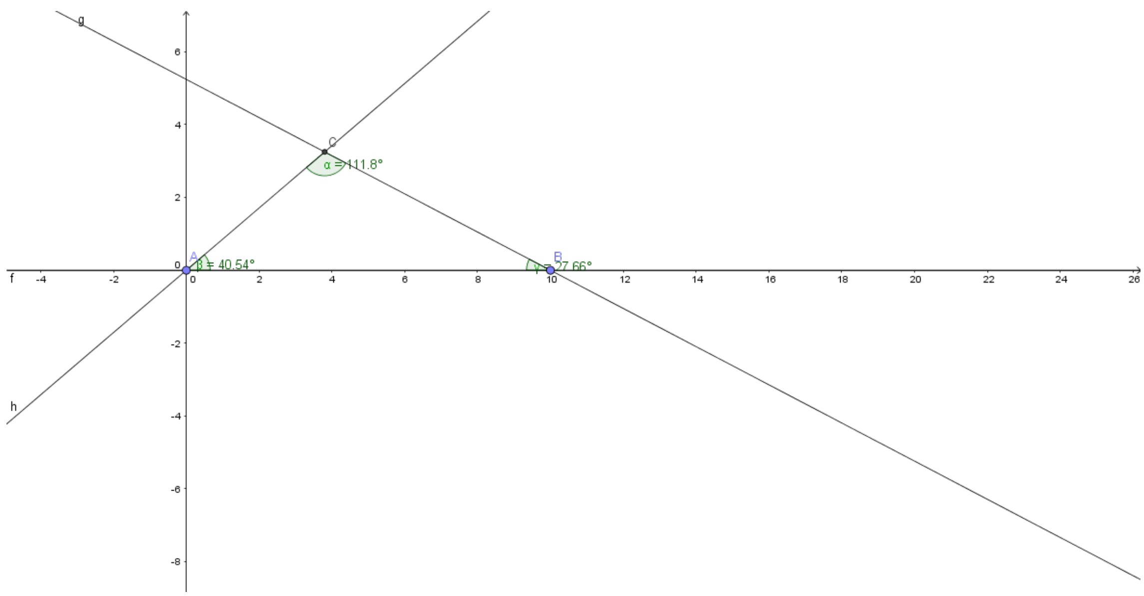
On reconnait la définition de la médiane, qui en général n'est pas unique. Notre problème est donc une généralisation de la notion de médiane.

- Lorsqu'on a 3 villages, on s'aperçoit vite qu'il y a deux paramètres à prendre en compte ; d'une part le nombre d'élèves $n_1 \geq n_2 \geq n_3$, mais aussi la géométrie du triangle, c'est-à-dire les angles $\widehat{A_1}$, $\widehat{A_2}$ et $\widehat{A_3}$.

Si par exemple $n_1 \leq n_2 + n_3$, alors il est facile de voir qu'il faut placer l'école au point A_1. En effet, on a

$$\begin{aligned} F(M) &= (n_1 - n_2 - n_3)MA_1 + n_2(MA_1 + MA_2) + n_3(MA_1 + MA_3) & (1) \\ &\geq (n_1 - n_2 - n_3)MA_1 + n_2A_1A_2 + n_3A_1A_3 \geq F(A_1). & (2) \end{aligned}$$

Si on a $n_1 < n_2 + n_3$ alors ces trois nombres forment un triangle, d'angle θ_1, θ_2 et θ_3. Dans notre exemple, les angles sont respectivement 111.8°, 40.54° et 27.66°.



Les angles du triangle $100, 70, 50$

Si le point d'équilibre est à l'intérieur du triangle, on peut dériver la fonctionnelle et on trouve

$$n_1\overrightarrow{u_1} + n_2\overrightarrow{u_2} + n_3\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{0},$$

avec $\overrightarrow{u_i} = \frac{\overrightarrow{MA_i}}{MA_i}$ vecteur unitaire. On en déduit facilement que l'angle entre $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ vaut $\pi - \theta_1$. En effet on a

$$-n_1\overrightarrow{u_1} = n_2\overrightarrow{u_2} + n_3\overrightarrow{u_3}$$

et en prenant la norme au carré, on en déduit l'égalité $n_1^2 = n_2^2 + n_3^2 + 2n_2n_3\langle\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\rangle$ d'où l'on tire :

$$\langle\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\rangle = -\frac{n_2^2 + n_3^2 - n_1^2}{2n_2n_3} = \cos(\pi - \theta_1).$$

On reconnait la formule d'Al Khachi. Les angles formés par les trois vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ doivent correspondre aux angles du triangle formé à partir des effectifs n_1, n_2, n_3.

Pour qu'une telle position existe, il faut au moins que l'angle $\widehat{A_1}$ soit plus petit que $\pi - \theta_1$, car l'angle de vue du segment $[A_2, A_3]$ à partir de A_1 est plus grand que l'angle de vue à partir de M. De même pour les deux autres angles.

Un tel point est facile à construire, il suffit en effet de placer l'arc de cercle passant par A_2, A_3 et d'angle de vision $\pi - \theta_1$. On fait de même avec les autres côtés. L'intersection des 3 cercles donne le point de Fermat, lorsqu'il existe.

Lorsqu'un des angles est trop grand (il ne peut en exister qu'un seul), la situation est proche de la situation de l'alignement et il faut placer l'école sur la position médiane. Toutefois, ce n'est pas intuitif et on aurait pu penser, qu'en diminuant l'angle, la position d'équilibre allait se déplacer légèrement ; ce n'est pas le cas. Il faut atteindre l'angle critique $\pi - \theta_i$ pour voir la position d'équilibre pénétrer à l'intérieur du triange. On atteint, à mon sens, les limites de l'analogie mécanique ou physique et c'est bien l'argument géométrique (ou mathématique) qui permet de contredire cette intuition.

Conclusion : si l'angle en A_i est plus grand que $\pi - \theta_i$ il faut placer l'école en A_i, sinon il faut la placer au point de Fermat du problème.

Cette conclusion se comprend facilement si on interprète le problème en termes cinématiques ou de force de traction des brins. En effet, le nœud est soumis à une force proportionnelle à $n_1\overrightarrow{u_1} + n_2\overrightarrow{u_2} + n_3\overrightarrow{u_3}$. Tant que cette force est non nulle, le nœud se déplace, selon la loi de Newton (l'accélération est proportionnelle à la force).

On peut faire une figure dynamique sous Geogebra et placer ce vecteur au point M ; en déplaçant naïvement le point M dans la direction du vecteur force, on trouve rapidement (et expérimentalement) la position d'équilibre. En vérité, on ne fait qu'intégrer l'équation différentielle du mouvement « avec la souris » ! C'est le principe même des méthodes numériques, que l'on pratique de cette manière à la main (c'est le cas de le dire !). Pour comprendre ce que l'on fait « avec la souris », on doit avoir quelques notions d'analyse numérique et des méthodes d'Euler.

Si l'angle en A_i est plus grand que $\pi - \theta_i$ la force est dirigée vers A_i et on est bien obligé de prendre A_i comme position d'équilibre. Si on veut une démonstration mathématique rigoureuse, il faut utiliser Cauchy-Schwartz par exemple. On suppose ici que $i = 2$. On a

$$\langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3} \rangle \leq -\cos(\theta_2) = \frac{n_2^2 - n_1^2 - n_3^2}{2n_1 n_3}$$

donc $\langle \overrightarrow{u_2}, n_1\overrightarrow{u_1} + n_2\overrightarrow{u_2} + n_3\overrightarrow{u_3} \rangle \geq n_2 - ||n_1\overrightarrow{u_1} + n_3\overrightarrow{u_3}|| \geq 0$, car $n_2^2 \geq ||n_1\overrightarrow{u_1} + n_3\overrightarrow{u_3}||^2$.

8 Annexe

```
(%i1) A : [0,0]$
      B : [b,0]$
      C : [c1,c2]$
      D : [d1,d2]$
      E : [e1,e2]$
```

```
(%i6) Inter(M,N,O,P) := subst(solve([(x-M[1])*(N[2]-M[2])+(y-M[2])*(M[1]-N[1]),
      (x-O[1])*(P[2]-O[2])+(y-O[2])*(O[1]-P[1])],[x,y])[1],[x,y]);
```

(%o6) $\mathrm{Inter}(M,N,O,P) := \mathrm{subst}((\mathrm{solve}([(x-M_1)\,(N_2-M_2)+(y-M_2)\,(M_1-N_1)\,,(x-O_1)\,(P_2-O_2)+$

```
(%i7) A1 : Inter(B,D,C,E);
      B1 : Inter(A,D,C,E);
      C1 : Inter(A,D,E,B);
      D1 : Inter(A,C,B,E);
      E1 : Inter(A,C,B,D);
```

(%o7) $$\left[\frac{b\,(c1\,e2-c2\,e1)+d1\,(c2\,e1-c1\,e2)+b\,d2\,(e1-c1)}{b\,(e2-c2)+d1\,(c2-e2)+d2\,(e1-c1)},\frac{d2\,(b\,(e2-c2)-c1\,e2+c2\,e1)}{b\,(e2-c2)+d1\,(c2-e2)+d2\,(e1-c1)}\right]$$

(%o8) $$\left[-\frac{d1\,(c1\,e2-c2\,e1)}{d1\,(c2-e2)+d2\,(e1-c1)},-\frac{d2\,(c1\,e2-c2\,e1)}{d1\,(c2-e2)+d2\,(e1-c1)}\right]$$

(%o9) $$\left[-\frac{b\,d1\,e2}{d2\,(e1-b)-d1\,e2},-\frac{b\,d2\,e2}{d2\,(e1-b)-d1\,e2}\right]$$

(%o10) $$\left[-\frac{b\,c1\,e2}{c2\,(e1-b)-c1\,e2},-\frac{b\,c2\,e2}{c2\,(e1-b)-c1\,e2}\right]$$

(%o11) $$\left[-\frac{b\,c1\,d2}{c2\,(d1-b)-c1\,d2},-\frac{b\,c2\,d2}{c2\,(d1-b)-c1\,d2}\right]$$

```
(%i12) cercle(M) := M[1]^2+M[2]^2+aa*M[1]+bb*M[2]+cc$
       circons(M,N,O) := subst(solve([cercle(M),cercle(N),cercle(O)],[aa,bb,cc])[1],x^2+y^2-
```

```
(%i14) autrepoint(M1,M2,M3,M4,M5) := solve([circons(M1,M2,M3),circons(M1,M4,M5)],[x,y]);
```

(%o14) $\mathrm{autrepoint}\,(M1,M2,M3,M4,M5) := \mathrm{solve}\,([\mathrm{circons}\,(M1,M2,M3)\,,\mathrm{circons}\,(M1,M4,M5)],[x,y])$

```
(%i15) A2 : autrepoint(A1,D,B1,C,E1);
```

(%o15) $[[x=(((c1\,d1^2+(-c1^2-b\,c1)\,d1+b\,c1^2)\,d2^2+(b\,c2\,d1^2+(-b\,c1-b^2)\,c2\,d1+b^2\,c1\,c2)\,d2+c1\,d1^4+$
$(((-2\,c1\,d1+c1^2+b\,c1)\,d2^3+((c1-2\,b)\,c2\,d1+b^2\,c2)\,d2^2+(-2\,c1\,d1^3+(-2\,c2^2-c1^2+3\,b\,c1)\,d1^2+(3\,b\,c$
$(2\,c1^2\,d1-c1^3-b\,c1^2)\,d2^3+(-2\,c1\,c2\,d1^2+(c1^2+4\,b\,c1)\,c2\,d1+(-2\,b\,c1^2-b^2\,c1)\,c2)\,d2^2+$
$(2\,c1^2\,d1^3+((2\,c1-2\,b)\,c2^2+c1^3-3\,b\,c1^2)\,d1^2+((2\,b^2-b\,c1)\,c2^2-b\,c1^3+b^2\,c1^2)\,d1-b^2\,c1\,c2^2)\,d2-$
$2\,c1\,c2\,d1^4+((4\,b\,c1-c1^2)\,c2-2\,c2^3)\,d1^3+(4\,b\,c2^3+(2\,b\,c1^2-2\,b^2\,c1)\,c2)\,d1^2+$
$(-2\,b^2\,c2^3-b^2\,c1^2\,c2)\,d1)\,e2+(c1\,d2^4+(b-c1)\,c2\,d2^3+(c1\,d1^2+(c2^2+c1^2-b\,c1)\,d1-b\,c2^2)\,d2^2+(b\,c1\,c2$
$(-2\,c1^2\,d2^4+(2\,c1\,c2\,d1+(c1^2-3\,b\,c1)\,c2)\,d2^3+(-2\,c1^2\,d1^2+((2\,b-3\,c1)\,c2^2-2\,c1^3+2\,b\,c1^2)\,d1+(2\,b\,c1-$

$$(2 c1 c2 d1^3 + (2 c2^3 + (3 c1^2 - 3 b c1) c2) d1^2 + ((b^2 c1 - 3 b c1^2) c2 - 3 b c2^3) d1 + b^2 c2^3) d2 -$$
$$c1 c2^2 d1^3 + 2 b c1 c2^2 d1^2 - b^2 c1 c2^2 d1) e1 + c1^3 d2^4 + (2 b c1^2 c2 - 2 c1^2 c2 d1) d2^3 +$$
$$((c1 c2^2 + c1^3) d1^2 + ((c1^2 - 3 b c1) c2^2 + c1^4 - b c1^3) d1 + b^2 c1 c2^2) d2^2 + (-2 c1^2 c2 d1^3 + ((b - 2 c1) c2^3 + ($$
$$c1 c2^2 d1^4 + (c2^4 + (c1^2 - 2 b c1) c2^2) d1^3 + ((b^2 c1 - 2 b c1^2) c2^2 - 2 b c2^4) d1^2 +$$
$$(b^2 c2^4 + b^2 c1^2 c2^2) d1)/(((d1^2 - 2 c1 d1 + c1^2) d2^2 + (2 c2 d1^2 + (-2 c1 - 2 b) c2 d1 + 2 b c1 c2) d2 + d1^4 - 2 b$$
$$(((2 c1 - 2 d1) d2^3 + (2 b c2 - 2 c2 d1) d2^2 + (-2 d1^3 + (4 b - 2 c1) d1^2 + (2 b c1 - 2 b^2) d1) d2 + 2 c2 d1^3 - 4 b c$$
$$(2 c1 d1 - 2 c1^2) d2^3 + (-2 c2 d1^2 + 6 c1 c2 d1 + (-2 c1^2 - 2 b c1) c2) d2^2 + (2 c1 d1^3 + (-4 c2^2 + 2 c1^2 - 4 b c1) d$$
$$2 c2 d1^4 + (4 b - 2 c1) c2 d1^3 + ((4 b c1 - 2 b^2) c2 - 2 c2^3) d1^2 + (4 b c2^3 - 2 b^2 c1 c2) d1 -$$
$$2 b^2 c2^3) e2 + (d2^4 + (d1^2 + (2 c1 - 2 b) d1 + c1^2 - 2 b c1 + b^2) d2^2 + (-2 c2 d1^2 + (4 b - 2 c1) c2 d1 + (2 b c1 - 2$$
$$(-2 c1 d2^4 + (2 c2 d1 - 2 c1 c2) d2^3 + (-2 c1 d1^2 + (2 c2^2 - 4 c1^2 + 4 b c1) d1 - 2 b c2^2 - 2 c1^3 + 4 b c1^2 - 2 b^2 c1) d$$
$$(2 c2 d1^3 + (6 c1 - 4 b) c2 d1^2 + (4 c1^2 - 10 b c1 + 2 b^2) c2 d1 + (4 b^2 c1 - 4 b c1^2) c2) d2 -$$
$$2 c2^2 d1^3 + (4 b - 2 c1) c2^2 d1^2 + (4 b c1 - 2 b^2) c2^2 d1 - 2 b^2 c1 c2^2) e1 + c1^2 d2^4 +$$
$$(2 c1^2 c2 - 2 c1 c2 d1) d2^3 + ((c2^2 + c1^2) d1^2 + (-4 c1 c2^2 + 2 c1^3 - 2 b c1^2) d1 + (c1^2 + 2 b c1) c2^2 + c1^4 - 2 b c1$$
$$(-2 c1 c2 d1^3 + (2 c2^3 + (4 b c1 - 4 c1^2) c2) d1^2 + ((-2 c1 - 2 b) c2^3 + (-2 c1^3 + 6 b c1^2 - 2 b^2 c1) c2) d1 + 2 b c$$
$$c2^2 d1^4 + (2 c1 - 2 b) c2^2 d1^3 + (c2^4 + (c1^2 - 4 b c1 + b^2) c2^2) d1^2 + ((2 b^2 c1 - 2 b c1^2) c2^2 - 2 b c2^4) d1 +$$
$$b^2 c2^4 + b^2 c1^2 c2^2), y = (((c2 d1^2 + (-c1 - b) c2 d1 + b c1 c2) d2^2 + ((c2^2 + c1^2 - b c1) d1^2 + (-2 b c2^2 - b c1^2 +$$
$$((((c1 + b) c2 - 2 c2 d1) d2^3 + ((-c2^2 - 2 c1^2 + 2 b c1) d1 + b c2^2 + b c1^2 - b^2 c1) d2^2 + (-2 c2 d1^3 + (c1 + 3 b)$$
$$(2 c1 c2 d1 + (-c1^2 - b c1) c2) d2^3 + (-2 c2^2 d1^2 + ((3 c1 + 2 b) c2^2 + 2 c1^3 - 2 b c1^2) d1 - 3 b c1 c2^2 - b c1^3 + b^2$$
$$(2 c1 c2 d1^3 + ((-3 c1^2 - b c1) c2 - 2 c2^3) d1^2 + (4 b c2^3 + (4 b c1^2 - b^2 c1) c2) d1 - 2 b^2 c2^3 - b^2 c1^2 c2) d2 -$$
$$2 c2^2 d1^4 + (c1 + 4 b) c2^2 d1^3 + (-2 b c1 - 2 b^2) c2^2 d1^2 + b^2 c1 c2^2 d1) e2 + (c2 d2^4 + (c1^2 - b c1) d2^3 + (c2 d1^2 - b c$$
$$(-2 c1 c2 d2^4 + (2 c2^2 d1 + (-c1 - b) c2^2 - 2 c1^3 + 2 b c1^2) d2^3 + (-2 c1 c2 d1^2 + (c2^3 + 2 c1^2 c2) d1 - b c2^3 + (b^2$$
$$(2 c2^2 d1^3 + (c1 - 3 b) c2^2 d1^2 + b^2 c2^2 d1 - b^2 c1 c2^2) d2 - c2^3 d1^3 + 2 b c2^3 d1^2 -$$
$$b^2 c2^3 d1) e1 + c1^2 c2 d2^4 + (-2 c1 c2^2 d1 + (c1^2 + b c1) c2^2 + c1^4 - b c1^3) d2^3 +$$
$$((c2^3 + c1^2 c2) d1^2 + ((-2 c1 - b) c2^3 + (b c1^2 - 2 c1^3) c2) d1 + 2 b c1 c2^3 + (2 b c1^3 - b^2 c1^2) c2) d2^2 +$$
$$(-2 c1 c2^2 d1^3 + (c2^4 + (c1^2 + 2 b c1) c2^2) d1^2 + (-2 b c2^4 - 2 b c1^2 c2^2) d1 + b^2 c2^4 + b^2 c1^2 c2^2) d2 +$$
$$c2^3 d1^4 - 2 b c2^3 d1^3 + b^2 c2^3 d1^2)/(((d1^2 - 2 c1 d1 + c1^2) d2^2 + (2 c2 d1^2 + (-2 c1 - 2 b) c2 d1 + 2 b c1 c2) d2 + d1$$
$$(((2 c1 - 2 d1) d2^3 + (2 b c2 - 2 c2 d1) d2^2 + (-2 d1^3 + (4 b - 2 c1) d1^2 + (2 b c1 - 2 b^2) d1) d2 + 2 c2 d1^3 - 4 b c$$
$$(2 c1 d1 - 2 c1^2) d2^3 + (-2 c2 d1^2 + 6 c1 c2 d1 + (-2 c1^2 - 2 b c1) c2) d2^2 + (2 c1 d1^3 + (-4 c2^2 + 2 c1^2 - 4 b c1) d$$
$$2 c2 d1^4 + (4 b - 2 c1) c2 d1^3 + ((4 b c1 - 2 b^2) c2 - 2 c2^3) d1^2 + (4 b c2^3 - 2 b^2 c1 c2) d1 -$$
$$2 b^2 c2^3) e2 + (d2^4 + (d1^2 + (2 c1 - 2 b) d1 + c1^2 - 2 b c1 + b^2) d2^2 + (-2 c2 d1^2 + (4 b - 2 c1) c2 d1 + (2 b c1 - 2$$
$$(-2 c1 d2^4 + (2 c2 d1 - 2 c1 c2) d2^3 + (-2 c1 d1^2 + (2 c2^2 - 4 c1^2 + 4 b c1) d1 - 2 b c2^2 - 2 c1^3 + 4 b c1^2 - 2 b^2 c1) d$$
$$(2 c2 d1^3 + (6 c1 - 4 b) c2 d1^2 + (4 c1^2 - 10 b c1 + 2 b^2) c2 d1 + (4 b^2 c1 - 4 b c1^2) c2) d2 -$$
$$2 c2^2 d1^3 + (4 b - 2 c1) c2^2 d1^2 + (4 b c1 - 2 b^2) c2^2 d1 - 2 b^2 c1 c2^2) e1 + c1^2 d2^4 +$$
$$(2 c1^2 c2 - 2 c1 c2 d1) d2^3 + ((c2^2 + c1^2) d1^2 + (-4 c1 c2^2 + 2 c1^3 - 2 b c1^2) d1 + (c1^2 + 2 b c1) c2^2 + c1^4 - 2 b c1$$
$$(-2 c1 c2 d1^3 + (2 c2^3 + (4 b c1 - 4 c1^2) c2) d1^2 + ((-2 c1 - 2 b) c2^3 + (-2 c1^3 + 6 b c1^2 - 2 b^2 c1) c2) d1 + 2 b c$$
$$c2^2 d1^4 + (2 c1 - 2 b) c2^2 d1^3 + (c2^4 + (c1^2 - 4 b c1 + b^2) c2^2) d1^2 + ((2 b^2 c1 - 2 b c1^2) c2^2 - 2 b c2^4) d1 +$$
$$b^2 c2^4 + b^2 c1^2 c2^2)], [x = \frac{(c1 d1 - b c1) e2 + (-b d2 - c2 d1 + b c2) e1 + b c1 d2}{(d1 - b) e2 - d2 e1 + c1 d2 - c2 d1 + b c2}, y =$$
$$\frac{(c1 - b) d2 e2 - c2 d2 e1 + b c2 d2}{(d1 - b) e2 - d2 e1 + c1 d2 - c2 d1 + b c2}]]$$

(%i16) `B2 : autrepoint(B1,D,A1,E,C1);`

(%o16) $[[x = (d1^3\, e2^4 + \left(-2\, d1^2\, d2\, e1 + \left((2\, c1 + b)\, d1^2 - b\, c1\, d1\right) d2 - 2\, c2\, d1^3\right) e2^3 +$
$\left(\left(d1\, d2^2 + d1^3\right) e1^2 + \left(\left(d1^2 + (-3\, c1 - 2\, b)\, d1 + b\, c1\right) d2^2 + \left(2\, c2\, d1^2 + b\, c2\, d1\right) d2 + d1^4 + (-c1 - b)\, d1^3 - b\, c1\right.\right.$
$\left(c1^2 + b\, c1\right) d1\, d2^2 + \left((-2\, c1 - 2\, b)\, c2\, d1^2 + b\, c1\, c2\, d1\right) d2 + \left(c2^2 - b\, c1\right) d1^3 +$
$\left(b\, c1^2 + b^2\, c1\right) d1^2) e2^2 + (-2\, d1^2\, d2\, e1^3 + \left((-2\, d1 + c1 + b)\, d2^3 + (c2\, d1 - b\, c2)\, d2^2 + \left(-2\, d1^3 + (3\, c1 + 2\, b)\, d1^2\right.\right.$
$\left(\left(2\, c1\, d1 - c1^2 - b\, c1\right) d2^3 + \left(-2\, c2\, d1^2 + (c1 + 3\, b)\, c2\, d1 - b\, c1\, c2\right) d2^2 + \left(2\, c1\, d1^3 + \left(-c1^2 - b\, c1\right) d1^2 + (-b\, c\right.\right.$
$b\, c1\, c2\, d1\, d2^2 + \left(\left(b\, c2^2 - b\, c1^2\right) d1^2 + b^2\, c1^2\, d1\right) d2 + b\, c1\, c2\, d1^3 - b^2\, c1\, c2\, d1^2) e2 +$
$d1\, d2^2\, e1^4 + \left(d2^4 - c2\, d2^3 + \left(d1^2 + (-2\, c1 - b)\, d1\right) d2^2 + \left(c2\, d1^2 - b\, c2\, d1\right) d2\right) e1^3 +$
$\left(-2\, c1\, d2^4 + (2\, c2\, d1 + (c1 - b)\, c2)\, d2^3 + \left(-2\, c1\, d1^2 + \left(-c2^2 + c1^2 + 2\, b\, c1\right) d1 + b\, c2^2\right) d2^2 + \left(2\, c2\, d1^3 + (-c1\right.\right.$
$\left(c1^2\, d2^4 + (b\, c1\, c2 - 2\, c1\, c2\, d1)\, d2^3 + \left(\left(c2^2 + c1^2\right) d1^2 + \left(-b\, c2^2 - b\, c1^2\right) d1\right) d2^2 + \left(-2\, c1\, c2\, d1^3 + 3\, b\, c1\, c2\, d1^2\right.\right.$
$\left(-2\, d1\, d2\, e1 + 2\, d1^2\, d2 - 2\, c2\, d1^2\right) e2^3 + \left(\left(d2^2 + d1^2\right) e1^2 + \left(-4\, d1\, d2^2 + 4\, c2\, d1\, d2 + 2\, d1^3 + (-2\, c1 - 2\, b)\, d1^2\right)\right.$
$(-2\, d1\, d2\, e1^3 + \left(2\, d2^3 - 2\, c2\, d2^2 + \left((4\, c1 + 4\, b)\, d1 - 4\, d1^2\right) d2\right) e1^2 + \left((-2\, d1 - 2\, c1)\, d2^3 + 6\, c2\, d1\, d2^2 + \left(-2\, d1^3\right.\right.$
$2\, c1\, d1\, d2^3 + \left(-2\, c2\, d1^2 - 2\, c1\, c2\, d1\right) d2^2 + \left(2\, c1\, d1^3 + \left(2\, c2^2 - 2\, c1^2 - 4\, b\, c1\right) d1^2 + \left(2\, b\, c1^2 + 2\, b^2\, c1\right) d1\right) d2 -$
$2\, c2\, d1^4 + (2\, c1 + 4\, b)\, c2\, d1^3 + \left(-2\, b\, c1 - 2\, b^2\right) c2\, d1^2) e2 + d2^2\, e1^4 + (2\, d1 - 2\, c1 - 2\, b)\, d2^2\, e1^3 +$
$\left(d2^4 - 2\, c2\, d2^3 + \left(d1^2 + (-4\, c1 - 2\, b)\, d1 + c2^2 + c1^2 + 4\, b\, c1 + b^2\right) d2^2 + \left(2\, c2\, d1^2 - 2\, b\, c2\, d1\right) d2\right) e1^2 +$
$\left(-2\, c1\, d2^4 + (2\, c2\, d1 + 2\, c1\, c2)\, d2^3 + \left(-2\, c1\, d1^2 + \left(-2\, c2^2 + 2\, c1^2 + 4\, b\, c1\right) d1 - 2\, b\, c1^2 - 2\, b^2\, c1\right) d2^2 + \left(2\, c2\, d1\right.\right.$
$c1^2\, d2^4 - 2\, c1\, c2\, d1\, d2^3 + \left(\left(c2^2 + c1^2\right) d1^2 - 2\, b\, c1^2\, d1 + b^2\, c1^2\right) d2^2 + \left(-2\, c1\, c2\, d1^3 + 4\, b\, c1\, c2\, d1^2 - 2\, b^2\, c1\, c2\, d1\right) d$
$c2^2\, d1^4 - 2\, b\, c2^2\, d1^3 + b^2\, c2^2\, d1^2), y = (d1^2\, d2\, e2^4 + \left(-2\, d1\, d2^2\, e1 + \left(d1^2 + c1\, d1\right) d2^2 - 2\, c2\, d1^2\, d2 + d1^4 + (-c1 -\right.$
$\left(\left(d2^3 + d1^2\, d2\right) e1^2 + \left((-2\, d1 - c1)\, d2^3 + 3\, c2\, d1\, d2^2 + \left(-2\, d1^3 + (c1 + b)\, d1^2 - 2\, b\, c1\, d1\right) d2 + c2\, d1^3 - b\, c2\, d1^2\right.\right.$
$2\, c1\, d1\, d2^3 + \left(-2\, c2\, d1^2 - c1\, c2\, d1\right) d2^2 + \left(2\, c1\, d1^3 + \left(c2^2 - c1^2 - 2\, b\, c1\right) d1^2 + \left(b\, c1^2 + b^2\, c1\right) d1\right) d2 -$
$2\, c2\, d1^4 + (c1 + 2\, b)\, c2\, d1^3 - b\, c1\, c2\, d1^2) e2^2 + (-2\, d1\, d2^2\, e1^3 + \left(d2^4 - c2\, d2^3 + \left(d1^2 + (2\, c1 + b)\, d1 + b\, c1\right) d2^2 + (2\right.$
$\left(-2\, c1\, d2^4 + (2\, c2\, d1 + c1\, c2)\, d2^3 + \left(-2\, c1\, d1^2 - c2^2\, d1 - b\, c1^2 - b^2\, c1\right) d2^2 + \left(2\, c2\, d1^3 + c1\, c2\, d1^2 - b^2\, c2\, d1\right) d\right.$
$c1^2\, d2^4 - 2\, c1\, c2\, d1\, d2^3 + \left(\left(c2^2 + c1^2\right) d1^2 - b\, c1^2\, d1 + b^2\, c1^2\right) d2^2 + \left(-2\, c1\, c2\, d1^3 + 2\, b\, c1\, c2\, d1^2 - b^2\, c1\, c2\, d1\right) d2 +$
$c2^2\, d1^4 - b\, c2^2\, d1^3) e2 + d2^3\, e1^4 + \left((-2\, c1 - b)\, d2^3 + (2\, c2\, d1 - b\, c2)\, d2^2\right) e1^3 +$
$\left(\left(c1^2 + 2\, b\, c1\right) d2^3 + \left((-2\, c1 - 2\, b)\, c2\, d1 + \left(b\, c1 + b^2\right) c2\right) d2^2 + \left(c2^2\, d1^2 - b\, c2^2\, d1\right) d2\right) e1^2 +$
$\left(-b\, c1^2\, d2^3 + \left(2\, b\, c1\, c2\, d1 - b^2\, c1\, c2\right) d2^2 + \left(b^2\, c2^2\, d1 - b\, c2^2\, d1^2\right) d2\right) e1)/(d1^2\, e2^4 +$
$\left(-2\, d1\, d2\, e1 + 2\, d1^2\, d2 - 2\, c2\, d1^2\right) e2^3 + \left(\left(d2^2 + d1^2\right) e1^2 + \left(-4\, d1\, d2^2 + 4\, c2\, d1\, d2 + 2\, d1^3 + (-2\, c1 - 2\, b)\, d1^2\right)\right.$
$(-2\, d1\, d2\, e1^3 + \left(2\, d2^3 - 2\, c2\, d2^2 + \left((4\, c1 + 4\, b)\, d1 - 4\, d1^2\right) d2\right) e1^2 + \left((-2\, d1 - 2\, c1)\, d2^3 + 6\, c2\, d1\, d2^2 + \left(-2\, d1^3\right.\right.$
$2\, c1\, d1\, d2^3 + \left(-2\, c2\, d1^2 - 2\, c1\, c2\, d1\right) d2^2 + \left(2\, c1\, d1^3 + \left(2\, c2^2 - 2\, c1^2 - 4\, b\, c1\right) d1^2 + \left(2\, b\, c1^2 + 2\, b^2\, c1\right) d1\right) d2 -$
$2\, c2\, d1^4 + (2\, c1 + 4\, b)\, c2\, d1^3 + \left(-2\, b\, c1 - 2\, b^2\right) c2\, d1^2) e2 + d2^2\, e1^4 + (2\, d1 - 2\, c1 - 2\, b)\, d2^2\, e1^3 +$
$\left(d2^4 - 2\, c2\, d2^3 + \left(d1^2 + (-4\, c1 - 2\, b)\, d1 + c2^2 + c1^2 + 4\, b\, c1 + b^2\right) d2^2 + \left(2\, c2\, d1^2 - 2\, b\, c2\, d1\right) d2\right) e1^2 +$
$\left(-2\, c1\, d2^4 + (2\, c2\, d1 + 2\, c1\, c2)\, d2^3 + \left(-2\, c1\, d1^2 + \left(-2\, c2^2 + 2\, c1^2 + 4\, b\, c1\right) d1 - 2\, b\, c1^2 - 2\, b^2\, c1\right) d2^2 + \left(2\, c2\, d1\right.\right.$
$c1^2\, d2^4 - 2\, c1\, c2\, d1\, d2^3 + \left(\left(c2^2 + c1^2\right) d1^2 - 2\, b\, c1^2\, d1 + b^2\, c1^2\right) d2^2 + \left(-2\, c1\, c2\, d1^3 + 4\, b\, c1\, c2\, d1^2 - 2\, b^2\, c1\, c2\, d1\right) d$
$c2^2\, d1^4 - 2\, b\, c2^2\, d1^3 + b^2\, c2^2\, d1^2)], [x = \frac{c1\, d1\, e2 - c2\, d1\, e1}{d1\, e2 - d2\, e1 + c1\, d2 - c2\, d1}, y = \frac{c1\, d2\, e2 - c2\, d2\, e1}{d1\, e2 - d2\, e1 + c1\, d2 - c2\, d1}]]$

(%i17) `C2 : autrepoint(C1,E,B1,A,D1);`

(%o17) $[[x = \frac{b\, d1\, e2}{d1\, e2 - d2\, e1 + b\, d2}, y = \frac{b\, d2\, e2}{d1\, e2 - d2\, e1 + b\, d2}], [x = -\left(\left(b\, c1\, d1\, d2 + b\, c2\, d1^2\right) e2^3 +\right.$

$$((-b\,c1\,d2^2-2\,b\,c2\,d1\,d2+b\,c1\,d1^2)\;e1+b^2\,c2\,d1\,d2+(-b\,c2^2-b\,c1^2-b^2\,c1)\;d1^2)\;e2^2+$$
$$((b\,c2\,d2^2-b\,c1\,d1\,d2)\;e1^2+((b\,c2^2+b\,c1^2+b^2\,c1)\;d1\,d2-b^2\,c2\,d2^2)\;e1+(-b^2\,c2^2-b^2\,c1^2)\;d1\,d2)\;e2)/(d1^2\,e$$
$$(-2\,d1\,d2\,e1-2\,c2\,d1^2)\;e2^3+((d2^2+d1^2)\;e1^2+(4\,c2\,d1\,d2+(-2\,c1-2\,b)\;d1^2)\;e1-2\,b\,c2\,d1\,d2+(c2^2+c1^2+$$
$$(-2\,d1\,d2\,e1^3+((4\,c1+4\,b)\;d1\,d2-2\,c2\,d2^2)\;e1^2+(2\,b\,c2\,d2^2+(-2\,c2^2-2\,c1^2-6\,b\,c1-2\,b^2)\;d1\,d2)\;e1+(2\,b$$
$$d2^2\,e1^4+(-2\,c1-2\,b)\;d2^2\,e1^3+(c2^2+c1^2+4\,b\,c1+b^2)\;d2^2\,e1^2+(-2\,b\,c2^2-2\,b\,c1^2-2\,b^2\,c1)\;d2^2\,e1+$$
$$(b^2\,c2^2+b^2\,c1^2)\;d2^2),y=-((b\,c2\,d1\,d2-b\,c1\,d1^2)\;e2^3+((-b\,c2\,d2^2+2\,b\,c1\,d1\,d2+b\,c2\,d1^2)\;e1+(-b\,c2^2-b\,c$$
$$((-b\,c1\,d2^2-b\,c2\,d1\,d2)\;e1^2+((b\,c2^2+b\,c1^2+b^2\,c1)\;d2^2+b^2\,c2\,d1\,d2)\;e1+(-b^2\,c2^2-b^2\,c1^2)\;d2^2)\;e2)/(d1^2\,e$$
$$(-2\,d1\,d2\,e1-2\,c2\,d1^2)\;e2^3+((d2^2+d1^2)\;e1^2+(4\,c2\,d1\,d2+(-2\,c1-2\,b)\;d1^2)\;e1-2\,b\,c2\,d1\,d2+(c2^2+c1^2+$$
$$(-2\,d1\,d2\,e1^3+((4\,c1+4\,b)\;d1\,d2-2\,c2\,d2^2)\;e1^2+(2\,b\,c2\,d2^2+(-2\,c2^2-2\,c1^2-6\,b\,c1-2\,b^2)\;d1\,d2)\;e1+(2\,b$$
$$d2^2\,e1^4+(-2\,c1-2\,b)\;d2^2\,e1^3+(c2^2+c1^2+4\,b\,c1+b^2)\;d2^2\,e1^2+(-2\,b\,c2^2-2\,b\,c1^2-2\,b^2\,c1)\;d2^2\,e1+$$
$$(b^2\,c2^2+b^2\,c1^2)\;d2^2)]]$$

(%i18) `D2 : autrepoint(D1,A,C1,B,E1);`

(%o18) $$[[x=\frac{b\,c1\,e2}{c1\,e2-c2\,e1+b\,c2},y=\frac{b\,c2\,e2}{c1\,e2-c2\,e1+b\,c2}],[x=((b\,c1^2\,d2^2+b^2\,c1\,c2\,d2+b\,c1^2\,d1^2+b^2\,c2^2\,d1)$$
$$((-b\,c1\,c2\,d2^2-b^2\,c2^2\,d2-b\,c1\,c2\,d1^2+b^2\,c1\,c2\,d1)\;e1+b^2\,c1\,c2\,d2^2+b^3\,c2^2\,d2+b^2\,c1\,c2\,d1^2-b^3\,c1\,c2\,d1)\;e2)/$$
$$((-2\,c1\,c2\,d2^2-2\,b\,c2^2\,d2-2\,c1\,c2\,d1^2+2\,b\,c1\,c2\,d1)\;e1+2\,b\,c1\,c2\,d2^2+2\,b^2\,c2^2\,d2+2\,b\,c1\,c2\,d1^2-2\,b^2\,c1\,c2\,d1$$
$$(c2^2\,d2^2+c2^2\,d1^2-2\,b\,c2^2\,d1+b^2\,c2^2)\;e1^2+(-2\,b\,c2^2\,d2^2-2\,b\,c2^2\,d1^2+4\,b^2\,c2^2\,d1-2\,b^3\,c2^2)\;e1+$$
$$b^2\,c2^2\,d2^2+b^2\,c2^2\,d1^2-2\,b^3\,c2^2\,d1+b^4\,c2^2),y=((b\,c1\,c2\,d2^2+b^2\,c2^2\,d2+b\,c1\,c2\,d1^2-b^2\,c1\,c2\,d1)\;e2^2+$$
$$((-b\,c2^2\,d2^2+b^2\,c1\,c2\,d2-b\,c2^2\,d1^2+b^2\,c2^2\,d1)\;e1+b^2\,c2^2\,d2^2-b^3\,c1\,c2\,d2+b^2\,c2^2\,d1^2-b^3\,c2^2\,d1)\;e2)/((c1^2$$
$$((-2\,c1\,c2\,d2^2-2\,b\,c2^2\,d2-2\,c1\,c2\,d1^2+2\,b\,c1\,c2\,d1)\;e1+2\,b\,c1\,c2\,d2^2+2\,b^2\,c2^2\,d2+2\,b\,c1\,c2\,d1^2-2\,b^2\,c1\,c2\,d1$$
$$(c2^2\,d2^2+c2^2\,d1^2-2\,b\,c2^2\,d1+b^2\,c2^2)\;e1^2+(-2\,b\,c2^2\,d2^2-2\,b\,c2^2\,d1^2+4\,b^2\,c2^2\,d1-2\,b^3\,c2^2)\;e1+$$
$$b^2\,c2^2\,d2^2+b^2\,c2^2\,d1^2-2\,b^3\,c2^2\,d1+b^4\,c2^2)]]$$

(%i19) `E2 : autrepoint(E1,B,D1,C,A1);`

(%o19) $$[[x=((b\,c1^2\,d2^2+(b^2\,c1\,c2-b\,c1\,c2\,d1)\;d2)\;e2^2+((b^2\,c1-b\,c1^2)\;c2\,d2^2+((2\,b\,c1-b^2)\;c2^2\,d1+(b^3-$$
$$(b\,c1^2\,d2^2+(b^2\,c1\,c2-b\,c1\,c2\,d1)\;d2)\;e1^2+(((b^2-b\,c1)\;c2^2-2\,b\,c1^3)\;d2^2+((b\,c2^3+(3\,b\,c1^2+b^2\,c1)\;c2)\;d1-$$
$$((b\,c1^2-b^2\,c1)\;c2^2+b\,c1^4)\;d2^2+(((b^2-2\,b\,c1)\;c2^3+(-2\,b\,c1^3-b^2\,c1^2)\;c2)\;d1+(2\,b^2\,c1-b^3)\;c2^3+(2\,b^2\,c1^3$$
$$(b\,c2^4+(b\,c1^2+b^2\,c1)\;c2^2)\;d1^2+((-2\,b^2\,c1^2-2\,b^3\,c1)\;c2^2-2\,b^2\,c2^4)\;d1+b^3\,c2^4+$$
$$(b^3\,c1^2+b^4\,c1)\;c2^2)/((c1^2\,d2^2+(2\,b\,c1\,c2-2\,c1\,c2\,d1)\;d2+c2^2\,d1^2-2\,b\,c2^2\,d1+b^2\,c2^2)\;e2^2+$$
$$((2\,b\,c1-2\,c1^2)\;c2\,d2^2+((4\,c1-2\,b)\;c2^2\,d1+(2\,b^2-4\,b\,c1)\;c2^2)\;d2-2\,c2^3\,d1^2+4\,b\,c2^3\,d1-2\,b^2\,c2^3)\;e2+$$
$$(c1^2\,d2^2+(2\,b\,c1\,c2-2\,c1\,c2\,d1)\;d2+c2^2\,d1^2-2\,b\,c2^2\,d1+b^2\,c2^2)\;e1^2+(-2\,c1^3\,d2^2+((4\,c1^2+2\,b\,c1)\;c2\,d1+($$
$$((c1^2-2\,b\,c1+b^2)\;c2^2+c1^4)\;d2^2+(((2\,b-2\,c1)\;c2^3+(-2\,c1^3-2\,b\,c1^2)\;c2)\;d1+(2\,b\,c1-2\,b^2)\;c2^3+(2\,b\,c1^3$$
$$(c2^4+(c1^2+2\,b\,c1+b^2)\;c2^2)\;d1^2+((-2\,b\,c1^2-4\,b^2\,c1-2\,b^3)\;c2^2-2\,b\,c2^4)\;d1+$$
$$b^2\,c2^4+(b^2\,c1^2+2\,b^3\,c1+b^4)\;c2^2),y=((b\,c1\,c2\,d2^2+(b^2\,c2^2-b\,c2^2\,d1)\;d2)\;e2^2+$$
$$((b^2-b\,c1)\;c2^2\,d2^2+((b\,c2^3+(b^2\,c1-b\,c1^2)\;c2)\;d1-b^2\,c2^3+(b^2\,c1^2-b^3\,c1)\;c2)\;d2+b\,c1\,c2^2\,d1^2-2\,b^2\,c1\,c2$$
$$(b\,c1\,c2\,d2^2+(b^2\,c2^2-b\,c2^2\,d1)\;d2)\;e1^2+((-b\,c1^2-b^2\,c1)\;c2\,d2^2+((2\,b\,c1+b^2)\;c2^2\,d1+(-2\,b^2\,c1-b^3)\;c2^2)$$
$$b^2\,c1^2\,c2\,d2^2+(2\,b^3\,c1\,c2^2-2\,b^2\,c1\,c2^2\,d1)\;d2+b^2\,c2^3\,d1^2-2\,b^3\,c2^3\,d1+b^4\,c2^3)/((c1^2\,d2^2+(2\,b\,c1\,c2-2\,c1\,c2\,d1)\;d$$
$$((2\,b\,c1-2\,c1^2)\;c2\,d2^2+((4\,c1-2\,b)\;c2^2\,d1+(2\,b^2-4\,b\,c1)\;c2^2)\;d2-2\,c2^3\,d1^2+4\,b\,c2^3\,d1-2\,b^2\,c2^3)\;e2+$$

$\left(c1^2\,d2^2+(2\,b\,c1\,c2-2\,c1\,c2\,d1)\,d2+c2^2\,d1^2-2\,b\,c2^2\,d1+b^2\,c2^2\right)\,e1^2+\left(-2\,c1^3\,d2^2+\left(\left(4\,c1^2+2\,b\,c1\right)\,c2\,d1+\right.\right.$
$\left(\left(c1^2-2\,b\,c1+b^2\right)\,c2^2+c1^4\right)\,d2^2+\left(\left(\left(2\,b-2\,c1\right)\,c2^3+\left(-2\,c1^3-2\,b\,c1^2\right)\,c2\right)\,d1+\left(2\,b\,c1-2\,b^2\right)\,c2^3+\left(2\,b\,c1^3\right.\right.$
$\left(c2^4+\left(c1^2+2\,b\,c1+b^2\right)\,c2^2\right)\,d1^2+\left(\left(-2\,b\,c1^2-4\,b^2\,c1-2\,b^3\right)\,c2^2-2\,b\,c2^4\right)\,d1+$
$b^2\,c2^4+\left(b^2\,c1^2+2\,b^3\,c1+b^4\right)\,c2^2)],[x=\dfrac{b\,c1\,d2}{c1\,d2-c2\,d1+b\,c2},y=\dfrac{b\,c2\,d2}{c1\,d2-c2\,d1+b\,c2}]]$

```
(%i20) eq : circons(subst(A2[1],[x,y]),subst(B2[1],[x,y]),subst(C2[2],[x,y]))$
```

```
(%i21) ratsimp(subst(D2[2],eq));
```

(%o21) 0

```
(%i22) ratsimp(subst(E2[1],eq));
```

(%o22) 0