Homomorphismes d'Harish-Chandra et de Chevalley via les opérateurs de Dunkl

Charles Torossian

Exposé du 27 Octobre 1994

1 Introduction-Rappels.

Soient G un groupe de Lie connexe semi-simple réel à centre fini et K un sous-groupe compact maximal. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{k}$ celle de K et $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan associée. Soient $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan dans $\mathfrak{p}$, Σ le système de racines associé, Σ^+ un choix de racines positives et W le groupe de Weyl. On note $U = U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ et $U^{\mathfrak{k}}$ le commutant de $\mathfrak{k}$ dans U. Le choix de Σ^+ définit une décomposition d'Iwasawa de $\mathfrak{g}$, i.e. $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. La décomposition de l'algèbre enveloppante, $U = (U\mathfrak{k} + \mathfrak{n}U) \oplus U(\mathfrak{a})$ définit une projection γ de U sur $U(\mathfrak{a})$ i.e. pour $u \in U$ on a $u - \gamma(u) \in U\mathfrak{k} + \mathfrak{n}U$. Si ρ désigne comme à l'habitude la demie somme des racines positives, avec multiplicité, i.e. on a $\rho(X) = \frac{1}{2} tr_{\mathfrak{n}}(adX)$ pour $X \in \mathfrak{a}$, alors l'application $X \in \mathfrak{a} \mapsto X + \rho(X) \in U(\mathfrak{a})$ s'étend en un isomorphisme d'algèbres appelé décalage.

On note Γ la composée de la projection γ et du décalage par ρ, c'est l'application d'Harish-Chandra.

Il est bien connu que l'algèbre $U^{\mathfrak{k}}/U^{\mathfrak{k}} \cap U\mathfrak{k}$ est commutative et isomorphe à l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à cœfficients réels sur l'espace symétrique G/K. D'après Harish-Chandra [8] on a le résultat fondamental suivant.

Théorème 1 *L'application Γ est un isomorphisme d'algèbres de $U^{\mathfrak{k}}/U^{\mathfrak{k}} \cap U\mathfrak{k}$ sur $U(\mathfrak{a})^W$ (les invariants par W dans $U(\mathfrak{a})$).*

La forme de Killing sur $\mathfrak{p}$ est non dégénérée, on a donc la décomposition $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$, puis celle de l'algèbre symétrique $S[\mathfrak{p}] = S[\mathfrak{a}] \oplus S[\mathfrak{p}]\mathfrak{a}^{\perp}$, ce qui définit une projection notée Res de $S[\mathfrak{p}]$ sur $S[\mathfrak{a}]$. le théorème de restriction de Chevalley affirme:

Théorème 2 *L'application Res est une isomorphisme de $S[\mathfrak{p}]^K$ sur $S[\mathfrak{a}]^W$.*

Enfin je note β l'application de symétrisation de $S[\mathfrak{g}]$ dans U et de $S[\mathfrak{p}]$ dans $U/U \cdot \mathfrak{k}$, grace à la décomposition $U = U \cdot \mathfrak{k} \oplus \beta(S[\mathfrak{p}])$. Le but de cet exposé est de donner des formule pour les applications inverses dans les théorèmes de Chevalley et d'Harish-Chandra. On trouvera tous les détails dans [12] et [13].

En fait la formule pour Res^{-1} s'obtient par graduation de la formule pour Γ^{-1}. Pour obtenir ces résultats j'utilise les opérateurs de Dunkl rationnels (pour Chevalley) et trigonométriques (pour Harish-Chandra).

2 Inversion de Chevalley

Afin de rendre l'exposé autonome je me permets de faire quelques rappels concernant les opérateurs de Dunkl. On dispose d'un espace euclidien $\mathfrak{a}$ de dimension finie et d'un système de racine $\Delta \subset \mathfrak{a}^*$. On choisit un système positif Δ^+. On note W le groupe de Weyl associé. On note $\Delta^\vee$ le système des coracines i.e. on a $\alpha^\vee = 2h_\alpha/(h_\alpha, h_\alpha)$ avec $(h_\alpha, x) = \alpha(x)$ pour $\alpha \in \Delta$.

Pour $\xi \in \mathfrak{a}$ on définit les opérateurs de Dunkl T_ξ par la formule:

$$T_\xi(k) = \partial_\xi + \sum_{\alpha \in \Delta^+} k_\alpha \alpha(\xi) \frac{1 - r_\alpha}{\alpha(.)}$$

où $k = \{k_\alpha\}$ est une fonction de mulpiplicité sur Δ, W-invariante et r_α sont les reflexions par rapport à $\alpha^\vee$ i.e. on a $r_\alpha(x) = x - \alpha(x)\alpha^\vee$. Dans le cas qui nous intéresse on aura $k_\alpha = m_\alpha/2$ avec m_α la multiplicité associé à notre espace symétrique, i.e. la dimension de l'espace spectral associé à la racine α.

Les propriétés essentielles des opérateurs de Dunkl sont les suivantes.

i) Ils sont bien définis sur les fonctions polynomiales sur $\mathfrak{a}$ (notées $\mathbb{C}[\mathfrak{a}]$), les fonctions C^∞ ou les fonctions analytiques, car l'opérateur $\frac{1-r_\alpha}{\alpha(.)}$ est bien défini.

De plus ce sont des opérateurs de degré -1.

ii) Ils commutent deux à deux [4].

Il y a plusieurs démonstrations de ce résultat. La démonstration de Dunkl consiste à construire un opérateur d'entrelacement V (pour des valeurs génériques de k) homogène tel que $V(1) = 1$. L'entrelacement signifiant bien-sûr, que l'on a

$$V\partial_\xi = T_\xi V.$$

Heckman a donné une démonstration plus directe par réduction au rang 2. Cette démonstration permet d'obtenir un résultat plus général sur la commutativité de ce genre d'opérateurs où on ne suppose pas a priori que l'on a une famille d'hyperplans liés à un système de racines. Il vient alors que la commutativité implique que la famille d'hyperplans est stable par action des reflexions orthogonales associées i.e. le groupe engendré est un groupe de Coxeter, de plus les multiplicités sont W invariantes.

iii) Ils sont équivariants i.e. on a $T_{w\xi} = wT_\xi w^{-1}$.

iiii) Dans le cas des espaces symétriques, ils permettent de calculer les parties radiales des opérateurs différentiels liés au groupe des déplacements. Plus précisément pour $p \in S[\mathfrak{a}]^W$, T_p sur les polynômes $W-$invariants est un opérateur différentiel (c'est vrai pour toute fonction de multiplicité) et c'est la partie radiale de l'opérateur $\partial(P)$ avec $P \in S[\mathfrak{p}]^K$ tel que $Res(P) = p$. Ce résultat se démontre de la faqn suivante. On commence par vérifier la chose pour le laplacien L. On utilise ensuite les formules suivantes (pour P homogène de degré n)

$$\frac{1}{2^n n!} ad^n(L)(P^\sharp) = \partial(P)$$

où $P^\sharp$ est la fonction polynomiale sur $\mathfrak{p}$ correspondant à P. On en déduit que l'on a

$$Rad\partial(P) = \frac{1}{2^n n!} ad^n(T_l(p^\sharp))$$

sur les fonctions $W-$ nvariantes sur $\mathfrak{a}$ (on a noté $l = Res(L)$). Puis pour les mêmes raisons on a

$$\frac{1}{2^n n!} ad^n(T_l(p^\sharp)) = T_p.$$

On peut donner maintenant une formule pour l'inversion de Chevalley.

Soit $p \in S[\mathfrak{a}]$ et $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, notons $Cp(\lambda) = T_p(e^\lambda)(0)$. Alors Cp est une fonction polynomiale, de plus l'opérateur C conserve homogénité. Une question centrale est de connaitre les valeurs de k pour lesquelles l'opérateur C est inversible. En fait les propositions suivantes sont équivalentes

i) C est inversible

ii) la forme bilinéaire symétrique: $< p, q >_k = T_p(q^*)(0)$ est non dégénérée

iii) $\bigcap_{\xi \in \mathfrak{a}} KerT_\xi(k) = \mathbb{C}$.

On désigne par K^{reg} les multiplicités qui vérifient les conditions précédentes et dites régulières, les autres sont dites singulières et notées K^{sing}. On peut montrer que l'on a

$$K^{sing} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (K^o - n1_R)$$

avec $K^o = \{k, < \pi, \pi >_k = 0\}$ où π désigne le produit des coracines positives. On peut aussi montrer que l'on a

$$K_\geq \subset K^{reg}$$

avec $K_\geq = \{k, \Re(k) \geq 0\}$.

L'opérateur C est symétrique lorsque qu'on identifie $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}^*$ grâce au produit scalaire. On a toujours la formule suivante pour $q \in \mathbb{C}[\mathfrak{a}]$ et $\xi \in \mathfrak{a}$

$$^tCq(\xi) = e^{T_\xi} q(0).$$

Par ailleurs notons que ${}^tC$ est aussi un opérateur d'entrelacement i.e. on a $\partial_\xi C = CT_\xi$. Dans le cas des multiplicités régulières on a alors ${}^tC = V^{-1}$ et les fonctions "exponentielles" intoduites par Dunkl et Opdam s'expriment par la formule formelle

$$E(\lambda, k, x) = {}^tC^{-1}(e^\lambda)$$

elles sont solutions du système pour tout $\xi \in \mathfrak{a}$,

$$T_\xi E(\lambda, k, x) = \lambda(\xi) E(\lambda, k, x).$$

Théorème 3 *Pour $p \in S[\mathfrak{a}]^W$ considéré comme un élément de $S[\mathfrak{p}]$ on a la formule*

$$Res^{-1}p = \int_K Ad(k) \cdot Cpdk.$$

Preuve: Les deux membres sont des éléments K-invariants. Il suffit de vérifier l'égalité pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ que l'on considère comme un élément de $\mathfrak{p}^*$. On a

$$\int_K Ad(k) \cdot Cp(\lambda)dk = \int_K (proj_{\mathfrak{a}^*} Adk^{-1} \cdot \lambda)dk =$$
$$\int_K T_p(e^{proj_{\mathfrak{a}^*} Adk^{-1} \cdot \lambda})(0)dk = T_p(\int_K e^{proj_{\mathfrak{a}^*} Adk^{-1} \cdot \lambda} dk)(0) =$$
$$Rad\partial(P)(J_W(\lambda, k))(0) = \partial(P)\Psi_\lambda(0) = P(\lambda)\Psi_\lambda(0) = P(\lambda).$$

où Ψ_λ est la fonction de Bessel généralisée sur $\mathfrak{p}$.

Remarque: Ceci montre que la formule de V sur les polynômes $W-$invariants n'est pas autre chose que l'intégration sur K. Cette remarque permet de donner une formule pour V, dans le cas des espaces symétriques, simple en utilisant l'intégration.

Ce théorème permet de donner une formule pour les fonctions dérivables à support compact. Pour donner un sens à l'exponentielle d'un opérateur non borné, il faut utiliser le théorème spectral. Or cette théorie est développée dans [9]. On peut alors montrer que la formule donne une extension des fonctions de classe n dans les fonctions de classe $n-d$ avec d de l'ordre de $\dim(\mathfrak{p})/2$ (pour les détails voir [12]). Ce résultat n'est toutefois pas optimal si on se réfère à l'article de Barbençon [1] où l'isomorphisme de Chevalley est démontré en classe n.

Dans le cas où la fonction de multiplicité est identiquement 1, ce qui correspond au cas où l'espace symétrique à une structure complexe, la formule d'inversion est assez simple, puisque l'opérateur C est alors differentiel. On a précisément

$$Cp = \frac{1}{\partial(\pi)(\pi)}(\partial(\pi)(\pi^\vee p)$$

Cette formule est démontrée dans [3].

3 Inversion d'Harish-Chandra

3.1 Les opérateurs de Cherednik, propriétés et applications

Dans ce paragraphe Δ est un système de racines dans $\mathfrak{a}^*$ (non nécessairement réduit), Δ^+ un choix de racines positives et W le groupe de Weyl. On appelle fonction de multiplicité une fonction W-invariante sur Δ à valeurs complexes que l'on note $(k_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$. Le cas des espaces symétiques correspond au cas où Δ vaut 2Σ et $k_{2\alpha}$ vaut $m_\alpha/2$, avec m_α la multiplicité de la racine α (cf [7]).

Soient Q le $\mathbb{Z}$-réseau des racines, $Q^\vee$ celui des coracines et P le réseau des poids entiers i.e. $P = Hom_{\mathbb{Z}}(Q^\vee, \mathbb{Z})$. Pour $\xi \in \mathfrak{a}$ on note D_ξ l'opérateur de Dunkl trigonométrique ou opérateur de Cherednik (cf [2])

$$D_\xi = \partial_\xi + \sum_{\alpha\in\Delta^+} k_\alpha \alpha(\xi) \frac{1 - r_\alpha}{1 - e^{-\alpha}} - \rho(\xi)$$

où r_α désigne la réflexion par rapport à la coracine H_α et $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+} k_\alpha \alpha$ (qui vaut bien $\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^+} m_\alpha \alpha$ dans le cas des espaces symétriques).

L'opérateur D_ξ est bien défini sur l'algèbre des polynômes trigonométriques sur $\mathfrak{a}$, i.e. sur $\mathbb{C}[P] = \bigoplus_{\lambda\in P} \mathbb{C} e^\lambda$. Contrairement aux opérateurs de Dunkl ([4]) et d'Heckman ([7]) les opérateurs de Cherednik ne sont pas équivariants par rapport à l'action du groupe de Weyl, mais l'algèbre engendrée par 1 les D_ξ et W est isomorphe à l'algèbre de Hecke affine graduée ([10]). Un résultat essentiel dû à Cherednik [2] est le suivant.

Théorème 4 *Les opérateurs D_ξ commutent deux à deux.*

Nous donnons quelques indications concernant la démonstration de ce résultat. En fait comme dans le cas rationnel, il suffit de montrer la commutativité dans ls cas où l'on a $k_\alpha \in \mathbb{N}$. Sur $\mathbb{C}[P]$ il existe un produit scalaire pour lequel les opérateurs de Cherednik sont symétriques. Ce produit est défini de la manière suivante, on pose pour $p, q \in \mathbb{C}[P]$

$$< p, q >_k = CT(p\overline{q}\delta)$$

avec $\delta = \prod_{\alpha\in\Delta}(e^\alpha - 1)^{k_\alpha}$ et $\overline{e^\lambda} = e^{-\lambda}$. Par ailleurs il existe un ordre sur P défini de la manière suivante.

Pour tout $\lambda \in P$ on écrit $\lambda = w_\lambda \cdot \lambda^\star$ avec $\lambda^\star$ un poids dominant et w_λ de longueur minimale. On dira que $\lambda \leq_W \mu$ si et seulement si on a

$$\lambda^\star \leq \mu^\star$$

ou

$$\lambda^\star = \mu^\star \, et \, w_\lambda \leq w_\mu.$$

Alors les opérateurs de Cherednik sont triangulaires pour cet ordre. Par ailleurs il existe une base $E(\lambda, k)$ vérifiant les conditions suivantes:

i) $E(\lambda, k) = e^\lambda + \sum_{\mu \leq_W \lambda} c_{\lambda,\mu} e^\mu$

ii) $\forall \mu \leq_W \lambda, < E(\lambda, k), e^\mu >_k = 0$.

Le fait que les opérateurs de Cherednik soient symétriques et triangulaires montre qu'ils sont diagonaux pour cette base, par conséquent ces opérateurs forment une famille commutative et la base est orthogonale. On calcule facilement que l'on a $D_\xi E(\lambda, k) = (\lambda + \rho(k))(\xi) E(\lambda, k)$ pour $\xi \in \mathfrak{a}$ et λ dominant.

Pour $p \in S[\mathfrak{a}]$ (l'algèbre symétrique de $\mathfrak{a}$) on note D_p l'opérateur associé, sur les polynômes trigonométriques sur $\mathfrak{a}$, grâce au théorème 4. Notons que nous n'avons plus l'équivariance par rapport à l'action de W, i.e. on n'a pas en général $w \cdot D_\xi \cdot w^{-1} = D_\xi$, toutefois le centre de l'agèbre de Hecke graduée correspond exactement aux éléments $W-$invariants dans l'algèbre symétrique, par conséquent, pour $p \in S[\mathfrak{a}]^W$ l'opérateur D_p commute à W. C'est donc un opérateur de $\mathbb{C}[P]^W$ et il est différentiel. Le point fondamental est le suivant:

Proposition 1 *Dans le cas des espaces symétriques, i.e. pour le système* $\Delta = 2\Sigma$ *et* $k_{2\alpha} = m_\alpha/2$ *pour* $\alpha \in \Sigma$, *l'opérateur différentiel (W-invariant)* D_p *sur* $\mathbb{C}[P]^W$ *est la partie radiale de l'opérateur* $G-$*invariant* D_u *sur l'espace symétrique* G/K *avec* $u \in U^{\mathfrak{k}}/U^{\mathfrak{k}} \cap U\mathfrak{k}$ *tel que* $\Gamma(u) = p$.

Sans rentrer dans les détails ce résultat s'établit comme suit. On commence comme à l'habitude par faire le calcul pour l'opérateur de Laplace-Beltrami noté L. Dans [7] on montre que l'objet intéressant est l'algèbre des opérateurs différentiels sur A à cœfficients dans l'algèbre engendrée par 1, et les $\frac{1}{1-e^{-\alpha}}$ pour $\alpha \in \Delta^+$. On la note $\mathfrak{D}$. On note $D(k) = \mathfrak{D}^{W,L}$, i.e. les opérateurs qui commutent à L et qui sont W-invariants. Cette algèbre est commutative car tout élément y est déterminé par son premier terme, i.e. le terme p_o dans le développement $\sum_{\mu \leq 0} e^\mu \partial(p_\mu)$. Maintenant l'homomorphisme d'Harish-Chandra vérifie

$$\Gamma(D_u)(\lambda + \rho) = p_o(\lambda).$$

avec $\sum_{\mu \leq 0} e^\mu \partial(p_\mu)$ le développement de la partie radiale de l'opérateur D_u.
L'évaluation de l'opérateur D_p sur les polynômes de Jacobi, i.e. $P(\lambda, k) = \sum E(w \cdot \lambda, k)$, donne comme valeur propre exactement $p(\lambda + \rho)$ (pour λ dominant. D'un autre coté (cf

[7]) cette valeur propre vaut aussi $p_o(\lambda)$ lorsqu'on utilise le développement ci-dessus, d'où l'égalité

$$\Gamma(D_u)(\lambda+\rho) = p(\lambda+\rho).$$

Ce qui montre que D_p sur les fonctions W-invariantes est bien la partie K-radiale de l'opérateur différentiel G-invariant sur G/K, D_u avec $\Gamma(u) = p$.

Les opérateurs de Cherednik sont l'analogue trigonométrique des opérateurs de Dunkl rationnels du paragraphe précédent. Nous avons introduit dans ce dernier l'opérateur C, ici nous avons de manière analogue le résultat suivant:

Proposition 2 *Pour $p \in S[\mathfrak{a}]$, la fonction Hp sur $\mathfrak{a}^*$ définie par $Hp(\lambda) = D_p(e^\lambda)(0)$ est polynomiale en $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, de degré inférieur à celui de p. On l'identifie à un élément de $S[\mathfrak{a}]$. Si p est homogène, le terme de plus haut degré de Hp n'est autre que Cp. De plus, si p est W-invariant on a $Hp \in S[\mathfrak{a}]^W$.*

Preuve:

Remarquons dans un premier temps que D_ξ agit sur les fonctions C^∞ sur $\mathfrak{a}$. En effet il est clair que les opérateurs de Demazure $\frac{1-r_\alpha}{\alpha(\cdot)}$ agissent bien sur $C^\infty(\mathfrak{a})$ (et même sur les germes analytiques en 0). On écrit alors

$$D_\xi = \partial_\xi + \sum_{\alpha\in\Delta^+} k_\alpha \alpha(\xi)\frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}}\frac{1-r_\alpha}{\alpha} - \rho(\xi).$$

En développant $\frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}}$ en série, on voit que l'on peut écrire D_ξ comme une somme convergente d'opérateurs homogènes de degré $-1, 0, 1\ldots$. Le premier terme, i.e. le terme de degré -1 est exactement l'opérateur de Dunkl T_ξ. Supposons p homogène de degré n et écrivons $D_p = T_p + \sum_{i>-n} D_p^{(i)}$. On a alors

$$D_p(e^\lambda)(0) = \sum_{j=0}^{\infty} D_p(\lambda^j/j!)(0) = T_p(\lambda^n/n!) + \sum_{i=-n+1}^{0} D_p^{(i)}(\lambda^{-i}/(-i)!).$$

Ceci montre bien que $H(p)$ est une fonction polynomiale en λ de degré inférieur au degré de p. Si p est homogène de degré n le terme de plus haut degré n'est autre que Cp d'après une formule montrée dans le paragraphe précédent i.e. $Cp(\lambda) = T_p(e^\lambda)(0) = T_p(\lambda^n/n!)$. De plus si p est W-invariant on sait (cf [10]) que l'opérateur D_p commute à l'action de W et par conséquent on a $Hp \in S[\mathfrak{a}]^W$.$\square$

Ainsi H, endomorphisme de $S[\mathfrak{a}]$, est triangulaire (par rapport au degré) de partie diagonale l'endomorphisme C. Si C est inversible alors H l'est aussi (et réciproquement).

Dans [5] on décrit les multiplicités k_α pour lesquelles C est inversible. Pour ce qui nous concerne (i.e. des multiplicités associées aux espaces symétriques), nous savons que C est inversible. Calculons l'adjoint formel noté ${}^tH$ de H sur $(S[\mathfrak{a}])^*$, qui s'identifie naturellement à l'algèbre $S[[\mathfrak{a}^*]]$ des séries formelles en $\mathfrak{a}^*$, i.e. les séries formelles sur $\mathfrak{a}$.

Proposition 3 *Soit $q \in S[[\mathfrak{a}^*]]$. Comme série formelle en $\xi \in \mathfrak{a}$, on a ${}^tHq(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D_{\xi^n}(q)(0)$ et ${}^tH$ réalise un entrelacement entre ∂_η et D_η opérant dans $S[[\mathfrak{a}^*]]$, i.e. on a $\partial_\eta {}^tH = {}^tHD_\eta$. Si de plus C est inversible, alors ${}^tH$ est inversible sur $S[[\mathfrak{a}^*]]$ et pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, la série $G(\lambda) = {}^tH^{-1}(e^\lambda)$ est solution formelle du système d'équations $D_\eta G(\lambda) = \lambda(\eta)G(\lambda)$, pour tout $\eta \in \mathfrak{a}$.*

Preuve: On peut écrire D_ξ comme une somme convergente d'opérateurs homogènes de degré $-1, 0, 1 \ldots$, il est clair alors que D_ξ agit aussi sur $S[[\mathfrak{a}^*]]$. On a, pour $p \in S[\mathfrak{a}]$ et $q \in S[[\mathfrak{a}^*]]$,

$$< {}^tHq, p >=< q, Hp >:= \partial(q)(Hp)(0) = D_p(q)(0).$$

Comme $p = e^\xi$ $(\xi \in \mathfrak{a})$ est un noyau reproduisant on a, comme série formelle, ${}^tHq(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D_{\xi^n}(q)(0)$ (que l'on pourrait noter abusivement $e^{D_\xi}(q)(0)$). Par ailleurs on a les égalités suivantes, pour $\eta \in \mathfrak{a}$,

$$< \partial_\eta {}^tHq, p >=< q, H(\eta p) >= (D_pD_\eta q)(0) =< {}^tH(D_\eta q), p > .$$

D'où la relation d'entrelacement. Si C est inversible alors ${}^tC$ l'est aussi sur $S[[\mathfrak{a}^*]]$. On a vu que H diminue le degré, par conséquent ${}^tH$ augmente la valuation et a pour partie diagonale ${}^tC$. Ainsi ${}^tH$ est inversible et vérifie la relation d'entrelacement $D_\eta {}^tH^{-1} = {}^tH^{-1}\ \partial_\eta$. Par suite la série formelle $G(\lambda, k, .) = {}^tH^{-1}(e^\lambda)$ est bien solution formelle du système d'équations annoncé (cf [10] pour des résultats de convergence et d'analycité). □

Remarque:

i) On constate facilement que l'on a $\lim_{t\to 0} G(\lambda/t, k, tx) = E(\lambda, k, x)$. C'est un le phénomène classique que déformation des espaces symétriques.

ii) Dans le cas des opérateurs de Dunkl l'opérateur C était symétrique ce qui avait pour conséquence la symétrie dans fonctions sphériques entre le pramètre et l'argument, ce n'est plus le cas ici.

3.2 Résultat principal

Notons $S[\mathfrak{p}]$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{p}$ et β la symétrisation de $S[\mathfrak{g}]$ dans U. D'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, on a la décomposition $U = U\mathfrak{k} \oplus \beta(S[\mathfrak{p}])$. En prenant les invariants on obtient la décomposition $U^{\mathfrak{k}} = U\mathfrak{k} \cap U^{\mathfrak{k}} \oplus \beta(S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}})$. L'application déduite, que l'on note encore β, est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ et $U^{\mathfrak{k}}/U^{\mathfrak{k}} \cap U\mathfrak{k} = (U/U\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}$. Nous pouvons maintenant donner une formule pour l'inverse de l'homomorphisme d'Harish-Chandra.

Soit $p \in S[\mathfrak{a}]^W$ et considérons $Hp \in S[\mathfrak{a}]^W$ (pour le système $\Delta = 2\Sigma$ et les multiplicités $k_{2\alpha} = m_\alpha/2$) comme un élément de $S[\mathfrak{p}]$ constant sur l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{p}^*$. Notons $Q = \int_K Ad(k) \cdot Hp\, dk$, où dk est une mesure de Haar normalisée et Ad l'action adjointe. C'est un élément dans $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$. Posons $u = \beta(Q)$.

Théorème 5 *L'élément $u = \beta(\int_K Ad(k) \cdot Hp\, dk)$ de $(U/U\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}$ est l'inverse de p par l'homomorphisme d'Harish-Chandra, i.e. on a $\Gamma(u) = p$.*

Preuve: La forme de Killing sur $\mathfrak{p}$ permet d'identifier $\mathfrak{a}^*$ à un sous-espace de $\mathfrak{p}^*$ grâce à la décomposition orthogonale $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$. On note π la projection orthogonale de $\mathfrak{p}^*$ sur $\mathfrak{a}^*$. Pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, calculons $Q(\lambda)$. On a

$$Q(\lambda) = \int_K Ad(k) \cdot Hp(\lambda)\, dk = \int_K Hp(Adk^{-1} \cdot \lambda)\, dk = \int_K Hp(\pi(Adk^{-1} \cdot \lambda))\, dk$$
$$= \int_K D_p(e^{\pi(Adk^{-1}\cdot\lambda)})(0) dk = D_p(\int_K e^{\pi(Adk^{-1}\cdot\lambda)} dk)(0).$$

Or D_p sur les fonctions W-invariantes sur $\mathfrak{a}$ est la restriction d'un opérateur différentiel W-invariant sur $\mathfrak{a}^{reg}$ (les éléments réguliers de $\mathfrak{a}$, i.e. $\mathfrak{a}^{reg} = \{x \in \mathfrak{a}, \forall \alpha \in \Sigma, \alpha(x) \neq 0\}$) qui n'est autre que la partie K-radiale en coordonnées exponentielles de l'opérateur G-invariant sur G/K noté D_u correspondant à $\Gamma^{-1}(p) = u$. En d'autres termes si F est une fonction C^∞ sur $\mathfrak{p}$, K-invariante et $ResF$ sa restriction à $\mathfrak{a}$, alors les fonctions $D_u(F \circ Exp^{-1}) \circ Exp$ et $D_p(ResF)$ coincident sur $\mathfrak{a}^{reg}$ et par conséquent sur $\mathfrak{a}$ (car elles sont C^∞) (Exp désigne l'application exponentielle de $\mathfrak{p}$ sur G/K).

Or la fonction $\int_K e^{\pi(Adk^{-1}\cdot\lambda)} dk$ est la restriction à $\mathfrak{a}$ de la fonction de Bessel généralisée Ψ_λ avec $\Psi_\lambda(x) = \int_K e^{\lambda(Adk\cdot x)} dk$ $(x \in \mathfrak{p})$. On a donc $D_u(\Psi_\lambda \circ Exp^{-1})(eK) = Q(\lambda)$. Or d'après la définition même de l'application de symétrisation on a

$$D_u(\Psi_\lambda \circ Exp^{-1})(eK) = \partial(\beta^{-1}(u))(\Psi_\lambda)(0) = \beta^{-1}(u)(\lambda)$$

(les fonctions de Bessel sont solutions propres des équations différentielles associées aux polynômes K-invariants sur $\mathfrak{p}$).

Comme Q et $\beta^{-1}(u)$ sont deux éléments de $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ qui coïncident sur $\mathfrak{a}^*$ ils ont égaux d'après le théorème de restriction de Chevalley. On déduit de tout ceci que l'on a bien $u = \beta(Q)$ ce qui termine la preuve. $\square$

3.3 Applications et remarques

1. Si G a une structure complexe on a une expression simple des fonctions sphériques φ_λ sur G/K ($\lambda \in \mathfrak{a}^*$) (cf [8]). On a pour $x \in \mathfrak{a}$

$$\varphi_\lambda(Exp(x)) = \pi(\rho) \sum_{w \in W} \frac{\epsilon(w) e^{iw\lambda(x)}}{\pi(\lambda)\delta^{1/2}(x)}$$

avec π le produit des coracines positives et $\delta^{1/2} = \prod_{\alpha>0} \sinh(\alpha)$. En effectuant un calcul simple analogue au cas rationnel on trouve pour $p \in S[\mathfrak{a}]^W$, $Hp = (\pi(\rho))^{-1}\partial(\delta^{1/2})(\pi p)$ où $\partial(\delta^{1/2})$ est l'opérateur différentiel d'ordre infini correspondant à $\delta^{1/2}$.

2. La formule du théorème 5 implique la formule démontrée dans le cas du théorème de Chevalley. En effet il est bien connu que le théorème de restriction Chevalley est la version graduée du théorème d'Harish-Chandra. Pour obtenir la formule d'inversion dans le théorème de Chevalley il suffit de le faire pour p homogène et de considérer le terme de plus haut degré que l'on a vu être égal à Cp. On retrouve alors la formule $Res^{-1}(p) = \int_K Ad(k) \cdot Cp \, dk$.

3. Si on lit le diagramme d'Harish-Chandra au niveau de l'algèbre $S[\mathfrak{a}]^W$, i.e. si on s'intéresse à l'application $\Gamma \circ \beta \circ Res^{-1}$ celle-ci prend la forme suivante:

$$\Gamma \circ \beta \circ Res^{-1}(p) = H^{-1}Cp.$$

Les applications H et C sont explicites et simples, toutefois leurs inverses sont en général non explicites, c'est ce qui fait la difficulté de l'homomorphisme d'Harish-Chandra.

Références

[1] G. Barbançon, Invariants de classe C^r des groupes finis engendrés par des reflexions et théorème de Chevalley en classe C^r. Duke Mathematical Journal, 53 (3), pp. 563-584 (1986).

[2] I. Cherednik: A unification of Knizhnik-Zamolodchikov equations and Dunkl operators via affine Hecke algebras. Inv. Math. 106 (1991), p. 411-432.

[3] M. Duflo et M. Vergne. Orbites coadjointes et cohomologie équivariante. In the orbit method in representation theory. Birkhäuser, Progress in math., 82 (1990), pp. 11-60.

[4] C. Dunkl: Operators commuting with Coxeter groups actions on polynomials. In Invariant Theory and Tableaux, pp. 107-117. (ed D. Stanton), Berlin Heildeberg New-York, Springer, 1990.

[5] C.Dunkl, E. Opdam, M. de Jeu: Singular polynomials for finite reflexion groups, preprint fev.1994, Leiden.

[6] G. Heckman. A remark on Dunkl differential-difference operators. In Proceedings of the Bowdoin conference on reductive group, (1989).

[7] G. Heckman: Lectures on hypergeometric and spherical functions. Notes for the European School of group theory, Luminy, 1991.

[8] S. Helgason: Groups and geometric analysis. Academic Press, Orlando, 1984.

[9] M. de Jeu. The Dunkl transform, Invent. math. 113 (1993), pp. 147-162.

[10] E. Opdam: Dunkl operators, Bessel functions and the discriminant of finite Coxeter group. Comp. Math. 85, 1993, p. 333-373.

[11] E. Opdam: Harmonic analysis for certain representations of graded Hecke algebras, preprint sept. 1993, Leiden.

[12] C. Torossian: Une application des opérateurs de Dunkl au théorème de restriction de Chevalley. C.R. Acad. Sci. Paris, 318, Serie I, p. 895-898, 1994.

[13] C. Torossian: Une application des opérateurs de Cherednik à l'isomorphisme d'Harish-Chandra pour les espaces symétriques. C.R. Acad. Sci. Paris, 1994, à paraitre.