Multiplicités singulières pour les opérateurs de Dunkl.

Charles Torossian, d'après Dunkl-Opdam-de Jeu

Exposé du 27 Octobre 1994.

1 Introduction-Rappels.

Le contexte qui nous occupe dans cet exposé est celui que l'on a rencontré précédemment. On note $\mathfrak{a}$ un espace euclidien réel de dimension finie, G un groupe de Coxeter fini qui agit sur $\mathfrak{a}$ et R le système de racines associé. On suppose que les racines sont normalisées, i.e. on a $(\alpha, \alpha) = 2$ pour $\alpha \in R$. On fixe un choix de racines positives R^+.

Les opérateurs de Dunkl ([1]) sont définis, pour $\xi \in \mathfrak{a}$, par la formule

$$T_\xi(k) = \partial_\xi + \sum_{\alpha \in R^+} k_\alpha(\alpha, \xi) \frac{1 - r_\alpha}{\alpha^*}$$

où α^* est la forme linéaire sur $\mathfrak{a}$ définie par $\alpha^*(x) = (\alpha, x)$, $k = \{k_\alpha\}$ est une fonction de mulpiplicités sur R, G-invariante et r_α sont les reflexions par rapport à α.

On sait que les opérateurs $T_\xi(k)$ commutent deux à deux.

2 Paramètres singuliers, première approche.

Pour montrer le point fondamental de la commutativité Dunkl construit, pour k donné , un opérateur d'entrelacement V, de $\mathbb{C}[\mathfrak{a}]$ (les fonctions polynomiales sur $\mathfrak{a}$), homogène tel que $V(1) = 1$. L'entrelacement signifiant bien-sûr, que l'on a

$$V\partial_\xi = T_\xi V.$$

Toutefois il y a un obstacle à la construction de V qui dépend de la fonction de multiplicité. On remarque tout d'abord que l'on a facilement le résultat suivant:

Lemme 1 *Si V existe alors il est unique et bijectif.*

Preuve: Si p est dans le noyau de V alors $\partial_\xi p$ aussi, on en déduit que p est nul car $V(1) = 1$. Comme V est homogène, il est bijectif. L'unicité se montre par récurrence.□

Maintenant si V existe, alors on a par entrelacement

$$\bigcap_{\xi\in\mathfrak{a}} KerT_\xi(k) = \mathbb{C}$$

En fait la réciproque est vraie. Une fois que l'on sait que les opérateurs de Dunkl forment une famille commutative, il est facile de constater que l'opérateur homogène C définit par

$$Cp(\xi) = e^{T_\xi}p(0)$$

vérifie le $\partial_\xi C = CT_\xi$. On établit sans peine le

Lemme 2 *L'opérateur C est bijectif si et seulement si on a $\cap_{\xi\in\mathfrak{a}} KerT_\xi(k) = \mathbb{C}$.*

Peuve: Si C est bijectif alors $V = C^{-1}$, le résultat suit. Si on a $\bigcap_{\xi\in\mathfrak{a}} KerT_\xi(k) = \mathbb{C}$ alors C est injectif, et par suite bijectif. En effet si p est dans le noyau de C, on peut supposer que p est homogène, et donc de degré non nul n, car on a $C(1) = 1$. Alors $T_\xi p$ est dans le noyau aussi, et par suite $T_{\xi_1}T_{\xi_2}\ldots T_{\xi_n}p$ aussi (pour des ξ_i dans $\mathfrak{a}$ quelconque). Or il s'agit d'une constante, elle est donc nulle. Par suite on a $T_{\xi_2}\ldots T_{\xi_n}p \in \bigcap_{\xi\in\mathfrak{a}} KerT_\xi(k) = \mathbb{C}$. Pour une question de degré évidente, on a $T_{\xi_2}\ldots T_{\xi_n}p = 0$, on achève le raisonnement par récurrence.$\square$

En conclusion on a montré le résultat suivant

Proposition 1 *Les assertions suivantes sont équivalentes*
i) l'opérateur V existe
ii) l'opérateur C est bijectif
iii) $\cap_{\xi\in\mathfrak{a}} KerT_\xi(k) = \mathbb{C}$.

On dira que k est régulier lorsque l'opérateur d'entrelacement existe pour ce paramètre. On pose $K^{reg} = \{k, \cap_{\xi\in\mathfrak{a}} KerT_\xi(k) = \mathbb{C}\}$, et K^{sing} sont complémentaire. C'est cet ensemble que l'on va étudier.

3 Multilplicités singulières, deuxième approche

Sur $\mathbb{C}[\mathfrak{a}]$ il existe un produit scalaire généralisant le produit de Fischer. Pour $p, q \in \mathbb{C}[\mathfrak{a}]$, on pose

$$< p, q >_k = T_{p^*}(q)(0)$$

où p^* est l'élément de $S[\mathfrak{a}]$ correspondant à p. On a le résultat suivant [2]:

Proposition 2 *Pour p, q dans $\mathbb{C}[\mathfrak{a}]$, $g \in G$, σ, τ des représentations irréductibles de G on a*

i) $< p, q >_k = < q, p >_k$

ii) $< T_\xi p, q >_k = < p, \xi^* q >_k$

iii) $< g \cdot p, g \cdot q >_k = < p, q >_k$

iiii) $< \mathbb{C}[\mathfrak{a}]^n_\sigma, \mathbb{C}[\mathfrak{a}]^m_\tau >_k = 0$, pour $n \neq m$ et $\sigma \neq \tau$ (où $\mathbb{C}[\mathfrak{a}]^n_\sigma$ désigne les polynômes de degré n et de type σ).

Preuve: i) Il suffit de montrer la symétrie pour k à valeurs réelles positives, à cause du principe de prolongement des identités algébriques. On utilise alors la fonction $E(y, k, x)$ construite dans un exposé prédédent, et sa symétrie en x et y. On a

$$T^x_{p^*} T^y_{q^*}(E(y, k, x)) = T^y_{q^*} T^x_{p^*}(E(x, k, y))$$

où les indices du haut précisent les valeurs par rapport auxquelles on agit. En évaluant cette égalité en $x = y = 0$ on obtient le résultat.

ii) et iii) sont claires.

iiii) Le seul point non trivial se résout en remarquant que dans un groupe de Coxeter g et g^{-1} sont conjugués, et par suite si on avait $< \mathbb{C}[\mathfrak{a}]^n_\sigma, \mathbb{C}[\mathfrak{a}]^n_\tau >_k \neq 0$, il existerait un entrelacement entre les représentations σ et τ, ce qui n'est pas. $\square$

Signalons la formule suivante pour une expression intégrale du produit scalaire valable pour les multiplicités de parties réelles positives.

$$< p, q >_k = \frac{1}{c_k} \int_{\mathfrak{a}} (e^{-\Delta_k/2} p)(e^{-\Delta_k/2} q) w_k(x) dx$$

avec Δ_k le laplacien que l'on forme avec les $T_\xi(k)$, $w_k(x) = \prod_{\alpha \in R^+} |\alpha(x)|^{2k_\alpha}$. La symétrie est alors explicite!

Nous regardons la radical de cette forme bilinéaire, i.e.

$$Rad(k) = \{p, \forall q, < p, q >_k = 0\}.$$

C'est un idéal G invariant et stable par l'action des T_ξ. Le lien avec l'ensemble singulier est le suivant.

Proposition 3 *On a $k \in K^{reg} \Longleftrightarrow < ., . >_k$ est non dégénérée, i.e. $Rad(k) = 0$.*

Preuve: Facile.$\square$

Par ailleurs remarquons que l'on a

$$k \in K^{reg} \Longleftrightarrow Rad(k) \cap \mathbb{C}[\mathfrak{a}]^G = \{0\}$$

En effet si p est non nul et dans le radical il suffit de le rendre invariant (prendre $\prod_{g\in G} p^g$ qui est encore dans le radical!). Ce qui montre que le radical contient tous les G-type (s'il est non nul).

On peut aussi noter que l'opérateur C introduit plus haut entrelace les produits scalaires. On a facilement, pour p, q dans $\mathbb{C}[\mathfrak{a}]$

$$< p, Cq >=< p, Cq >_0=< p, q >_k$$

ce qui donne une autre preuve pour la proposition ci-dessus.

4 Multiplicités singulières: résultats.

Proposition 4 *On a* $k + 1_R \in K^{sing} \Longrightarrow k \in K^{sing}$.

Ce genre de propriété est sans surprise car, comme on le verra plus en detail plus tard, la notion de singularité est liée à celle de systèmes locaux, qui possèdent de la monodromie.

Preuve: On a montré en utilisant les opérateurs de shift que pour $p, q \in \mathbb{C}[\mathfrak{a}]^G$ on avait

$$T_p(k)(\pi q) = \pi T_p(k + 1_R)(q)$$

avec bien-sûr $\pi = \prod_{\alpha\in R^+} \alpha$. On en déduit facilement le résultat intermédiaire suivant

$$< \pi p, \pi q >_k=< \pi, \pi >_k< p, q >_{k+1_R} .$$

On peut alors démontrer la proposition. Pour $p \in Rad(k + 1_R)$, $G-$invariant le lemme affirme que πp est orthogonal à $\mathbb{C}[\mathfrak{a}]^{det}$ (det est la représentation signe) et par conséquent on a $\pi p \in Rad(k)$. $\square$

Théorème 1 *Soit* $K^o = \{k, < \pi, \pi >_k= 0\}$. *On a* $K^{sing} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (K^o - n1_R)$.

Preuve: On montre d'abord que l'on a $K^o \subset K^{sing}$. En effet si on a $< \pi, \pi >_k= 0$ alors on a aussi $< \pi p, \pi >_k= 0$ avec $p \in \mathbb{C}[\mathfrak{a}]^G$. Alors π est orthogonal à $\mathbb{C}[\mathfrak{a}]^{det}$ et par suite est un élément de $Rad(k)$.

Pour montrer l'implication inverse, on utilise le même genre d'argument en utilisant le résultat suivant: L'ensemble K^{sing} est borné à "droite", et plus précisément on a le

Lemme 3 *On a* $K_\geq \subset K^{reg}$ *avec* $K_\geq = \{k, \Re(k) \geq 0\}$.

Posons $B(k) =< \pi, \pi >_k$ et $b(s) =< \pi, \pi >_{s \cdot 1_R}$ ($s \in \mathbb{C}$). Nous allons déterminer ces deux polynômes ce qui est le but de cet exposé.

Auparavant montrons que l'on a $K_{\geq} \subset K^{reg}$. On introduit l'opérateur d'Euler associé à nos opérateurs de Dunkl.

$$E = \sum e_i^* T_{e_i}(k)$$

avec (e_i) une base orthonormée de $\mathfrak{a}$. Pour montrer le lemme il suffit de montrer que cet opérateur n'a pas de valeurs propres de partie réelle positive. Un calcul montre que l'on a

$$E = \sum e_i^* \partial_{e_i} + \sum k_\alpha (1 - r_\alpha).$$

Par suite E opère sur les polynômes homogènes d'un type donné. On calcule alors l'action de E sur $\mathbb{C}[\mathfrak{a}]^n_\sigma$, elle est scalaire et vaut $n + \sum k_\alpha(1 - \chi(r_\alpha)/\chi(1))$ avec χ le caractère de la représentation σ.

Comme on a $r_\alpha^2 = 1$, on en déduit que $\chi(r_\alpha)$ est entier compris entre $[-\dim(\sigma), +\dim(\sigma)]$. Par conséquent on a $(1 - \chi(r_\alpha)/\chi(1)) \geq 0$ et rationnel, ce qui termine la démonstration du lemme.$\square$

En regroupant les reflexions r_α en fonction des classes de conjugaison (il y a au plus 2 classes), on peut écrire les valeurs propres de l'opérateur d'Euler sous la forme $n + k_1 m_1 + k_2 m_2$ avec m_1, m_2, n des entiers positifs. Ce qui montre que composantes irréductibles de K^{sing} sont des droites à cœfficients dans $\mathbb{N}$. En particulier le polynôme B se factorise en un produit fini de termes de la forme $n + k_1 m_1 + k_2 m_2$, et le polynôme b a des racines rationnelles strictement négatives. Par ailleurs on peut montrer ([2]) que le degré de ces polynômes est exactement $\sharp R^+$.

Nous arrivons au résultat central de cet exposé.

Théorème 2 *On a* $b(s) = \sharp G \prod_{i=1}^{i=r} \prod_{j=1}^{j=d_i-1} (d_i s + j)$ *avec* $d_1 \dots d_r$ *les degrés fondamentaux.*

S'il n'y a qu'une orbite dans R alors on a $B = b$, ce qui est le cas pour les systèmes A, B, E, H et $I(2p+1)$. Pour les autres systèmes i.e. F_4, B et $I(2p)$ on trouvera les formules dans [2]. On a par exemple pour $I(2p)$,

$$B(k_1, k_2) = 4p^2(2k_1 + 1)(2k_2 + 1) \prod_{j=1, j \neq p}^{j=2p-1} (p(k_1 + k_2) + j).$$

Remarque: Comme on a $\sharp G = d_1 \dots d_r$ on en déduit que l'on a $b(0) = d_1! \dots d_r! = \partial(\pi)(\pi)$. Pour expliquer la factorisation finale, il nous faut un renseigenement complémentaire lié

au polynôme de Poincaré.

Notons

$$P_G(q) = P(q_1, q_2) = \sum_{g\in G} q^{l(g)}$$

avec l =longueur de g où on compte séparément les reflexions de chaque orbites et où on a noté $q^{l(g)} = q_1^{l_1(g)} \cdot q_2^{l_2(g)}$. Dans [3] on trouve le liste des polynômes de Poincaré pour tous les groupes de Coxeter. S'il n'y a qu'une orbite ce polynôme coïncide avec le polynôme de Poincaré calssique i.e. on a $P_G = \prod_{i=1}^{i=r}(q^{d_i} - 1)/(q - 1)$. Par exemple on a dans le cas $I(2m)$

$$P_G(q_1, q_2) = (1 + q_1)(1 + q_2)(1 - (q_1q_2)^m)/(1 - (q_1q_2)).$$

Posons $K_+ = \{k$, les valeurs propres de l'opérateur E sont de parties réelles strictement positives sur les polynômes de degré positif strictement $\}$. Alors on a le résultat suivant

Théorème 3 *On a $K^{sing} = K_P \cap K_+^c$, avec $K_P = \{k, P(e^{2i\pi k}) = 0\}$ et K_+^c le complémentaire de K_+^c.*

Une fois établi ce résultat la méthode consiste à déterminer dans un premier temps l'ensemble

$$K^{sing} \cdot \mathbb{C}1_R$$

où . désigne l'intersection avec multiplicité. On trouve sans peine l'ensemble

$$\cup_{l\in\mathbb{N}, j=1\ldots d_i-1}\{-j/d_i - l\}$$

ce qui factorise b. Pour déterminer la constante on utilise des résultats de [4] sur l'intégrale de Métha, qui sera déterminée dans un prochain exposé.

Pour expliciter la factorisation de B, on determine à partir des formules données dans [3] les droites en corrdonnées (k_1, k_2) qui coupent la droite complexe $\mathbb{C}1_R$ dans l'intervalle $[-1, 0]$. On en trouve exactement le nombre cherché. à savoir $\sharp R^+$.

Sans rentrer dans les détails, donnons quelques explications sur le théorème ci-dessus. On constate tout d'abord que l'ensemble des multiplicités singulières est le lieu où la fonction $E(\lambda, k, x)$ n'est plus définie. Pour le voir formellement on peut utiliser la formule suivante

$$E(\lambda, k, x) = \sum p_i(\lambda)p_i^*(x)$$

où (p_i) est une base homogène de $\mathbb{C}[\mathfrak{a}]$ et (p_i^*) la base duale pour le produit scalaire $<, >_k$. La non dégénérescence de ce dernier est manifestement nécessaire pour définir $E(\lambda, k, x)$. D'un autre coté on utilise la méthode d'Opdam pour construire cette fonction. Il apparait que le lieu de singularité de la fonction $E(\lambda, k, x)$ ne dépend que de k. Puis en utilisant la représentation de la monodromie du système local de Bessel on montre que si k est singulier et dans $-K_+$ alors on a $k \in K_P$. Sommairement on utilise l'élément

$$\sum_{g \in G} (-q)^{-l(g)} T_g \in H(q)$$

avec $H(q)$ l'algèbre de Hecke et T_g la base standard. Pour $k \in -K_+$ on peut calculer la limite $\lim_{t \to 0} f(tx_o)$ pour f un élément du système local de Bessel de paramètre λ, k, et x_o un point dans la chambre de Weyl. Alors on sait que la monodromie du systìme de Bessel n'est pas uniquement une représentation du groupe de tresses (le π_1 de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ privé des hyperplans $\alpha = 0$), mais est une reprsésentation de l'algèbre de Hecke $H(q)$ avec $q = -e^{-2i\pi k}$. Il vient que l'élément $(\sum_{g \in G} (-q)^{-l(g)} T_g) \cdot f$ est proportionnel à la fonction de Bessel $J_G(\lambda, k)$, ce cœfficient se calculant pas passage à la limite. On trouve alors

$$(\sum_{g \in G} (-q)^{-l(g)} T_g) \cdot f = P_G(e^{2i\pi k})(\lim_{t \to 0} f(tx_o)) J_G(\lambda, k)$$

En définitive si k est singulier nécessairement on a $P_G(e^{2i\pi k}) = 0$, ce qui montre l'inclusion

$$K^{sing} \subset K_P \cap K_+^c \subset K_P \cap -K_+$$

L'inclusion inverse se montre par examen attentif de l'intersection avec $\mathbb{C}1_R$. Pour plus de détail voir [4]

Références

[1] C. Dunkl. Operators commuting with coxeter groups actions on polynomials. In Invariant Theory and Tableaux, pp. 107-117. (ed D. Stanton), Berlin Heildeberg New-York, Springer, 1990.

[2] C.Dunkl, E. Opdam, M. de Jeu: Singular polynomials for finite reflexion groups, preprint fev.1994, Leiden.

[3] I.G. Macdonald: The Poincaré series of a Coxeter group. Math. Ann. 199, 1972, p. 161-174.

[4] E. Opdam: Dunkl operators, Bessel functions and the discriminant of finite Coxeter group. Comp. Math. 85, 1993, p. 333-373.