Les opérateurs d'Heckman-Opdam.

Charles Torossian, d'après un article de G. Heckman
Exposé du 5 Janvier 1995.

1 Introduction-Rappels.

Cet exposé a pour but non seulement l'introduction au cas courbe, mais aussi de présenter l'approche dûe à Heckman-Opdam. **Cet exposé est tiré intégralement de** [**4**]. Le propos est l'analyse harmonique sur les espaces symétriques par une approche directe sur le sous-espace de Cartan. Le problème étant bien évidemment de trouver une méthode pour décrire les parties radiales des opérateurs différentiels invariants. En fait la méthode montre que l'on peut généraliser l'analyse au cas de multiplicités quelconques i.e. non nécessairement associées à des espaces symétriques. C'est dans cette optique qu'Opdam et Heckman ont introduit une famille d'opérateurs différentiels aux différences. A ce point de l'introduction, on peut dire, que ce travail a été généralisé par la suite par Cherednik, faisant suite aux travaux fondamentaux de Dunkl. On a vu que les opérateurs de Dunkl avaient la merveilleuse idée de commuter, ce n'est plus le cas des opérateurs introduits par Heckman-Opdam. C'est cette même commutativité que l'on retrouve pour les opérateurs de Cherednik, ce qui permet en fait de décrire sans trop de difficulté exactement les parties radiales, ce qui n'était pas le cas avec Heckman-Opdam.

2 Définitions et Résultats

Soit E un espace vectoriel euclidien, R un système de racines dans E. On note r_α les ŕflexions par rapport à la coracine $\alpha^\vee$ ie on a $r_\alpha(x) = x - \alpha(x)\alpha^\vee$. Comme à l'habitude P désigne le réseau des poids entiers, Q le réseau des racines. Notons $\mathbb{R}[P]$ l'algèbre du groupe P, notée exponentiellement, enfin W désigne le groupe de Weyl.
On notera $\Delta_\alpha = \frac{1+e^\alpha}{1-e^\alpha} \circ (1 - r_\alpha)$, alors cet opérateur agit sur $\mathbb{R}[P]$.
Pour $\xi \in E$ on note ∂_ξ les dérivées dans la direction de ξ. On se donne une fonction multiplicité k, ie une fonction $W-$invariante sur R à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Introduisons alors l'opérateur

$$D_\xi := \partial_\xi + 1/2 \sum_{\alpha \in R^+} k_\alpha (\alpha, \xi) \Delta_\alpha .$$

Les opérateurs D_ξ sont bien définis sur sur $\mathbb{R}[P]$ (on peut évidemment faire tout ceci sur $\mathbb{C}$). On a $D_{w\cdot\xi} = D_\xi$, car D_ξ est indépendant du choix du système positif choisi pour les racines.

Contrairement aux opérateurs de Dunkl ou de Cherednik les $D_\xi(k)$ ne forment pas une famille commutative. Il sera alors difficile de reconstituer l'homomorphisme d'Harish-Chandra à partir de cette famille, bien que du point de vue différentiel l'information soit la même que dans le cas des opérateurs de Cherednik.

Dèfinition 1 *Pour $f \in \mathbb{R}[P]$, $f = f_\lambda e^\lambda$ on note $\overline{f} = \sum f_\lambda e^{-\lambda}$ et $CT(f) = f_o$, le terme constant.*

Théorème 1 *Pour tout $\xi \in E$ l'oprateur D_ξ est autoadjoint pour le produit scalaire $(,)_k$.*

Preuve: Il s'agit d'un calcul direct voir [4]. □

Application; On note $P_+ = \{\lambda \in P, (\lambda, \alpha^\vee) \geq 0, \forall \alpha \in R^+\}$ ie l'ensemble des poids dominants.De même on note $Q_+ = \{\lambda \in Q, (\lambda, \mu) \geq 0, \forall \mu \in P_+\}$. Ceci permet de définir un ordre partiel sur P, en posant $\lambda \geq \mu \Longleftrightarrow \lambda - \mu \in Q_+$.

On pose $m(\lambda) = \sum_{\mu \in W\cdot\lambda} e^\mu$, alors bien évidemment c'est une base pour $\mathbb{R}[P]^W$.

Dèfinition 2 *Les polynônes de Jacobi $p(\lambda, k)$ sont définies par les conditions suivantes:*

$$p(\lambda) \in \mathbb{R}[P]^W$$

$$p(\lambda) = \sum_{\mu \leq \lambda, \mu \in P_+} c_{\lambda\mu} m(\mu), c_{\lambda,\lambda} = 1$$

$$(p(\lambda), m(\mu))_k = 0, \mu \in P_+, \mu < \lambda$$

L'existence d'une telle famille est claire; le cas $k = 0$ correspondant , lorsque R est réduit aux caractères de Weyl.

Dèfinition 3 *Un opérateur L de $\mathbb{R}[P]^W$ est dit triangulaire si on a*

$$L(m(\lambda)) = \sum_{\mu \leq \lambda, \mu \in P_+} a_{\lambda\mu} m(\mu)$$

Proposition 1 *Si L est triangulaire et autoadjoint alors $p(\lambda)$ est fonction propre pour L.*

Preuve: C'est clair vue l'unicité de la famille des polynômes de Jacobi.$\square$

Conclusion: Les opérateurs triangulaires et autoadjoints, forment une famille commutative, car diagonalisable dans une même base.

En fait les opérateurs D_ξ laissent stable l'espace vectoriel emgemdré par les e^μ pour $\mu \in C(\lambda) = Conv(W \cdot \lambda)$, par conséquent les opérateurs

$$D_{\xi,d} := \sum_{\eta \in W \cdot \xi} D_\eta^d$$

commutent les uns aux autres.
Remarque: Si $f \in \mathbb{R}[P]^W$ on a alors $[D_\xi, f] = [\partial_\xi, f] = \partial_\xi(f)$ et il est facile de voir alors que $Res(D_{\xi,d})$, la restriction à $\mathbb{R}[P]^W$ est un opérateur différentiel de l'algèbre $\mathbb{R}[P]^W$ d'ordre d et de premier terme celui de $Res(\sum \partial_\eta^d)$.

Dèfinition 4 *Posons*

$$Res(D_{\xi,d})p(\lambda) = \gamma(Res(D_{\xi,d}))(\lambda + \rho)p(\lambda)$$

avec $\rho = \rho(k) = 1/2 \sum_{\alpha \in R_+} k_\alpha \alpha$ qui est dans P_+ si la function multiplicité est intégrable.

Alors la fonction $\lambda \mapsto \gamma(ResD_{\xi,d})(\gamma + \rho)$ est la restriction d'une fonction polynomiale de partie homogène $\sum(\eta, \lambda)^d$.

Par exemple on a pour le Laplacien

$$\sum D_{\xi_i}^2 = \sum \partial_{\xi_i}^2 + \sum k_\alpha \frac{1 + e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} \partial_\alpha - \sum k_\alpha \frac{(\alpha, \alpha)}{e^\alpha - e^{-\alpha}} \Delta_\alpha + 1/4 \sum_{\alpha, \beta \in R_+} k_\alpha k_\beta (\alpha, \beta) \Delta_\alpha \Delta_\beta$$

D'où l'on tire que

$$Res(\sum D_{\xi_i}^2) = \sum \partial_{\xi_i}^2 + \sum k_\alpha \frac{1 + e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} \partial_\alpha$$

et

$$\gamma(Res(\sum D_{\xi_i}^2)) = (\lambda, \lambda) - (\rho, \rho).$$

Proposition 2 *On a $\gamma(ResD_{\xi,d}) \in \mathbb{R}[E]^W$.*

Théorème 2 *Pour $p \in \mathbb{R}[E]^W$ il existe $D_p(k) \in \mathbb{R}[k, z_i, \partial_{z_i}]$ tel que l'on ait*

$$D_p(k)p(\lambda, k) = p(\lambda + \rho(k))p(\lambda, k)$$

pour tout $\lambda \in P_+$.

Notons $\mathbf{D} = \{D_p(k), p \in \mathbb{R}[E]^W\}$, c'est du point de vue de espaces symétriques l'algèbre des parties radiales des opérateurs différentiels invariants. L'homomorphisme γ défini par $\gamma(D_p(k)) = p$ est l'homorphisme d'Harish-Chandra généralisé.

Remarque: Ici se situe la différence entre les opérateurs d'Opdam-Heckman et ceux de Cherednik, en effet l'homomorphisme γ s'explicite parfaitement a l'aide des opérateurs de Cherednik ([6], [7] pour des applications).

Corollaire 1 *Les polynômes de Jacobi sont deux à deux orthogonaux, lalgèbre* $\mathbf{D}$ *est la même que celle engendrée par les $Res(D_{\xi,d}$. En particulier les D_p sont autoadjoints pour le produit scalaire $(.,.)_k$.*

Preuve: Pour $\mu \neq \lambda$ il exite $p \in \mathbb{R}[E]^W$ tel que l'on ait $p(\lambda + \rho) \neq p(\mu + \rho)$, et par conséquent il existe $D \in \mathbf{D}$ tel que $\gamma(D)(\lambda + \rho) \neq \gamma(D)(\mu + \rho)$, les polynômes $p(\lambda, k)$ et $p(\mu, k)$ sont alors orthogonaux car vecteurs propres avec valeurs propres différentes pour un opérateur symétrique. □

Applications aux opérateurs de shift. Soit $S \subset R$ une $W-$orbite telle que $2S \cap R = \emptyset$. Posons $\Delta_S = \prod_{\alpha \in S}(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})$ qui est dans $\mathbb{R}[P]$ d'après la formule de Weyl. Par ailleurs si $f \in \mathbb{R}[P]$ se transforme sous W par le caractère ϵ_S alors f est divisible par Δ_S. (ce qui n'est plus le cas si on a $2S \cap R \neq \emptyset$). Les opérateurs d'Heckman-Opdam permettent d'écrire aisément les opérateurs de shift. Soit $r = Card(S_+)$ et posons

$$E_{S,\xi,r} = \sum_{w \in W} \epsilon_S(w) D^r_{w \cdot \xi}.$$

Alors on a $w \cdot E_{S,\xi,r} \cdot w^{-1} = \epsilon_S(w) E_{S,\xi,r}$ et donc l'opérateur

$$G_{\xi,S} = Res(\Delta_S^{-1} E_{S,\xi,r})$$

est bien défini sur $\mathbb{R}[P]^W$ et c'est clairement un opérateur différentiel (de $\mathbb{R}[k, z_i, \partial_{z_i}]$), de plus haut terme $\Delta_S^{-1} Res(\sum_{w \in W} \epsilon_S(w) \partial^r_{w \cdot \xi})$. Pour ξ régulier on a $G_{\xi,S} \neq 0$.

Théorème 3 *L'opérateur défini ci-dessus est un opérateur de shift, i.e. on a*

$$G_{\xi,S}(k)D_p(k) = D_p(k+1_S)G_{\xi,S}(k)$$

pour tout $D_p(k) \in \mathbf{D}(k)$.

Preuve: Pour $\lambda, \mu \in P_+$ on a

$$(G_{\xi,S}(k)p(\lambda,k), p(\mu,k+1_S))_{k+1_S} = (E_{S,\xi,r}(k)p(\lambda,k), \Delta_S p(\mu,k+1_S))_k =$$

$$(p(\lambda,k), E_{S,\xi,r}(k)(\Delta_S p(\mu,k+1_S))_k$$

On si $\mu < \lambda - \rho(1_S)$, alors $\mu + \rho(1_S) < \lambda$ et on en déduit que $G_{\xi,S}(k)p(\lambda,k)$ est un multiple de $p(\lambda - \rho(1_S, k+1_S)$. D'où l'on tire l'égalité recherchée. □

En ce qui concerne le shift pour les orbites S qui ne vérifient pas la condition ci-dessus, en combinant les opérateurs $G_{\xi,S}(k)$ on arrive à définir un shift pour ces orbites mais de longueur 2 (voir [4] pour plus de détails). Un problème subtil est alors de calculer le cœfficient qui apparait. On pourra consulter [5] [6] ou [2] pour ces questions.

Références

[1] I. Cherednik: A unification of KZ equations and Dunkl operators via affine Hecke algebras, Inventiones Math, 106 (1991), 411-432.

[2] I. Cherednik: The MacDonald constant term conjecture. International Math Research Notes, (6)1993,p. 165-177.

[3] I. Cherednik: Double affine Heck algebras and Macdonald's conjecture, annals of Math, 141 (1995), p.191-216.

[4] G. Heckman:An elementary approach to the hypergeometric shift operators of Opdam. Inv. Math. 103, 1991, p. 341-350.

[5] E. Opdam:Some applications of hypergeometric shift operators. Inv. Math. 98, 1987, p. 1-18.

[6] E. Opdam: Harmonic analysis for certain representations of graded Hecke algebras, preprint sept. 1993.

[7] C. Torossian: Une application des opérateurs de Cherednik à l'isomorphisme d'Harish-Chandra pour les espaces symétriques. CRAS, Paris 1995.