Conférences du CIMPA

Opérateurs différentiels invariants sur les groupes et les espaces symétriques

Monastir- Juillet 1996

CHARLES TOROSSIAN

Ces conférences étaient consacrées à la présentation de l'isomorphisme de Duflo en évitant la description des idéaux primitifs et à certains résultats concernant l'algèbre des opérateurs différentiels invariants sur les espaces homogènes et principalement sur les espaces symétriques. Ces conférences étaient destinées à un public de non spécialistes c'est pourquoi nous avons été amené à rappeler certaines notions élémentaires. Les résultats présentés sont bien connus dans le cas réductif et figurent dans tout livre sur les groupes et algèbres de Lie. Toutefois l'isomorphisme de Duflo est rarement présenté dans toute sa généralité et il faut se reporter aux articles originaux pour en découvrir une preuve, c'est pourquoi nous avons décidé de consacrer la première conférence à la présentation d'une preuve rapide en deux étapes. La première étape est de présentation originale, tant dis que la deuxième est celle que l'on trouve dans l'article [5]. La deuxième conférence était consacrée à l'énoncé d'une conjecture de Duflo concernant le centre de l'algèbre des opérateurs différentiels invariants sur un espace homogène. Nous avons cité certains résultats autour de cette conjecture, notamment ceux de [14]. Nous avons ensuite étudié plus précisément le cas des espaces symétriques et décrit nos propres résultats dans ce domaine.

Table des matières

1 L'isomorphisme de Duflo

1.1 Introduction

Soit G un groupe de Lie connexe, réel et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Cette dernière, comme on le sait, s'identifie naturellement à l'algèbre des champs de vecteurs invariants à gauche (ou à droite si on préfère). En effet pour $X \in \mathfrak{g}$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ on définit

$$D_X\varphi(g) = \frac{d}{d\epsilon}\varphi(g\exp(\epsilon X))|_{\epsilon=0}.$$

Ce champ est invariant à gauche i.e. on a $D_X\varphi(xg) = D_X{}^x\varphi(g)$ avec ${}^x\varphi(g) = \varphi(xg)$. L'application $X \in \mathfrak{g} \mapsto D_X$ s'étend à l'algèbre enveloppante car on a

$$D_X D_Y - D_Y D_X = D_{[X,Y]}$$

comme opérateurs différentiels. Donnons un exemple pour illustrer cette égalité.

Soit G le groupe de Heisenberg $G = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ & 1 & y \\ & & 1 \end{pmatrix}$. On a $\mathfrak{g} =< P, Q, R >$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$. On calcule facilement

$$D_Q\varphi(g) = \frac{d}{d\epsilon}\varphi(g\exp(\epsilon Q))|_{\epsilon=0} =$$

$$\frac{d}{d\epsilon}\varphi(\begin{pmatrix} 1 & x & z+\epsilon x \\ & 1 & y+\epsilon \\ & & 1 \end{pmatrix}) = (x\partial_z + \partial_y)\varphi(g)$$

De même on a $D_P = \partial_x$ et $D_R = \partial_z$. Si on calcule $[D_P, D_Q]$, on trouve $[\partial_x, x\partial_z + \partial_y] = \partial_z$. Par ailleurs on a $[P, Q] = R$, ce qui termine la vérification annoncée.

En fait tout opérateur différentiel invariant à gauche sur G est décrit par un élément du complexifié de l'algèbre enveloppante. L'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ n'est bien-sûr pas commutative (sauf si $\mathfrak{g}$ l'est elle même), ni graduée mais possède toutefois une filtration naturelle. Cette filtration provient de la graduation de l'algèbre tensorielle dont $U(\mathfrak{g})$ est un quotient, ou si l'on préfère cette filtration correspond à l'ordre comme opérateur différentiel sur G. On note $U(\mathfrak{g}) = \cup_{n=0}^{n=\infty} U(\mathfrak{g})_n$ la filtration et on définit l'algèbre graduée $grU(g) = \bigoplus_{n=0}^{n=\infty} U(\mathfrak{g})_n/U(\mathfrak{g})_{n-1}$. Un des premiers résultats fondamentaux est le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW).

Théorème 1 *L'algèbre* $\mathrm{gr}U(g)$ *est isomorphe à l'algèbre symétrique* $S[\mathfrak{g}]$.

On peut décrire exactement cet isomorphisme via la symétrisation β définie par

$$\beta(X_1 \cdots X_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} X_{\sigma(1)} \cdots X_{\sigma(n)}.$$

Alors β commute à l'action naturelle de $\mathfrak{g}$ dans $S[\mathfrak{g}]$ et dans $U(\mathfrak{g})$ respectivement.

Notons $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ les $\mathfrak{g}$-invariants dans $S[\mathfrak{g}]$. L'algèbre symétrique admet une structure de Poisson et $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ est exactement le centre de Poisson (on reviendra sur ce point dans la deuxième partie des ces notes). Les $\mathfrak{g}$-invariants dans l'algèbre enveloppante, notés $Z(\mathfrak{g})$ sont exactement les éléments centraux, i.e. les opérateurs différentiels bi-invariants sur G. Une conséquence immédiate de PBW est le corollaire suivant :

Corollaire 1 *La symétrisation est un isomorphisme d'espaces vectoriels de* $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ *sur* $Z(\mathfrak{g})$.

La question naturelle que l'on peut se poser est donc la suivante :
Q*uestion :* Les algèbres $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ est $Z(\mathfrak{g})$ sont-elles isomorphes comme algèbres ?

On va voir que la réponse est affirmative, c'est le théorème de Duflo. L'isomorphisme décrit dans [5] est vrai en toute généralité. Toutefois lorsque $\mathfrak{g}$ est semi-simple ce résultat est dû à Harish-Chandra [15] et lorsque $\mathfrak{g}$ est nilpotente il est dû à Dixmier [3] .

Avant de donner une preuve de l'isomorphisme de Duflo, différant légèrement de l'originale, nous allons donner quelques details concernant le cas semi-simple et le cas nilpotent.

1.2 Le cas réductif

Lorsque $\mathfrak{g}$ est réductive, Harish-Chandra a décrit un isomorphisme de $Z(\mathfrak{g})$ dans $S[\mathfrak{t}]^W$ où $\mathfrak{t}$ est une sous-algèbre de Cartan et W le groupe de Weyl. Cet isomorphisme est appelé isomorphisme d'Harish-Chandra. Je redonne, par commodité la définition de cet isomorphisme et les principaux résultats.

Sans perte de généralité on peut supposer que $\mathfrak{g}$ est simple sur $\mathbb{C}$. On sait d'après le théorème d'Hilbert que $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ est une algèbre de type fini, on verra que c'est même une algèbre de polynômes. Soit donc $\mathfrak{t}$ une sous-algèbre de Cartan, i.e. une sous-algèbre abélienne maximale formée d'éléments semi-simples. Notons Δ le système de racines de la décomposition de $\mathfrak{g}$ sous l'action adjointe de $\mathfrak{t}$. On a

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

avec $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}, [H, X] = \alpha(H)X, \forall H \in \mathfrak{t}\}$

En particulier si on a $\alpha \in \Delta$ alors $-\alpha \in \Delta$. Notons W le groupe de Weyl, i.e le groupe fini engendré par les réflexions associées aux racines. Choisissons un système de racines positives Δ^+, on a donc $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$ avec $\Delta^- = -\Delta^+$. Soit $\mathfrak{n}^+ = \oplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{n}^- = \oplus_{\alpha \in \Delta^-} \mathfrak{g}_\alpha$. On a la décomposition triangulaire $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}^+$, et par suite d'après PBW la décomposition

$$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}^-)U(\mathfrak{t})U(\mathfrak{n}^+).$$

Pour $u \in U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{t}}$ on a nécessairement $u \in \mathfrak{n}^+ \cdot U(\mathfrak{g}) \oplus U(\mathfrak{t})$. En effet on peut prendre pour base de $\mathfrak{g}$ une base adaptée à la décomposition en espaces propres, les monomes standards forment alors une base de vecteurs propres de $U(\mathfrak{g})$ sous l'action adjointe de $\mathfrak{t}$. Le résultat cité est alors immédiat. En particulier pour $u \in Z(\mathfrak{g})$, notons u_o l'unique élément de $U(\mathfrak{t})$ tel que l'on ait

$$u - u_o \in \mathfrak{n}^+ \cdot U(\mathfrak{g}).$$

Posons $\rho(H) = \frac{1}{2} \mathrm{tr}_{\mathfrak{n}^+} ad(H)$, alors l'application de "shift" $H \mapsto H + \rho(H)$ s'étend en un automorphisme de $U(\mathfrak{t})$ nommé décalage. Notons $\Gamma(u) = u_o^\rho$ où u_o^ρ désigne le décalage par ρ. Alors le théorème d'Harish-Chandra affirme :

Théorème 2 *(Harish-Chandra)*

L'application Γ est un homomorphisme d'algèbres de $Z(\mathfrak{g})$ dans $U(\mathfrak{t})$.

Il est indépendant du choix du système de racines positives, il est donc à valeurs dans $U(\mathfrak{t})^W$.

Il définit un isomorphisme (surjectif) de $Z(\mathfrak{g})$ sur $U(\mathfrak{t})^W$.

L'indépendance par rapport au choix de Δ^+ se montre par réduction au cas $sl(2)$, mais il existe d'autres démonstrations, l'injectivité et la surjectivité (difficile) résulte d'un théorème analogue dans le cas de l'algèbre symétrique. On écrit

$$S[\mathfrak{g}] = S[\mathfrak{t}] \oplus S[\mathfrak{g}] \cdot (\mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^-).$$

Les deux termes de la décomposition de droite sont W-invariants donc la projection sur $S[\mathfrak{t}]$ envoie $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ dans $S[\mathfrak{t}]^W$. On a le théorème de Chevalley.

Théorème 3 *(Chevalley)*

L'algèbre $S[\mathfrak{t}]^W$ est une algèbre de polynômes en r variable avec $r = rk(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{t})$.

La restriction (projection) définit une isomorphisme d'algèbres de $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ sur $S[\mathfrak{t}]^W$.

Résumons la situation par le diagramme suivant où les flèches sont des isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} Z(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\Gamma} & U(\mathfrak{t})^W \\ & & \downarrow \\ S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{Res} & S[\mathfrak{t}]^W \end{array}$$

Ainsi la structure d'algèbre de $Z(\mathfrak{g})$ est dévoilée par la structure des invariants de $U(\mathfrak{t})$ sous W. En suivant les trois flèches dans le diagramme on en déduit le résultat annoncé.

Théorème 4 *(Harish-Chandra)*
Le diagramme d'Harish-Chandra décrit un isomorphisme d'algèbres γ de $Z(\mathfrak{g})$ sur $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$.

On a donc partiellement répondu à la question dans le cas réductif. On verra qu'il existe une formule directe pour cet isomorphisme γ, formule qui est la même que dans le cas général.

Pour illustrer ce passage regardons le cas de $sl(2,\mathbb{C})$. Prenons pour base H, X, Y avec les relations $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$ et $[X, Y] = H$. Alors l'élément $\omega = H^2 + 2(XY + YX)$ est central dans $U(sl(2))$ et engendre le centre. Calculons $\Gamma(\omega)$. On a $\omega = H^2 - 2H + 4XY$, donc on a $\omega_o = H^2 - 2H$, puis $\omega_o^\rho = (H+1)^2 - 2(H+1) = H^2 - 1$, qui est bien $W = \{+1, -1\}$ invariant. Par ailleurs l'élément $\overline{\omega} = H^2 + 4XY \in S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ a pour restriction H^2, on en déduit que l'on a $\gamma(\omega) = \overline{\omega} - 1$.

1.3 Le cas nilpotent

Contrairement au cas semi-simple où on a exploité la structure de $\mathfrak{g}$ et des invariants sous l'action de W, on ne peut guère copier cette méthode dans le cas nilpotent. Dans [3] on donne un exemple d'algèbre de Lie nilpotente de dimension 45 telle que $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ n'est pas de type fini. Toutefois Dixmier montre par récurrence que la symétrisation est un isomorphisme d'algèbres de $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ sur $Z(\mathfrak{g})$. Ce résultat est bien-sûr à rapprocher de la description des idéaux primitifs de de $U(\mathfrak{g})$. On associe à tout orbite coadjointe Ω dans $\mathfrak{g}^*$ un idéal primitif I_Ω. Tout élément $u \in Z(\mathfrak{g})$ agira scalairement dans $U(\mathfrak{g})/I_\Omega$, notons $a_\Omega(u)$ ce scalaire. Alors les résultats de Dixmier affirment que l'application $f \in \mathfrak{g}^* \mapsto a_{G \cdot f}(u)$ est en fait polynomiale et G-invariante. Notons la $\gamma(u)$. Alors γ est un isomorphisme d'algèbres de $Z(\mathfrak{g})$ sur $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$. Par ailleurs on a pour $Q \in S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$, $\gamma(\beta(Q)) = Q$. On résume la situation par le théorème suivant.

Théorème 5 *(Dixmier)*

L'application de symétrisation β est un isomorphisme d'algèbres de $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ sur $Z(\mathfrak{g})$.

1.4 Le cas général

La réponse concernant le lien entre $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ et $Z(\mathfrak{g})$ est donné par le théorème de Duflo. Pour $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie sur un corps de caractéristique nulle, on note

$$J_{\mathfrak{g}}(X) = \det_{\mathfrak{g}}(\frac{1-\exp(-adX)}{adX}).$$

On note $J_{\mathfrak{g}}^{1/2}$ la série formelle racine carrée, avec comme premier terme 1. Cette série définit naturellement un opérateur différentiel d'ordre infini sur $S[\mathfrak{g}]$, on le notera $\partial_{J^{1/2}}$ ou $\partial_{J_{\mathfrak{g}}^{1/2}}$ si confusion il y a. On a le résultat suivant

Théorème 6 *(Duflo) [5]*

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique nulle. L'application de $S[\mathfrak{g}]$ sur $U(\mathfrak{g})$ définie par $Q \mapsto \beta(\partial_{J^{1/2}}Q)$ est un isomorphisme d'algèbres de $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ sur $Z(\mathfrak{g})$.

On retrouve le théorème de Dixmier pour $\mathfrak{g}$ nilpotente car dans ce cas on a $J = 1$. Dans le cas réductif, il n'est pas immédiat que le diagramme d'Harish-Chandra corresponde à l'isomorphisme ci-dessus, mais c'est effectivement le cas et démontré par Harish-Chandra.

Le théorème de Duflo est difficile et sa démonstration s'effectue en deux étapes.

1- Une étape d'algèbre, où on décrit un gros ensemble d'idéaux primitifs paramétrés par des éléments de $\mathfrak{g}^*$, ce qui permet d'associer à tout élément de $Z(\mathfrak{g})$ une fonction sur $\mathfrak{g}^*$. On montre alors que cette fonction est en fait une application polynomiale invariante. On a donc construit un morphisme d'algèbre γ de $Z(\mathfrak{g})$ dans $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$. En regardant le terme dominant, qui n'est autre que l'application naturelle gr, on déduit dans [4] que γ est un isomorphisme d'algèbres.

2- Une étape d'analyse dans [5] pour monter la formule du théorème.

A ma connaissance il n'existe pas de démonstration purement algébrique de cette formule. La partie 1 de la preuve est en fait difficile, mais il est possible de donner une preuve alternative. Dans Ginzburg [11], on montre que la même formule s'étend aux semi-invariants. Toutefois la preuve de [11] est difficile du fait d'un mélange d'analyse et de mathématiques formelles. La preuve que nous donnons redonnera les résultats de [11], et se fonde sur une observation de Michèle Vergne que j'ai apprise de Michel Duflo : il est possible de construire des caractères de l'algèbre $Z(\mathfrak{g})$ sans construire explicitement de modules simples (donc sans construire d'idéaux primitifs).

1.5 Une preuve de l'isomorphisme de Duflo

On commence par remarquer qu'il suffit, vue la formule finale, de montrer le théorème dans le cas où $\mathfrak{g}$ est algébrique sur $\mathbb{C}$, i.e. $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique affine sur $\mathbb{C}$. On étendra ensuite le résultat à toute les algèbres Lie sur $\mathbb{C}$ en prenant une représentation fidèle de $\mathfrak{g}$, et appliquant le théorème à l'enveloppe algébrique $\overline{\mathfrak{g}}$. Le résultat sera une conséquence des observations suivantes : on a $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}} = S[\mathfrak{g}]^{\overline{\mathfrak{g}}}$ et pour $Q \in S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ on a

$$\beta(\partial_{J_{\mathfrak{g}}^{1/2}} Q) = \beta(\partial_{J_{\overline{\mathfrak{g}}}^{1/2}} Q).$$

On déduira le théorème pour tous les corps de caractéristique nulle par le principe de Lefschetz.

1.5.1 Construction de caractères de manière élémentaire

On suppose désormais que $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique affine G de dimension finie sur $\mathbb{C}$. A tout élément $f \in \mathfrak{g}^*$ on associe la forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{g}$ définie par $B_f(x, y) = f[x, y]$. Le noyau de B_f est exactement $\mathfrak{g}(f)$ l'algèbre de Lie de $G(f)$, stabilisateur de f dans G pour l'action coadjointe. Une propriété remarquable est que pour f générique $\mathfrak{g}(f)$ est commutative [8]. En effet il existe un ouvert de Zariski non vide de $\mathfrak{g}^*$ qui admet un quotient par G au sens de la géométrie algébrique. Les différentielles des fonctions rationnelles G-invariantes définies en f engendrent une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{g}(f)$. Pour f générique on a évidemment l'égalité.

En outre on montre par récurrence que l'on peut construire pour f générique des polarisations $\mathfrak{b}$ en f [4]. Je n'insisterai pas sur ce que signifie générique (voir [4]). On rappelle qu'une polarisation est une sous-algèbre qui est un sous-espace isotrope maximal pour B_f. Le noyau $\mathfrak{g}(f)$ est évidemment inclus dans $\mathfrak{b}$. Comme $\mathfrak{b}$ est isotrope maximale c'est aussi une sous-algèbre algébrique, car l'enveloppe algébrique de $\mathfrak{b}$ vérifie alors la même propriété. On peut montrer [4] qu'on peut construire toujours pour f générique des polarisations vérifiant la condition de Pukanszky, i.e. on a $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}(f) + \mathfrak{b}^u$ où $\mathfrak{b}^u$ désigne le radical unipotent de $\mathfrak{b}$. Notons B le groupe algébrique connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$, et B^u son radical unipotent. On alors sous l'action coadjointe on a

$$B \cdot f = B^u \cdot f = f + \mathfrak{b}^{\perp}.$$

Pour le voir il suffit de constater que $B^u \cdot f$ est fermé dans $\mathfrak{b}^\perp$ car B^u est unipotent, mais aussi ouvert car $\mathfrak{b}$ est une polarisation, i.e. on a $\mathfrak{b}^u \cdot f = \mathfrak{b} \cdot f = \mathfrak{b}^f = \mathfrak{b}^\perp$ (on a noté $\mathfrak{b}^f$ l'orthogonalité pour le forme B_f).

Notons que l'on a pour de telles polarisations l'inclusion $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{b}^u \cap \ker f$ car $f[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = 0$ et $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = [\mathfrak{g}(f) + \mathfrak{b}^u, \mathfrak{g}(f) + \mathfrak{b}^u] \subset \mathfrak{b}^u$ car $\mathfrak{g}(f)$ est abélienne. En particulier $\mathfrak{b}$ est résoluble.

On va démontrer directement la proposition suivante.

Proposition 1 *Soit $f \in \mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{b}$ une polarisation quelconque en f alors on a pour $u \in Z(\mathfrak{g})$, $u \in U(\mathfrak{g}).[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] + U(\mathfrak{b})$.*

Preuve : Notons B le groupe algébrique connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$. Soit $u \in Z(\mathfrak{g})$, alors u est aussi un élément de l'algèbre $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}])^{\mathfrak{b}}$. Or cette dernière est naturellement filtrée et son gradué associé s'injecte dans $(S[\mathfrak{g}]/S[\mathfrak{g}] \cdot [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}])^{\mathfrak{b}}$. Je dis que cette algèbre d'invariants vaut exactement $S[\mathfrak{b}/[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]]$. Il s'agit en effet d'une algèbre fonctions polynomiales B-invariante sur $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]^\perp$. Pour $\phi \in [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]^\perp$, on a alors $B \cdot \phi \subset \phi + \mathfrak{b}^\perp$. Or l'orbite $B \cdot f$ est ouverte dans $f + \mathfrak{b}^\perp$, il en résulte que pour ϕ générique $B \cdot \phi$ est ouverte dans $\phi + \mathfrak{b}^\perp$. Ainsi toute fonction polynomiale est constante sur les espaces affines $\phi + \mathfrak{b}^\perp$, ce sont donc des éléments de $S[\mathfrak{b}/[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]]$. L'inclusion inverse est claire car tout élément de $\mathfrak{b}/[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ définit une fonction polynomiale $\mathfrak{b}$-invariante. Maintenant l'algèbre $U(\mathfrak{b}/[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}])$ s'identifie à une sous-algèbre de $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}])^{\mathfrak{b}}$, et à pour gradué associé l'algèbre $S[\mathfrak{b}/[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]]$, il en résulte l'égalité annoncée

$$(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}])^{\mathfrak{b}} = U(\mathfrak{b}/[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]).$$

Remarques :

i- Si la polarisation $\mathfrak{b}$ vérifie la condition de Pukanszky, alors le même raisonnement prouve que l'on a

$$(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}])^{\mathfrak{b}^u} = U(\mathfrak{b}/[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]).$$

En particulier si u est un semi-invariant dans $U(\mathfrak{g})$, pour un caractère algébrique disons λ, alors $\lambda(\mathfrak{b}^u) = 0$ et on aura encore $u \in U(\mathfrak{g}) \cdot [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] + U(\mathfrak{b})$.

ii- Un lemme de dualité [6] montre alors que l'on aura aussi, pour $u \in Z(\mathfrak{g})$

$$u \in [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]^{-r} U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{b})$$

avec r le caractère de $\mathfrak{b}$ défini par $r(X) = \mathrm{tr}_{\mathfrak{b}}(adX)$.

Notons $u_{\mathfrak{b}}$ l'unique élément de $U(\mathfrak{b})/U(\mathfrak{b}) \cdot [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ tel que l'on ait $u - u_{\mathfrak{b}} \in U(\mathfrak{g}) \cdot [b, b]$. Alors posons

$$\gamma_{\mathfrak{b}}(u) = u_{\mathfrak{b}}^{\frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}}$$

où on a encore utilisé le décalage par $\frac{1}{2}tr_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}$, alors $\gamma_{\mathfrak{b}}$ est un homomorphisme d'algèbres à valeurs dans une algèbre de polynômes. Quitte à prendre des caractères de $U(\mathfrak{b})/U(\mathfrak{b})\cdot[\mathfrak{b},\mathfrak{b}] = S[\mathfrak{b}/[\mathfrak{b},\mathfrak{b}]]$, on a construit ainsi pour toute polarisation des caractères de l'algèbre $Z(\mathfrak{g})$.

1.5.2 Indépendance du caractère par rapport à la polarisation

Il est possible de montrer par des méthodes similaires à [20] ch.3, que les caractères construits pour f générique sont indépendants du choix de la polarisation.

En effet pour $f \in \mathfrak{g}^*$ générique, $\mathfrak{g}(f)$ est abélien et on note $\mathfrak{t}_f$ son tore maximal (appelé sous-algèbre de Cartan-Duflo). On peut supposer sans perte de généralité que l'on a $f|\mathfrak{g}(f) \neq 0$, car cette condition est ouverte parmi les éléments réguliers. Il s'agit de montrer que si $\mathfrak{b}_1$ et $\mathfrak{b}_2$ sont deux polarisations avec $\mathfrak{b}_1$ vérifiant la condition de Pukanszky et $\mathfrak{b}_2$ quelconque alors on a pour tout $\phi \in ([\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_1]+[\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_2])^\perp$

$$\gamma_{\mathfrak{b}_1}(u)(\phi) = \gamma_{\mathfrak{b}_2}(u)(\phi).$$

La méthode est la même que dans [20] ch.3. Par commodité pour le lecteur on va expliquer comment on procède pour appliquer les résultats de la référence.

Considérons le groupe G comme un espace symétrique (voir la deuxième partie des ces notes pour des précisions concernant les espaces symétriques), i.e. on pose $G_1 = G \times G$ avec l'involution naturelle $\sigma(x,y) = (y,x)$. Soit $K = G_1^\sigma$ le sous-groupe connexe des points fixes c'est à dire la diagonale, et posons $B = B_1 \times B_2$ avec B_1 et B_2 les sous-groupes algébriques connexes correspondants à $\mathfrak{b}_1$ et $\mathfrak{b}_2$ respectivement. Soit $\tilde{\phi} \in ([\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_1]+[\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_2])^\perp$, on pose $\phi = 2\Re\tilde{\phi}$ deux fois la partie réelle. On considère nos groupes comme des groupes de Lie réels. Alors $(i\phi,-i\phi)$ n'est pas toujours la différentielle d'un caractère continu non trivial χ de B, le problème étant posé par l'intégrabilité du caractère sur le tore $\mathfrak{t}_f$ pour $\mathfrak{b}_1$ et sur le centre de la partie réductive pour $\mathfrak{b}_2$. Toutefois il est facile de voir que les formes linéaires $\tilde{\phi}$ pour lesquelles c'est le cas forment un ensemble Zariski-dense, de plus on peut même supposer que $\mathfrak{b}_1$ et $\mathfrak{b}_2$ sont des polarisations pour $\tilde{\phi}$.

On considère B_o le sous-groupe fermé de B de codimension 1 correspondant au noyau du caractère χ. Alors la distribution T sur le fibré des demi-densités de G_1/K donnée par

$$T(\varphi) = \int_{B_o/B_o\cap K} \varphi(x)\Delta_{G_1,B}^{-1/2} d_{B_o,B_o\cap K}(x)$$

est bien définie pour φ à support convenable compact modulo K et vérifiant $\varphi(xk) = \Delta_{G_1,K}^{1/2}(k)\varphi(x)$. On rappelle que l'on a posé $\Delta_{G_1,K}(k) = det_{\mathfrak{g}_1/\mathfrak{k}}(Adk)$. Le caractère dans l'intégrale assure que $\varphi(x)\Delta_{G_1,B}^{-1/2}(x)d_{B_o,K}(x)$ est bien une densité sur $B_o/B_o \cap K$ à support compact, car $\mathfrak{b}_1$ vérifie la condition de Pukanszky ce qui assure l'égalité pour $x \in B_1 \cap B_2$, $\Delta_{G_1,B}^{-1/2}(x)\Delta_{G_1,K}^{1/2}(x) = \Delta_{B,B\cap K}(x)$.

Remarquons qu'on n'a pas besoin que $B/B\cap K$ soit fermé dans G_1/K, car on étudie des distributions. Le fait que $B/B\cap K$ soit localement fermé assure qu'il en est de même pour $B_o/B_o \cap K$, et cela suffit pour nos considérations.

Les distributions supportées par $B_o/B_o\cap K$, et B_o-semi-invariantes forment un espace filtré par l'ordre du symbôle transverse principal. Vue l'invariance supposée, ce symbôle est alors déterminé par sa valeur en un point de $B_o/B_o\cap K$. C'est donc une fonction polynomiale sur $(\mathfrak{k} + \mathfrak{b}_o)^\perp$, qui est $B_o \cap K = B_1 \cap B_2$-invariante. Or de telle fonction polynomiale sont alors décrite par des éléments de $S[\mathfrak{b}/\mathfrak{b}_o]$, une récurrence rapide, montre que toutes ces distributions sont des dérivées transverses de la "mesure" $d_{B_o,K}$ en une seule direction donnée par $\mathfrak{b}/\mathfrak{b}_o$.

On considère $\mathfrak{g}$ comme une sous-algèbre complexe de $\mathfrak{g}_{I\!R}\otimes\mathbb{C}$, via l'injection classique $X \mapsto \frac{1}{2}(X \otimes 1 - iX \otimes i)$. Maintenant on peut faire agir $u \in Z(\mathfrak{g})$, que l'on identifie à un élément de $Z(\mathfrak{g}_{I\!R}) \otimes \mathbb{C}$, sur la première ou deuxième variable dans G_1. On note L_X le champ de vecteurs donné par $(L_X\varphi)(x) = \frac{d}{d\epsilon}\varphi(\exp(-\epsilon X)x)|_{\epsilon=0}$.

Alors la distribution $L_u^1 T$, action sur la première variable, vaut aussi $L_{u^*}^2 T$ avec $u^* = (u^\vee)^{-\frac{1}{2}tr_{\mathfrak{g}}ad}$ où $\vee$ désigne l'anti-automorphisme principal dans $U(\mathfrak{g})$. Écrivons $\mathfrak{b}_1 = I\!RX_1 + \mathfrak{b}_1 \cap ker\phi$, et de même $\mathfrak{b}_1 = I\!RX_2 + \mathfrak{b}_2 \cap ker\phi$, avec $\phi(X_1) = \phi(X_2)$. Alors il existe un polynôme en X_1 tel que l'on ait

$$u - p_1(X_1) \in (U(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}) \cdot (\mathfrak{b}_1 \cap ker\phi)^{-\frac{1}{2}tr_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_1}}.$$

La distribution $L_u^1 T$ vaut alors $L_{p_1(X_1)}T$, et de manière similaire on aura $L_u^2 T = L_{p_2(X_1)}T$. Comme on a

$$(L_{X_1}^1 - \frac{1}{2}tr_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_1}(adX_1))T = (L_{X_2}^2 - \frac{1}{2}tr_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_2}(adX_{2)})T$$

on déduit l'égalité cherchée en remarquant que l'on a

$$\gamma_{\mathfrak{b}_1}(u)(\tilde{\phi}) = p_{\mathfrak{b}_1}^{\frac{1}{2}tr_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_1}}(\phi)$$

et en utilisant d'une part que $tr_{\mathfrak{g}}(adX) = 0$ pour $X \in \mathfrak{b}_1$ car $\mathfrak{b}_1$ vérifie la condition de Pukanszky et d'autre part le lemme de dualité déjà énoncé pour établir l'‘égalité

$$u^* - p_{\mathfrak{b}_1}(X_1)^\vee \in U(g) \cdot (\mathfrak{b}_1 \cap ker\phi)^{-\frac{1}{2}tr_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_1}}$$

$\square$

En particulier on conclut que le caractère de $Z(\mathfrak{g})$ définit pour f générique par

$$u \mapsto \gamma_{\mathfrak{b}}(u)(f)$$

ne dépend pas du choix de f dans $\Omega = G \cdot f$, on le note $\gamma(u)(\Omega)$.

Remarque : A ce stade il est facile de voir que $\gamma(u)$ est en fait une fonction polynomiale G-invariante sur $\mathfrak{g}^*$. En effet on utilise un argument dû à N. Conze. Considérons la sous-variété fermée W de $\mathfrak{g}^* \times Gr(d, \mathfrak{g})$ avec d la dimension des polarisations génériques, et définie par :

$i-$ $\mathfrak{b}$ sous-algèbre de dimension d

$ii-$ $f([\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]) = 0$

$iii-$ $u \in \mathbb{C} \oplus U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{b}^{-f-\frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}}$ pour tout $u \in Z(\mathfrak{g})$.

Alors π la projection sur la première variable est un morphisme projectif, donc $\pi_*\mathcal{O}_W$ est cohérent comme $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}^*}$ module. Par ailleurs la projection sur $\mathbb{C}$ dans le iii définit un élément de $\mathcal{O}_W$. On vient de montrer que pour f générique cet élément ne dépend pas de $\mathfrak{b}$ et vaut $\gamma(u)(f)$, c'est donc un élément de $\pi_*\mathcal{O}_W$ qui est une fonction rationnelle sur les éléments génériques i.e. une fraction rationnelle sur $\mathfrak{g}^*$. Mais $\mathfrak{g}^*$ est normale donc c'est un polynôme.

1.5.3 Calcul du caractère par la méthode de M. Duflo

Les arguments des deux précédentes sections, remplacent les arguments sur les idéaux primitifs. La suite est alors identique à [5] dont nous reproduisons la démonstration. Là encore on est amené à considérer la structure réelle sous-jacente des nos groupes. On considère toujours $f \in \mathfrak{g}^*$ générique, $\mathfrak{b}$ une polarisation vérifiant la condition de Pukanszky et notons $\chi_f(expX) = exp(-if_1(X))$, avec $f_1 = 2\Re f$ deux fois la partie réelle de f. On n'insistera pas sur ce passage au réel, le lecteur pourra se convaincre des détails dans [5]. Alors χ_f est caractère local du groupe B, c'est à dire tant que X reste dans un voisinage $\mathcal{W}$ qui G-invariant de $\mathfrak{g}$ bien choisi (par exemple, on peut imposer que les valeurs propres de X sont de partie imaginaire dans l'intervalle $]-i\pi, i\pi[$). Les résultats précédents assurent que la distribution sur $exp(\mathcal{W})$

$$\varphi \mapsto \int_B \varphi(b)\chi_f(b)\Delta_{G,B}^{-1/2} db$$

est propre sous l'action de $Z(\mathfrak{g})$. Le caractère vaut exactement $\gamma_{\mathfrak{b}}(u)(if) = \gamma(u)(iG \cdot f)$. En coordonnées exponentielles on aura

$$\int_B \varphi(b)\chi_f(b)\Delta_{G,B}^{-1/2}db = \int_{\mathfrak{b}} \varphi(expX)e^{-if_1(X)}e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}adX}\det_{\mathfrak{b}}(\frac{1-e^{-adX}}{adX})dX$$

où on a introduit la différentielle de l'application exponentielle.

Or on a le lemme suivant :

Lemme 1 *Pour f générique on peut choisir $\mathfrak{b}$, vérifiant la condition de Pukanszky et telle que pour $X \in \mathfrak{b}$, on ait $J_{\mathfrak{g}}^{1/2}(X) = e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}adX}\det_{\mathfrak{b}}(\frac{1-e^{-adX}}{adX})$.*

Notre distribution s'écrit aussi dans le voisinage $\mathcal{W}$

$$\int_{f_1+\mathfrak{b}^\perp} \widehat{\overbrace{J_{\mathfrak{g}}^{1/2}\varphi \circ \exp}}(\xi)d\xi$$

avec $d\xi$ une mesure de Lebesgue sur la fibre $f_1 + \mathfrak{b}^\perp$ et$\widehat{\ }$désigne la transformée de Fourier euclidienne. Étant donné que le caractère ne change pas quand f parcourt l'orbite $\Omega = G \cdot f_1$ que l'on peut sans perte de généralité supposée tempérée, il n'est pas difficile de voir que la distribution

$$T_\Omega(\varphi) = \int_\Omega \widehat{\overbrace{J_{\mathfrak{g}}^{1/2}\varphi \circ \exp}}(\xi)d\lambda_\Omega(\xi)$$

est aussi une distribution propre sous l'action de $u \in Z(\mathfrak{g})$ avec même caractère ($d\lambda_\Omega(\xi)$ désigne une mesure positive obtenue par désintégration de la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}^*$). On a

$$\int_{\mathfrak{g}^*/G} T_\Omega(\varphi)d\mu(\Omega) = \int_{\mathfrak{g}^*} \widehat{\overbrace{J_{\mathfrak{g}}^{1/2}\varphi \circ \exp}}(\xi)d\xi = \varphi(\exp 0)$$

Maintenant écrivons $u = \beta(Q)$ avec $Q = \partial(J^{1/2})P$ on aura

$$R_u\varphi(\exp 0) = Q(\partial)(\varphi \circ \exp)(0) = P(\partial)(J_{\mathfrak{g}}^{1/2}\varphi \circ \exp)(0) =$$

$$\int_{\mathfrak{g}^*} \widehat{\overbrace{P(\partial)(J_{\mathfrak{g}}^{1/2}\varphi \circ \exp)}}(\xi)d\xi = \int_{\mathfrak{g}^*/G} P(i\Omega)d\mu(\Omega) \int_\Omega \widehat{\overbrace{J_{\mathfrak{g}}^{1/2}\varphi \circ \exp}}(\xi)d\lambda_\Omega(\xi) =$$

$$\int_{\mathfrak{g}^*/G} T_\Omega(R_u(\varphi))d\mu(\Omega) = \int_{\mathfrak{g}^*/G} \gamma(u)(i\Omega)T_\Omega(\varphi)d\mu(\Omega)$$

d'où presque partout on a $\gamma(u)(\Omega) = P(\Omega)$, ce qui achève la démonstration du théorème de Duflo. En fait il n'est pas difficile de montrer, par les mêmes méthodes, que si u est un semi-invariant algébrique, alors le caractère que l'on a associé se calcule de la même façon, en définitive on aura le théorème suivant

Théorème 7 *[18], [11]*

L'application $Q \mapsto \beta(\partial_{J^{1/2}} Q)$ *est un isomorphisme d'algèbres des semi-invariants algébriques de* $S[\mathfrak{g}]$ *dans ceux de* $U(\mathfrak{g})$*.*

2 Opérateurs différentiels invariants sur les espaces homogènes

Soit G un groupe de Lie connexe (réel) et H un sous-groupe de Lie fermé connexe. Fixons un caractère λ de H et notons δ le caractère défini par $\delta(h) = (\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} Adh)^{1/2}$. En général on notera par le même lettre un caractère et sa différentielle à l'origine. On a donc $\delta(X) = \frac{1}{2} tr_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} adX$ pour $X \in \mathfrak{h}$. Considérons $\mathcal{L}_{\lambda-\delta}$ le fibré en droite défini par le caractère $\lambda - \delta$, i.e. les sections de ce fibré s'identifient naturellement à des fonctions sur G telles que $\varphi(gh) = \varphi(g)\delta(h)\lambda(h)^{-1}$. Évidemment le groupe G agit à gauche sur les sections de $\mathcal{L}_{\lambda-\delta}$. La question naturelle qu'on peut se poser est donc

Question : Quelle est la nature de l'algèbre des opérateurs différentiels invariants sur les sections de $\mathcal{L}_{\lambda-\delta}$. On notera $\mathcal{D}_\lambda$ cette algèbre et $\Gamma(\mathcal{L}_{\lambda-\delta})$ l'espace des sections régulières.

2.1 Description algébrique

Le premier résultat est de décrire de manière algébrique $\mathcal{D}_\lambda$. La réponse est donnée par un résultat de Koornwinder [13].

Proposition 2 *(Koornwinder)*

L'algèbre $\mathcal{D}_\lambda$ *est isomorphe à l'algèbre* $(U(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{h}^{\lambda-\delta})^{\mathfrak{h}}$*, où on a noté* $\mathfrak{h}^{\lambda-\delta} = \{H + \lambda(H) - \delta(H)\}$*.*

Donnons quelques mots d'explication. Soit $u \in (U(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{h}^{\lambda-\delta})^{\mathfrak{h}}$ et notons D_u l'opérateur différentiel sur $\Gamma(\mathcal{L}_{\lambda-\delta})$ donné par la formule pour $\varphi \in \Gamma(\mathcal{L}_{\lambda-\delta})$

$$(D_u\varphi)(g) = (R_u\varphi)(g)$$

où comme au début R_X désigne le champ de vecteurs sur G invariant à gauche. On vérifie sans peine que l'on décrit ainsi tous les opérateurs différentiels invariants sur $\Gamma(\mathcal{L}_{\lambda-\delta})$, en regardant par exemple l'écriture locale à l'origine.

Je suppose maintenant que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps de caractéristique nulle et λ un caractère de $\mathfrak{h}$. L'algèbre $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{h}^{\lambda-\delta})^{\mathfrak{h}}$ est naturellement filtrée. Mais il n'est pas toujours évident de calculer le gradué associé. On a le lemme suivant

Lemme 2 *On a une injection de* $gr(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{h}^{\lambda-\delta})^{\mathfrak{h}}$ *dans* $(S[\mathfrak{g}]/S[\mathfrak{g}]\cdot\mathfrak{h})^{\mathfrak{h}}$.

En général on aura qu'une injection, contrairement au cas des groupes, car il n'existe pas d'application naturelle de $(S[\mathfrak{g}]/S[\mathfrak{g}]\cdot\mathfrak{h})^{\mathfrak{h}}$ dans $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{h}^{\lambda-\delta})^{\mathfrak{h}}$.

Supposons que $\mathfrak{h}$ admette un supplémentaire stable par $\mathfrak{h}$, on dira que la paire $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ est réductive (ce qui peut prêter à confusion puisqu'on ne suppose absolument pas que $\mathfrak{g}$ est réductive). Écrivons $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{q}$ avec $\mathfrak{q}$ un supplémentaire stable par $\mathfrak{h}$. Alors dans ce cas, on pourra écrire

$$U(\mathfrak{g})=U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{h}^{\lambda-\delta}\oplus\beta(S[\mathfrak{q}])$$

Notons $\dot{\beta}$ l'application naturelle de $S[\mathfrak{q}]$ sur $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{h}^{\lambda-\delta}$. Alors $\dot{\beta}$, que l'on appelle encore application de symétrisation, commute à l'action adjointe de $\mathfrak{h}$, on en déduit la proposition suivante :

Proposition 3 *Si* $\mathfrak{h}$ *admet un supplémentaire* $\mathfrak{q}$ *stable par* $\mathfrak{h}$*, alors la symétrisation* $\dot{\beta}$ *est un isomorphisme d'espaces vectoriels de* $S[\mathfrak{q}]^{\mathfrak{h}}$ *dans* $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{h}^{\lambda-\delta})^{\mathfrak{h}}$.

Remarques :

i- Si $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ est une paire réductive, au sens ci-dessus, alors on a l'égalité

$$U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}/U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}\cap U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{h}^{\lambda-\delta}=(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{h}^{\lambda-\delta})^{\mathfrak{h}}$$

alors qu'en général on ne dispose que d'une injection du premier membre dans le second comme le montre l'exemple simple suivant. On prend $\mathfrak{g}=sl(2)$ avec la base classique H,X,Y avec $\mathfrak{h}=\mathbb{C}X$, $\lambda=0$ et on pose pour simplifier $U=U(sl(2))$, alors on a $(U/U\cdot X)^X=S[X]$ mais $U^X/U^X\cap U\cdot X$ est isomorphe a $S[X^2]$.

ii- L'existence d'un supplémentaire stable par $\mathfrak{h}$ n'est pas nécessaire pour avoir l'égalité $gr(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{h}^{\lambda-\delta})^{\mathfrak{h}}=(S[\mathfrak{g}]/S[\mathfrak{g}]\cdot\mathfrak{h})^{\mathfrak{h}}$ comme le montre justement l'exemple ci-dessus.

2.1.1 Une conjecture de Duflo

L'idée générale est qu'il doit quand même exister un lien entre $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{h}^{\lambda-\delta})^{\mathfrak{h}}$ et $(S[\mathfrak{g}]/S[\mathfrak{g}]\cdot\mathfrak{h})^{\mathfrak{h}}$. Voici une conjecture plus précise.

Conjecture :*(Duflo) [7]*

Le centre de l'algèbre $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{h}^{\lambda-\delta})^{\mathfrak{h}}$ *est isomorphe au centre pour la structure de Poisson de* $(S[\mathfrak{g}]/S[\mathfrak{g}]\cdot\mathfrak{h}^{\lambda})^{\mathfrak{h}}$.

La structure de Poisson $(S[\mathfrak{g}]/S[\mathfrak{g}]\cdot\mathfrak{h}^{\lambda})^{\mathfrak{h}}$ provient bien-sûr de la structure de Poisson sur $S[\mathfrak{g}]$. Cette conjecture est évidemment loin d'être résolue. Il n'est pas exclu qu'il faille y apporter quelques modifications concernant le caractère, par exemple λ générique. En particulier ces algèbres devraient être commutatives simultanément, ce point précis n'est pas non plus résolu. Il est facile de voir lorsque, par exemple G et H sont algébriques sur $\mathbb{C}$, que si les H orbites génériques dans $\mathfrak{h}_\lambda^\perp = \{f \in \mathfrak{g}^*, f|_\mathfrak{h} = -\lambda\}$ sont lagrangiennes, alors l'algèbre $(S[\mathfrak{g}]/S[\mathfrak{g}] \cdot \mathfrak{h}^\lambda)^\mathfrak{h}$ est commutative (remarquons que l'hypothèse sur les orbites est équivalent au fait que les fractions rationnelles sur $\mathfrak{h}_\lambda^\perp$ forment une algèbre de Poisson commutative). Dans le même état d'esprit citons ici, lorsque G est nilpotent sur $\mathbb{R}$ ce que certaines personnes appellent la conjecture de Corwin-Greenleaf et qui relie la commutativité de cette algèbre d'opérateurs différentiels au fait que la représentation quasi-régulière tordue $Ind_H^G(\lambda)$ ait des multiplicités finies (voir [2] ou [9] pour des références).

Quand G et H sont réductifs sur $\mathbb{C}$ et $\lambda = 0$ (l'espace homogène $X = G/H$ est alors affine), F. Knop [14] montre dans ce cas que la conjecture de Duflo est effectivement vraie. Plus précisément F. Knop construit un diagramme d'Harish-Chandra et montre que le centre de l'algèbre des opérateurs G-invariants sur G/H est une algèbre de polynômes décrite comme les invariants par un petit groupe de Weyl dans une algèbre symétrique $S[\mathfrak{t}_X]$ avec $\mathfrak{t}_X$ un sous-espace affine de $\mathfrak{t}$ sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.

On peut aussi citer l'exemple classique suivant. On prend G réductif sur $\mathbb{C}$ et $H = U$ le radical unipotent d'un Borel. On note ici $\mathfrak{t}$ une sous-algèbre de Cartan. Alors on a $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{h})^\mathfrak{h} = S[\mathfrak{t}] = (S[\mathfrak{g}]/S[\mathfrak{g}] \cdot \mathfrak{h})^\mathfrak{h}$. Ces algèbres sont alors commutatives. L'espace G/U n'est pas affine en général (il est quasi-affine).

2.2 Le cas des espaces symétriques

Soit G un groupe de Lie connexe (réel) et σ une involution de G i.e. on a $\sigma \circ \sigma = 1$ et $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$. On note G^σ le sous-groupe fermé des points fixes, et $(G^\sigma)_o$ la composante connexe (ou irréductible si on est dans le cadre algébrique) contenant l'origine. Soit K un sous-groupe tel que $(G^\sigma)_o \subset K \subset G^\sigma$. L'espace G/K est appelé espace symétrique.

Exemples :

1- Soit $G = G_1 \times G_1$ avec G_1 un groupe de Lie. Posons $\sigma(x, y) = (y, x)$ alors G/G^σ s'identifie naturellement à G_1 via l'application $(x, y) \mapsto xy^{-1}$. L'action à gauche de G sur G/G^σ s'identifie à l'action de $G_1 \times G_1$ sur G_1 définie par $(x, y) \cdot m = xmy^{-1}$. Ainsi un opérateur différentiel invariant à gauche sur G/G^σ correspond à un opérateur différentiel bi-invariant sur G_1, i.e. à un élément de $Z(\mathfrak{g}_1)$. L'étude des espaces symétriques contient donc le cas des groupes.

2- On prend $G = SL(n,\mathbb{R})$ et $\sigma(g) = {}^tg^{-1}$. Alors on a $K = G^\sigma = SO(n,\mathbb{R})$ et G/K est un espace symétrique Riemannien de type non compact.

Nous rappelons quelques points élémentaires concernant les espaces symétriques mais néanmoins fondamentaux. L'involution σ définit par différentiation une involution sur $\mathfrak{g}$ que l'on note encore σ. En particulier on a $\sigma[X,Y] = [\sigma(X),\sigma(Y)]$ pour tout $(X,Y) \in \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. Ainsi les valeurs propres de σ sont $+1$ et -1. On note $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ la décomposition associée. Alors $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie de K, mais en général $\mathfrak{p}$ n'est pas une sous-algèbre de Lie car on a les relations suivantes $[\mathfrak{k},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ et $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$. On peut identifier $\mathfrak{p}$ à l'espace tangent $T_{eK}(G/K)$. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ munie d'une involution σ est appelé paire symétrique [3].

Remarquons que sur $\mathfrak{p}$ il existe toutefois un produit triple

$$(X,Y,Z) \mapsto [[X,Y],Z].$$

Les espaces vectoriels munis de produits triples sont pour les espaces symétriques, ce que sont les algèbres de Lie pour les groupes de Lie. On pourra consulter le livre de Loos [17].

On va s'intéresser à l'algèbre des opérateurs différentiels invariants sur le fibré des demi-densités, c'est à dire à l'algèbre

$$(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}}.$$

Je suppose jusqu'à la fin que G est un groupe algébrique affine sur $\mathbb{C}$ et σ une involution algébrique.

Comme $(\mathfrak{g},\sigma)$ est une paire symétrique, la paire $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ est réductive (au sens introduit ci-dessus). On en déduit d'après la proposition 3 que la symétrisation est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ sur $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}}$. Il est pas difficile de voir que les K-orbites dans $\mathfrak{k}^\perp$ sont lagrangiennes, et par conséquent l'algèbre $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ est Poisson commutative. La question plus spécifique aux espaces symétriques est donc la suivante :

Question : Les algèbres $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ et $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}}$ sont-elles isomorphes ?

Une question préliminaire serait de s'assurer que l'algèbre $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}}$ est commutative. Ce point est résolu par le théorème suivant :

Théorème 8 *(Lichnérowicz [16], Duflo [6])*

Soit $(\mathfrak{g},\sigma)$ *une paire symétrique sur un corps de caractéristique nulle, alors l'algèbre* $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}}$ *est commutative.*

L'involution σ agit dans l'espace G/K et on se doute que ceci a des conséquences. La preuve de [6] est une version algébrique de [16]. Voici l'idée de [16] dans le cas réel. Tout élément $u \in (U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}}$ définit un opérateur différentiel sur les demi-densités noté D_u. Cet espace admet un produit scalaire G-invariant, par conséquent D_u admet un adjoint formel D_u^* qui est aussi un opérateur invariant. La formule de Lichnérowicz est l'égalité

$$D_u^* = D_{u^\sigma}$$

(on a noté u^σ l'action de σ dans $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}}$). Maintenant $u \mapsto D_u^*$ est un anti-automorphisme et $u \mapsto D_{u^\sigma}$ est un automorphisme qui coincident, l'algèbre $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}}$ est forcément commutative. $\square$

La version algébrique [6] se base sur le lemme de dualité déjà évoqué.

Lemme 3 *Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et λ un caractère de $\mathfrak{h}$, alors on a $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} \cap U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{h}^{\lambda} = \mathfrak{h}^{\lambda - r} \cdot U(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$, avec $r(H) = \mathrm{tr}_{\mathfrak{h}} adH$.*

2.3 Le cas semi-simple

Dans cette section on va rappeler la construction de l'isomorphisme d'Harish-Chandra pour les espaces symétriques réductifs (voir [15]).

Soit $\mathfrak{g}$ semi-simple sur $I\!R$ et $\sigma = \theta$ l'involution de Cartan. On note comme toujours $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition associée et $\mathfrak{k}$ est alors l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie compact. Soit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ un sous-espace de Cartan, i.e. un sous-espace abélien maximal formé d'éléments semi-simple. Notons $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ le système de racines associé à la décomposition de $\mathfrak{g}$ sous l'action adjointe de $\mathfrak{a}$ et W le groupe de Weyl. En général $\mathfrak{a}$ n'est pas une sous-algèbre de Cartan. Remarquons que si α est racine alors $-\alpha$ aussi ce qui permet de décomposer Δ en $\Delta^+ \cup \Delta^-$. Notons comme dans le cas des groupes $\mathfrak{n}^+ = \oplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{n}^- = \sigma(\mathfrak{n}^+) = \oplus_{\alpha \in \Delta^-} \mathfrak{g}_\alpha$. On a alors la décomposition triangulaire $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{g}_o \oplus \mathfrak{n}^+$, avec $\mathfrak{g}_o = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$. Par suite on dispose de la décomposition d'Iwasawa $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$ et d'après PBW on peut écrire

$$U(\mathfrak{g}) = (U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}^{-\delta} + \mathfrak{n}^+ \cdot U(\mathfrak{g})) \oplus U(\mathfrak{a}).$$

Remarquons que δ vaut 0 dans notre cas. Cette dernière permet de définir une projection de $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}^{-\delta}$ sur $U(\mathfrak{a})$. Pour $u \in U(\mathfrak{g})$ notons $u_o \in U(\mathfrak{a})$ l'image par cette projection, on a donc $u - u_o \in U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}^{-\delta} + \mathfrak{n}^+ \cdot U(\mathfrak{g})$. On note $\Gamma(u) = u_o^\rho$ avec $\rho = \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{n}^+} adH$. Le théorème d'Harish-Chandra pour les espaces symétriques s'énonce ainsi :

Théorème 9 *(Harish-Chandra)*

1- Pour $u \in (U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}}$, $\Gamma(u)$ *est indépendant du choix de* Δ^+, *c'est donc un élément de* $U(\mathfrak{a})^W$.

2- L'application Γ *définit un isomorphisme d'algèbres de* $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}}$ *sur* $U(\mathfrak{a})^W$.

Ainsi Γ décrit parfaitement l'algèbre $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}}$ et comme W est un groupe fini engendré par des réflexions, l'algèbre $U(\mathfrak{a})^W$ est une algèbre de polynômes en $d = \dim \mathfrak{a}$ variables.

Parallèlement on a aussi le théorème de Chevalley pour les espaces symétriques qui est la version graduée du théorème d'Harish-Chandra. Écrivons grace à la forme de Killing qui est non dégénérée $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$. Alors on a une décomposition de l'algèbre symétrique $S[\mathfrak{p}] = S[\mathfrak{a}] \oplus S[\mathfrak{p}] \cdot \mathfrak{a}^{\perp}$. Comme les termes de droite sont stables par W, la projection appelée aussi restriction (Res) envoie $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ dans $S[\mathfrak{a}]^W$. Le théorème de Chevalley s'énonce ainsi :

Théorème 10 *(Chevalley) L'application Res est un isomorphisme de* $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ *sur* $S[\mathfrak{a}]^W$.

Remarque : Il existe de nombreuses variantes de ce théorème (versions $\mathcal{C}^\infty, \mathcal{C}^n$) et aussi des formules concrètes pour l'isomorphisme inverse (de même que pour l'isomorphisme d'Harish-Chandra) au moyen des opérateurs de Dunkl [22], [23].

On résume la situation par le diagramme d'Harish-Chandra pour les espaces symétriques

$$\begin{array}{ccc} (U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}} & \xrightarrow{\Gamma} & U(\mathfrak{a})^W \\ & & \downarrow \\ S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}} & \xrightarrow{Res} & S[\mathfrak{a}]^W \end{array}$$

En conclusion en suivant les flèches on a décrit un isomorphisme d'algèbres γ et on peut énoncer le théorème suivant.

Théorème 11 *Le diagramme d'Harish-Chandra décrit un isomorphisme d'algèbres de* $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}}$ *sur* $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$.

2.4 Le cas des espaces symétriques généraux

Cette section est un résumé des résultats de [20] [21]. Soit $(\mathfrak{g}, \sigma)$ une paire symétrique algébrique sur $\mathbb{C}$, on va définir une généralisation du diagramme d'Harish-Chandra grace à la méthode des orbites. Soit $f \in \mathfrak{k}^{\perp} = \{f \in \mathfrak{g}^*, f|_{\mathfrak{k}} = 0\}$ et B_f la forme bilinéaire alternée associée. Alors le noyau est σ-stable et une sous-algèbre algébrique. On écrit $\mathfrak{g}(f) = \mathfrak{k}(f) \oplus \mathfrak{p}(f)$. Pour f générique on a $[\mathfrak{k}(f), \mathfrak{p}(f)] = 0$ et par conséquent $\mathfrak{a}(f) := \mathfrak{p}(f) \oplus [\mathfrak{p}(f), \mathfrak{p}(f)]$ est nilpotente. La partie réductive de $\mathfrak{a}(f)$ est donc un tore $\mathfrak{s}_f$ inclus dans $\mathfrak{p}(f)$ et on a $[\mathfrak{s}_f, \mathfrak{g}(f)] = 0$. Pour f générique tous les tores $\mathfrak{s}_f$ sont conjugués par $K := (G^\sigma)_o$. On note $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{s}_f)$ les racines non nulles de la décomposition de $\mathfrak{g}$ sous $\mathfrak{s}_f$. Alors si α est racine, $-\alpha = \alpha^\sigma$ aussi, ce qui donne comme dans le cas semi-simple une décomposition triangulaire $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{g}_o \oplus \mathfrak{n}^+$ avec $\mathfrak{g}_o = \{X, [\mathfrak{s}_f, X] = 0\}$. La sous-algèbre algébrique $\mathfrak{g}_o$ est stable par σ, on écrit $\mathfrak{g}_o = \mathfrak{k}_o \oplus \mathfrak{p}_o$ sa décomposition relativement à σ et $(\mathfrak{g}_o, \sigma)$ est donc ce que nous appelons la petite paire symétrique fondamentale. Il permet d'écrire une décomposition d'Iwasawa généralisée $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_o \oplus \mathfrak{n}^+$.

Remarque : Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente alors on a $\mathfrak{g}_o = \mathfrak{g}$, et si $\mathfrak{g}$ est semi-simple on a $\mathfrak{p}_o = \mathfrak{a}$ le sous-espace de Cartan.

Grace encore au thórème de PBW on obtient la décomposition

$$U(\mathfrak{g}) = (U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}^{-\delta} + \mathfrak{n}^+ \cdot U(\mathfrak{g})) + U(\mathfrak{g}_o),$$

d'où une projection de $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}^{-\delta}$ sur $U(\mathfrak{g}_o)/U(\mathfrak{g}_o) \cdot \mathfrak{k}_o^{-\delta}$. Soit $\rho(X) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{n}^+} adX$, c'est un caractère de $\mathfrak{g}_o$. On vérifie que l'on a $-\delta + \rho = -\delta_o$ avec $\delta_o(X) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}_o/\mathfrak{k}_o} adX$, caractère de $\mathfrak{k}_o$. En composant la projection avec le décalage par ρ on définit une application

$$\Gamma : U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}^{-\delta} \longrightarrow U(\mathfrak{g}_o)/U(\mathfrak{g}_o) \cdot \mathfrak{k}_o^{-\delta_o}.$$

On a le résultat suivant

Proposition 4 *[21]*
1- L'application Γ définit un homomorphisme d'algèbres injectif de $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}}$ dans $(U(\mathfrak{g}_o)/U(\mathfrak{g}_o) \cdot \mathfrak{k}_o^{-\delta_o})^{\mathfrak{k}_o}$.
2- L'homomorphisme Γ est indépendant du choix de Δ^+.

Notons M' le normalisateur du tore $\mathfrak{s}_f$ dans K et M le centralisateur de $\mathfrak{s}_f$ dans K, alors $W = M'/M$ est un groupe fini, mais en général ce groupe n'est pas transitif sur les chambres de $\mathfrak{s}_f$ (cf l'exemple à la fin du chapitre). En général Γ est une injection stricte. Pour montrer la proposition il faut se ramener au cas où $\mathfrak{s}_f$ est de dimension 1 et utiliser alors 2 fois la formule de Lichnérowicz.

Comme on l'a vu plusieurs fois, il existe toujours une version graduée de ce genre de proposition. On écrit $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_o \oplus [\mathfrak{s}_f, \mathfrak{k}]$, c'est une décomposition stable par M', ce qui permet de définir une projection appelée restriction (Res) de $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ sur $S[\mathfrak{p}_o]^{M'}$. Comme tous les tores $\mathfrak{s}_f$ sont conjugués pas K on a sans trop de peine la proposition suivante.

Proposition 5 *[21]*

1- L'application Res définit un homomorphisme injectif de $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ dans $S[\mathfrak{p}_o]^{M'}$.

2- Les corps $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$ et $S(\mathfrak{p}_o)^{M'}$ sont isomorphes.

On a noté $S(V)$ le corps de fractions de $S[V]$, notez qu'il faut localiser avant de prendre les invariants. En général *Res* est une injection stricte. Cette proposition résulte du fait que génériquement l'intersection des K-orbites de $\mathfrak{k}^{\perp}$ avec $\mathfrak{g}_o^*$ sont des M'-orbites dans $\mathfrak{k}_o^{\perp}$.

La situation au niveau du petit espace symétrique est très bonne car on a, comme dans le cas des groupes le résultat suivant. On note pour $X \in \mathfrak{p}_o$

$$j_o(X) = \det_{\mathfrak{p}_o}\left(\frac{\sinh adX}{adX}\right).$$

C'est le jacobien de l'application *Exp* pour les espaces symétriques.

Théorème 12 *[21]*

L'application de $S[\mathfrak{p}_o]^{\mathfrak{k}_o}$ dans $(U(\mathfrak{g}_o)/U(\mathfrak{g}_o)\cdot\mathfrak{k}_o^{-\delta_o})^{\mathfrak{k}_o}$ définie par $Q \mapsto \dot{\beta}(\partial_{j_o^{1/2}}(Q))$ est un isomorphisme d'algèbres.

Pour montrer ce théorème il faut construire des polarisations pour les points génériques de $\mathfrak{p}_o^*$ qui sont σ-stables et utiliser des arguments analogues à ceux que j'ai décrit dans le chapitre sur les groupes.

Remarques :

i- Lorsque $\mathfrak{g}$ est nilpotente ce résultat est établi par Y. Benoist [1], on suit d'ailleurs la même méthode.

ii- Il est facile de voir que l'isomorphisme décrit ci-dessus coincide avec la symétrisation elle-même.

On va résumer la situation par un diagramme d'Harish-Chandra généralisé

$$\begin{array}{ccc}
(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}} & \overset{\Gamma}{\hookrightarrow} & (U(\mathfrak{g}_o)/U(\mathfrak{g}_o)\cdot\mathfrak{k}_o^{-\delta_o})^{M'} \\
 & & \downarrow \\
S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}} & \overset{Res}{\hookrightarrow} & S[\mathfrak{p}_o]^{M'}
\end{array}$$

Le diagramme ci-dessus et les résultats de la proposition 5 se résume par la proposition suivante.

Proposition 6 *[21]*

Le diagramme d'Harish-Chandra généralisé décrit un homomorphisme d'algèbres injectif γ de $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}}$ dans $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$ les fractions $\mathfrak{k}$-invariantes.

Donnons un exemple : Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie engendrée par $< T, X, Y, Z >$ avec les relations $[X,Y] = Z$, $[T,X] = X$, $[T,Y] = -Y$. Soit σ l'involution donnée par $\sigma(X) = Y$, $\sigma(T) = -T$ et $\sigma(Z) = -Z$. Alors on a $\mathfrak{k} = \mathbb{C}(X+Y)$ et $\mathfrak{p} = \mathbb{C}T + \mathbb{C}Z + \mathbb{C}(X-Y)$. La forme $f = Z^*$ est générique dans $\mathfrak{p}^*$, la dualité étant prise par rapport à la base $T, Z, X-Y$. Alors on a $\mathfrak{g}(f) = \mathbb{C}T \oplus \mathbb{C}Z$ d'où $\mathfrak{s}_f = \mathbb{C}T$. La décomposition d'Iwasawa s'écrit

$$\mathfrak{g} = \mathbb{C}(X+Y) \oplus (\mathbb{C}T + \mathbb{C}Z) \oplus \mathbb{C}X.$$

L'algèbre $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ est engendrée par Z et $4ZT - (X-Y)^2$, tant dis qu'on a $S[\mathfrak{p}_o]^{\mathfrak{k}_o} = S[Z,T]$. Le groupe M' est trivial, tandis que l'on compte 2 chambres. En particulier on a $Res(S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}) = S[Z, ZT] \neq S[\mathfrak{p}_o]^{\mathfrak{k}_o}$. L'injection dans le diagramme d'Harish-Chandra généralisé est donc en général stricte. On calcule facilement que l'on a $\Gamma(4ZT - (X-Y)^2) = 4TZ$ et qu'il est indispensable d'effectuer le décalage. Dans ce cas on constate que l'on a via la symétrisation $\Gamma((U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}}) = Res(S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}})$, ce qui nous amène à la conjecture suivante

Conjecture *[21] : L'homomorphisme γ décrit par le diagramme d'Harish-Chandra généralisé est à valeur dans $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$, par suite c'est un isomorphisme d'algèbres.*

Le fait que l'inclusion implique la surjectivité résulte d'une récurrence immédiate car le terme dominant dans γ n'est autre que l'inverse de la symétrisation. Cette conjecture est une version précise de la conjecture de Duflo dans le cas des espaces symétriques.

Citons des exemples où la conjecture est vérifiée :

1- La paire $(\mathfrak{g}, \sigma)$ est nilpotente [1].

2- La paire $(\mathfrak{g}, \sigma)$ est résoluble alors le diagramme décrit bien un isomorphisme [24] et redonne la formule montrée par F. Rouvière [19]. Notons $j(X) = \det_{\mathfrak{p}}(\frac{\sinh adX}{adX})$ alors l'application de $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ dans $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}}$ définie par

$$Q \mapsto \dot{\beta}(\partial_{j^{1/2}}(Q))$$

est un isomorphisme d'algèbres. Cette formule est établie dans [19] directement grace à une analyse fine de la formule de Campbell-Hausdorff qui s'inspire de la conjecture de Kashiwara-Vergne [12].

3- Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$ est de type groupe on retrouve l'isomorphisme de Duflo. On doit remarquer ici, qu'on a deux façons de décrire l'isomorphisme de Duflo, soit par le diagramme, soit par la formule directe. Il faut travailler un peu pour montrer que c'est effectivement la même formule. Lorsque en plus $\mathfrak{g}_1$ est une algèbre de Takiff ce problème est étudié dans [10].

4- Si $(\mathfrak{g}, \sigma)$ est une paire orthogonale [24] i.e. $\mathfrak{g}$ admet une forme bilinéaire invariante, σ-invariante et non dégénérée. On retrouve bien-sûr les cas des espaces symétriques réductifs, mais il existe d'autres exemples. En général il n'y a pas de formule simple directe, comme celle de Duflo ou celle de Rouvière dans le cas résoluble, pour un substitut au diagramme, même pour le cas de $sl(2)/so(2)$.

Remarque : On étend bien-sûr ces résultats (et la conjecture) à toutes les paires symétriques de dimension finie sur un corps de caractéristique nulle.

Références

[1] Benoist, Y., Analyse harmonique sur les espaces symétriques. *J. Functional Analysis,* 59 (1984), 211-253.

[2] Corwin, L. J. and Greenleaf, F. P., Commutativity of invariant differential operators on nilpotent homogeneous spaces with finite multiplicity. *Comm. Pure Appl. Math*, 45 (1992), 681-758.

[3] Dixmier, J., *Algèbres enveloppantes.* Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[4] Duflo, M., Construction of Primitive ideals in an Envelopping Algebra. *In Lie Groups and their representations, Adam Hilger Ltd, London 1975.*

[5] Duflo, M., Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 10 (1977), 107-144.

[6] Duflo, M., Opérateurs différentiels invariants sur un espace symétrique. *CRAS, Paris, 289, série A* (1979), 135-137.

[7] Duflo, M., in *Open problems in representation theory of Lie groups*, Conference on *Analysis on homogeneous spaces*, (T. Oshima editor), August 25-30, Kataka, Japon, 1986.

[8] Duflo, M. et Vergne M, Une propriété de la représentation coadjointe. *CRAS, Paris, 268, série A* (1969), 583-587.

[9] Fujiwara, H, Sur la conjecture de Corwin-Greenleaf, *Preprint* Université de Kinki, Iizuka Japon, (1996).

[10] Geoffriau, F., Homomorphisme de Harish-Chandra pour les algèbres de Takiff généralisées. *J. of Algebra*, 171 (1995), 444-456.

[11] Ginzburg, V. A., Method of orbits in the representation theory of complex Lie groups. *Funct. Anal. Appl.* 15 (1981), 18-28.

[12] Kashiwara, M. and Vergne, M. , The Campbell -Haussdorff formula and invariant hyperfunctions. *Invent. Math.* 47 (1978), 249-272.

[13] Koornwinder, T. H., Invariant differential operators on non-reductive homogeneous spaces. Publi. Math. Centrum, Amsterdam, Report ZW 153 (1981).

[14] Knop, F. , Harish-Chandra homomorphism for reductive group actions. *Ann. Math., II. Ser.* 140, No.2, 253-288 (1994).

[15] Helgason, S., *Groups and Geometric Analysis.* New-York London, Academic Press, 1984.

[16] Lichnerowicz, A., Opérateurs différentiels invariants sur un espace symétrique. *C.R. Acad. Sci. Paris Série A*, 257 (1963), 3548-3550.

[17] Loos O. *Symmetric Spaces I-II.* Benjamin, New-York, 1969.

[18] Rentschler, R. et Vergne, M., Sur le semi-centre du corps enveloppant d'une algèbre de Lie. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 6 (1973), 389-405.

[19] Rouvière, F., Espaces symétriques et méthodes de Kashiwara-Vergne. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 19 (1986), 553-581.

[20] Torossian, C., Opérateurs différentiels invariants sur les espaces symétriques I- Méthodes des orbites. *Journal of Functional Analysis,* 117, No. 1, 118-173, (1993).

[21] Torossian, C., Opérateurs différentiels invariants sur les espaces symétriques II- L'homomorphisme d'Harish-Chandra généralisé. *Journal of Functional Analysis,* 117, No. 1, 173-214, (1993).

[22] Torossian, C., Une application des opérateurs de Dunkl au théorème de restriction de Chevalley. *CRAS, Paris 318, Série I* , 895-898, (1994).

[23] Torossian, C., Une application des opérateurs de Cherednik à l'isomorphisme d'Harish-Chandra pour les espaces symétriques. *CRAS , Paris 320, Série I*, 139-144, (1995).

[24] Torossian, C., Isomorphisme d'Harish Chandra pour les espaces symétriques avec forme bilinéaire invariante non dégénérée. *Preprint* 1996.

Charles TOROSSIAN
CNRS URA 762-DMI
Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm 75230 Paris Cedex 05, torossia@dmi.ens.fr