Intégrales Orbitales et distributions sphériques singulières pour les espaces symétriques de rang 1

CHARLES TOROSSIAN

CNRS UMR 8553 , D.M.A.
École Normale Supérieure,
45 rue d'Ulm 75230 Paris Cedex 05,
Charles.Torossian@ens.fr

Exposé du vendredi 4 Novembre 2004 au groupe de Recherche

Analyse Harmonique Invariante sur les Espaces Symétriques Réductifs

Motivations

Pourquoi étudier les intégrales orbitales du point de vue de l'analyse harmonique invariante ?

Une première réponse, qui justifie à elle seule l'étude de tels objets, est qu'elles fournissent une large classe de distributions invariantes, que l'on espère être dense dans l'espace des distributions invariantes.

Une deuxième réponse que l'on peut faire, est que dans le cas des groupes, les travaux initiés par d'Harish-Chandra montrent que le programme de l'analyse harmonique, se réalise à travers l'étude des intégrales orbitales.

Pour motiver l'introduction de ces objets dans le cas des espaces symétriques et plus concrètement dans le cas tangent des espaces symétriques (ce que l'on appelle ici, le cas plat), nous allons essayer de retracer les grandes lignes du programmes d'Harish-Chandra dans le cas des groupes.

On considère G un groupe de Lie semi-simple connexe (réductif), T un sous-groupe de Cartan que l'on suppose Θ stable (Θ est une involution de Cartan). On utilisera les notations $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ pour la décomposition de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = Lie(G)$ relativement à Θ. On notera $K = G^{\Theta}$ le sous-groupes des points fixes, c'est un compact maximal.

Notons T' les éléments réguliers de T. On considère alors l'intégrale orbitale, c'est à dire sur l'orbite $G \cdot x = \{gxg^{-1}, g \in G\}$:

$$M_T f(x) = \int_{G/T} f(gxg^{-1}) d\dot{g} \tag{1}$$

où $d\dot{g}$ désigne une mesure invariante sur G/T (une telle mesure existe) et $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ une fonction régulière à support compact dans G.

L'intégrale est alors convergente pour tout $x \in T'$ et possède une singularité près des éléments non réguliers que l'on sait contrôler.

Les spécialistes des groupes semi-simples, renormalisent l'intégrale ci-dessus, en faisant intervenir le dénominateur de Weyl et un signe, on aura donc

$$\Phi_T f(x) = \epsilon_R(x) D(x) M_T f(x) \tag{2}$$

où les ingrédients de la formule sont définis maintenant.

Notons $T = BA$ la décomposition relativement à Θ du sous-groupe de Cartan T et $\mathfrak{t} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$ son algèbre de Lie. On a $B \subset K$ et $A \subset \exp(\mathfrak{p})$. On note $\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{t}_\mathbb{C})$ l'ensemble des racines non nulles.

Classiquement on distingue plusieurs classes de racines. Une racine est dite réelle (resp. imaginaire, resp. complexe) si elle prend des valeurs réelles sur $\mathfrak{t}$ (resp. imaginaires, resp. complexes non réelles et non imaginaires). On notera Δ_R (resp. Δ_I) l'ensemble des des racines réelles (resp. imaginaires).

Parmi les racines imaginaires on distingue deux sous-classes : les racines imaginaires compactes et les racines imaginaires non compactes selon que le $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ triplet associé a une trace sur $\mathfrak{g}$ qui est isomorphe à $\mathfrak{su}(2)$ ou $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$;

Notons $D(x)$ le dénominateur de Weyl, c'est à dire

$$D(x) = \xi_\delta(x) \prod_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{t}_\mathbb{C})} (1 - \xi_\alpha(x)^{-1}),$$

avec δ la demie-somme des racines positives et ξ_α les caractères correspondant aux racines α. On note $\epsilon_R(x)$ le signe de

$$\prod_{\alpha \in \Delta_R^+} (1 - \xi_\alpha(x)^{-1}).$$

Les faits marquants concernant les intégrales $\Phi_T f$ sont :

1. Ce sont des fonctions régulières sur T' qui s'étendent en des fonctions régulières aux points x tels $\xi_\alpha(x) \neq 1$ pour α racine imaginaire non compacte.
2. Ce sont des fonctions bornées ainsi que leurs dérivées sur T'.
3. Il existe une relation assez simple entre $\Phi_T f$ et l'intégrale orbitale d'une fonction[1] $f^{(P)}$ relativement au groupe MA avec $M = Z_G(\mathfrak{a})$, le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans G. C'est le principe de réduction lié à l'induction parabolique. Cette réduction permet de se ramener au cas des sous-groupes de Cartan compacts.
4. Contrôle des sauts entre deux sous-groupes de Cartan adjacents. Les formules se déduisent de la réduction à $SL(2, \mathbb{R})$. On obtient ainsi les conditions de recollement d'Hïrai. Ce qui permet de déterminer l'espace fonctionnel des restrictions des intégrales orbitales aux classes de conjugaison de Cartan (voir [Bou] pour cette approche).
5. Formule limite : c'est une formule qui redonne la distribution de Dirac à l'origine e via les intégrales orbitales. Plus précisément notons

   $$\omega_T = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \partial(H_\alpha)$$

   l'opérateur différentiel sur T (chaque H_α coracine définit un champ de vecteur sur T).
   On a

   $$\big(\omega_T \Phi_T f\big)(e) = c_T f(e), \tag{3}$$

   avec $c_T = 0$ sauf si T est le Cartan le plus compact.

Toutes ces formules sur les intégrales permettent d'approcher la formule de Plancherel. En effet on sait calculer le caractère des représentations irréductibles.

Compte tenu d'un théorème fondamental d'Harish-Chandra qui nous dit que le caractère est déterminé par sa restriction aux éléments réguliers et que c'est une fonction L^1_{loc} on peut écrire ce caractère sous la forme

$$\Theta_\lambda(f) = \sum_i \int_{T_i} D_{T_i}(x) \theta_\lambda^{(i)}(x) \Phi_{T_i} f(x) dx \tag{4}$$

avec $\theta_\lambda(x)$ est la restriction du caractère distribution à T_i où les T_i décrivent les classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan.

[1] Obtenue à partir de f par une intégration sur le produit KN.

En faisant intervenir le système différentiel vérifié par cette distribution, on s'aperçoit que $D_{T_i}(x)\theta_\lambda^{(i)}(x)$ est une somme d'exponentielles. En définitive le caractère est lié à la transformée de Fourier des intégrales orbitales.

L'utilisation de la formule limite (3) des intégrales orbitales permet alors de tout inverser (moyennant des calculs difficiles) et d'obtenir par ce biais une formule de Plancherel.

En résumé insistons sur les points suivants :

1. La connaissance des distributions sphériques sur les sous-groupes de Cartan, résulte du fait que les parties radiales des opérateurs différentiels bi-invariants sont, modulo une conjugaison, des opérateurs à coefficients constants ;
2. Le passage de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ au groupe de Lie G se fait par l'exponentielle[2] et ce morphisme se comporte bien vis à vis des distributions invariantes (c'est un homomorphisme d'algèbres) ;
3. L'existence de formule limite et la régularité des intégrales orbitales. Ces faits dépendent fortement de la réduction au cas de rang 1 c'est à dire $SL(2,\mathbb{R})$ ou $SU(2)$ et de la correspondance avec la méthode de descente (lien entre avec une intégrale orbitale d'un groupe plus petit).
4. Distributions sphériques et intégrales orbitales sont en quelque sorte en dualité par la formule (4) ;

Le problème dans les espaces symétriques non Riemanniens c'est qu'aucun des points ci-dessus n'est vraiment satisfait.

On peut toutefois obtenir une formule de Plancherel sur G/H comme l'a fait Delorme pour obtenir la formule de Plancherel sur G/H, sans suivre ce schéma de preuve.

Les difficultés que nous rencontrons sont :

1. Comprendre les parties radiales des opérateurs différentiels invariants : ce point a toutefois sensiblement progressé ces dernières années avec l'introduction des opérateurs de Dunkl et de Cherednik qui permettent

[2] modifiée par la racine carrée du Jacobien

d'écrire simplement ces parties radiales. J'émettrai cependant deux réserves :

- ces formules n'ont pas de généralisations au cas des parties radiales quand on applique la méthode de descente près d'un point non régulier (alors que c'est le cas pour les groupes, et pour les espaces symétriques près d'un point semi-simple régulier)

- les opérateurs qui interviennent ne sont pas locaux, ce qui laisse à penser qu'il faudra dans les formules recherchées, faire intervenir des opérateurs différentiels et aussi des opérateurs non locaux.

2. La non régularité des distributions sphériques. On verra dans cette exposé des exemples de distributions sphériques singulières. Les espaces symétriques dit "nice" vérifient toutefois le théorème de régularité (voir exposé de T. Levasseur du 04/11/04 dans ce groupe de Recherches).

   On remarquera cependant que l'existence de distributions singulières n'intervient que pour les paramètres spectraux singuliers[3].

3. Le cas du rang 1 est relativement éclairci.

4. Le lien entre l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et le groupe G n'est pas aussi simple que dans le cas des groupes. Il existe des réponses pour l'instant peu satisfaisantes avec l'introduction d'une fonction auxiliaire $e(x, y)$ par Rouvière. Les méthodes de Kontsevich donnent aussi l'expression en coordonnées exponentielles des opérateurs différentiels invariants sur les espaces symétriques. Il faut là aussi s'attendre à des difficultés essentielles.

1 Espaces symétriques

Soit G un groupe de Lie connexe semi-simple non compact, muni d'une involution σ non triviale. Notons H la composante connexe des points fixes.

On sait qu'il existe un involution de Cartan θ qui commute à σ. On note habituellement $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ les décompositions relatives à θ et σ. Alors $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{q}$ sont stables par θ. Ce point permet d'introduire la paire symétrique Riemannienne

$$\mathfrak{g}^d = \mathfrak{k}^d \oplus \mathfrak{p}^d$$

avec $\mathfrak{k}^d = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k} \oplus i(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$ et $\mathfrak{p}^d = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} \oplus i(\mathfrak{q} \cap \mathfrak{k})$. L'involution de Cartan pour $\mathfrak{g}^d$ est la restriction à $\mathfrak{g}^d$ de σ. Cette paire symétrique intervient largement

[3] Ce fait est général [Toro]

dans les travaux de Morgens Flensted-Jensen. On remarquera que les paires $(\mathfrak{g}, \sigma)$ et $(\mathfrak{g}^d, \theta^d)$ ont même complexifiée.

On rappelle quelques notions de bases sur les espaces symétriques non Riemanniens :

Sous-espaces de Cartan

Un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$ est un sous-espace abélien, formé d'éléments semi-simples et maximal pour cette propriété.

Lemme 1. *Les sous-espaces de Cartan existent, ils ont tous mêmes dimension. Il existe un nombre fini de classes de conjugaison sous l'action de H.*

On note $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_r$ un choix de représentants que l'on peut prendre θ stables. La dimension commune notée d est appelée le σ-rang réel.

On note $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ le système de racine associé au choix du sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$. On remarquera que l'on a $-\alpha^\theta = \overline{\alpha}$. On notera $m_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha$ la dimension de l'espace radiciel associé à α.

Un élément de $X \in \mathfrak{a}$ est dit régulier si le centralisateur de X dans $\mathfrak{q}$ vaut $\mathfrak{a}$. On notera $\mathfrak{a}'$ les éléments réguliers. C'est le complément d'un ensemble fini d'hyperplans.

Remarquons que $\mathfrak{a}^d = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{p} \oplus i\mathfrak{a} \cap \mathfrak{k}$ est un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{p}^d$ forcément déployé.

Eléments réguliers

Pour $X \in \mathfrak{q}$, considérons l'endomorphisme de $\mathfrak{q}$, $ad^2 X$. Le terme de plus bas degré dans le polynôme caractéristique $\det_{\mathfrak{q}}(T - ad^2 X)$ est de la forme $R(X)T^d$; Le polynôme $R(X)$ est clairement invariant par l'action adjointe de H.

Définition 1. *Notons $\mathfrak{q}' = \{X, R(X) \neq 0\}$; ce sont les éléments dits génériques.*

Lemme 2. *On a $\mathfrak{q}' = \bigcup\limits_{1 \leq i \leq r} H \cdot \mathfrak{a}_i$. En d'autres termes les éléments génériques sont les éléments semi-simples réguliers*

Transversalité

Notons M le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans H, pour $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$. On a $\mathfrak{m} = Lie(M) = \text{Centralisateur}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})$.

Notons $M' = N_H(\mathfrak{a})$ le normalisateur de $\mathfrak{a}$ dans H. Le groupe M'/M est fini, et dépend du choix de $\mathfrak{a}$ parmi les classes de conjugaison. C'est un analogue du groupe de Weyl, qui tient compte du caractère réel de la situation. C'est une donnée fortement réelle !

Lemme 3. *L'application naturelle*

$$\begin{array}{rcl} H \times_M \mathfrak{a}' & \longrightarrow & \mathfrak{q} \\ (h, X) & \longmapsto & Ad(h)X \end{array}$$

est un difféomorphisme local. Les fibres non vides sont isomorphes à M'/M et l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : H \times_{M'} \mathfrak{a}' & \longrightarrow & \mathfrak{q} \\ (h, X) & \longmapsto & Ad(h)X \end{array}$$

est donc un difféomorphisme sur $H \cdot \mathfrak{a}'$.

Le point est que la trace des orbites $H \cdot x$ sur $\mathfrak{a}$ est précisément $M' \cdot x$. En d'autres termes l'orbite $H \cdot x$ s'identifie à H/M. Cet espace homogène admet une mesure invariante notée $d\dot{h}$.

Notons B la forme de Killing sur $\mathfrak{g}$ et $B_\theta(x, y) = -B(x, \theta y)$ la forme définie associée. La restriction de B_θ à l'orbite définit une métrique pseudo-Riemannienne invariante par H. On la note $d\sigma_X$. Clairement on a

$$d\sigma_X \approx \delta(X) d\dot{h}.$$

La fonction δ définit la densité de l'orbite dans la décomposition de la mesure de Lebesgue sous l'action de H. On a donc

$$\varphi^*(dY) = \delta(X) d\dot{h}\, dX$$

avec dY et dX des mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{a}$.

Intégrales orbitales sur $\mathfrak{q}$

Fixons une mesure $d\dot{h}$ invariante sur H/M.

Définition 2. *Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathfrak{q})$, on pose*

$$M_{\mathfrak{a}} f(X) = \int_{H/M} f(h \cdot X) d\dot{h} \tag{5}$$

Lemme 4. *L'intégrale orbitale est régulière sur $\mathfrak{a}'$ et à support borné ;*

Ceci provient du fait que les orbites sont fermées, et que le minimum de la norme de B_θ sur l'orbite est atteint aux points de $\mathfrak{a}$.

Lemme 5. *On a la formule intégrale*

$$\int_{\mathfrak{q}} f(Y) dY = \sum_{1 \leq i \leq r} \int_{\mathfrak{a}_i} M_{\mathfrak{a}_i} f(X) |\prod_{\alpha > 0} \alpha(X)^{m_\alpha}| dX \tag{6}$$

Remarquons que le jacobien $\prod_{\alpha>0} \alpha(X)^{m_\alpha}$ est essentiellement réel car si α est racine $\overline{\alpha} = -\alpha^\theta$ l'est aussi.

Problèmes pour l'analyse des intégrales orbitales

Problème 1 : Quel est le comportement des intégrales orbitales près des points singuliers des sous-espaces de Cartan. En particulier que peut-on dire pour $X \in \mathfrak{a}'$ de $M_{\mathfrak{a}} f(tX)$ lors que $t \mapsto 0$. On s'attend bien-sûr à une réponse comparable au comportement des distributions sphériques, c'est à dire que les intégrales orbitales sont des fonctions à croissance modérée et s'expriment près des murs $\alpha(x) = 0$ comme combinaison à coefficients réguliers de termes de la forme $\alpha(x)^r \log^k \alpha(x)$.

Problème 2 : Existent-ils des opérateurs différentiels $D_{i,j}$ (voire non locaux) tels que

$$f(0) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ j}} \lim_{\substack{X_{i,j} \mapsto 0 \\ X_{i,j} \in \mathfrak{a}_i}} D_{i,j} M_{\mathfrak{a}_i} f(X_{i,j})$$

où les $X_{i,j}$ seraient des éléments dans les composantes connexes des $\mathfrak{a}_i'$.

Malheureusement nous n'avons pas de réponses à ces problèmes. Il existe des réponses dans le cas des espaces symétriques de rang 1 (c.f. [Or]), qui se ramènent à l'étude de l'action de $SO(p, q)$ dans R^{p+q}.

2 Intégrales de Mellin et de Riesz

On rappelle dans cette section quelques propriétés fondamentales des intégrales distributions de la forme P^s avec P un polynôme de $\mathbb{R}^n$.

Notons donc

$$\langle I^s, f\rangle = \int_{x, P(x)>0} P^s(x) f(x) dx.$$

Le théorème de Bernstein nous dit qu'il existe un opérateur différentiel $D(x, s, \partial_x)$ tel que l'on a

$$D(x, s, \partial_x) P^{s+1} = b(s) P^s.$$

En choisissant le polynôme b minimal, nommé polynôme de Bernstein, on peut prolonger à $\mathbb{C}$ tout entier la distribution I^s en une fonction méromorphe avec pôles éventuels aux zéros de b décalé d'un entier négatif.

L'équation fonctionnelle, s'étend en une équation fonctionnelle sur la famille de distribution I^s. On a donc

$${}^tD(x, s, \partial_x) I^{s+1} = b(s) I^s.$$

Exemple : Considérons la distribution

$$\langle I^s, f\rangle = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx.$$

Cette famille est holomorphe pour $\Re s > 0$. L'équation fonctionnelle

$$\frac{d}{dx} x^{s+1} = (s+1) x^s$$

montre que la distribution I^s se prolonge à $\mathbb{C}$ avec pôles simples en $-\mathbb{N}$.

On a donc par exemple $I^0 = \delta_0$ et $I^{-n} = \delta^{(n)}$. En effet on a

$$I^0(f) = -I^1(f') = -\int_0^\infty f'(x) dx = f(0).$$

Ainsi la masse de Dirac à l'origine apparaît comme pôle d'une famille de distributions dépendant d'un paramètre.

Remarque : Plus généralement en considérant des polynômes invariants sur $\mathfrak{q}$, on fabriquera des familles de distributions invariantes. Les résidus aux pôles fournissent en général des distributions avec support singulier et vérifiant des équations aux dérivées partielles. C'est ce que l'on va voir avec les distributions de Riesz associés aux espaces symétriques de rang 1.

Il existe en rang supérieur des résultats autour de la détermination des polynômes de Bernstein et des mesures invariantes portées par les orbites pour des intégrales de Riesz généralisées dans le cadres des algèbres de Jordan[4].

3 Espaces symétriques de rang 1

3.1 Distributions invariantes par $SO(n)$ dans $\mathbb{R}^n$

3.1.1 Intégrales orbitales

Notons $P(x) = \sum_1^n x_i^2$ et $\Delta = \sum_1^n \partial_i^2$.

Pour f fonction à support compact dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) P^s \, dx = \int_0^\infty r^{2s+n-1} \int_0^{2\pi} f(r,\theta) d\sigma(\theta) \tag{7}$$

L'équation fonctionnelle du Laplacien est

$$\Delta P^s = 4(s+1)(s+\frac{n}{2})P^s.$$

Le premier pôle est donc $-\frac{n}{2}$ et l'on trouve facilement $Res(P^s, -\frac{n}{2}) = c\,\delta_0$.

3.1.2 Distributions invariantes

Notons $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,\infty[$. Elles sont restrictions de fonctions régulières sur $\mathbb{R}$ via le théorème de Borel.

Notons $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$ le dual topologique. Clairement il s'identifie aux distributions à support dans $[0,\infty[$.

On a le résultat classique suivant

Proposition 1. *1.* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+) \approx \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)^{SO(n)}$

2. $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)^{SO(n)} \approx \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$

L'idée de la preuve est élémentaire et repose sur le fait que si f est une fonction paire alors $f(\sqrt{t})$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,\infty[$.

[4]Dans le cas des cônes homogènes on pourra regarder [Ishi] et [Ange]

3.2 Intégrales orbitales en rang 1 et distributions singulières invariantes par $SO(p,q)$

Ces distributions ont été étudiées par Schiffmann-Rallis, Methée, Faraut, Tengstrand, Guelfand-Chilov, de Rham, Kolk-Varadarajan, Harzallah.

On notera dans cette partie $n = p+q$ la dimension de l'espace, Q la forme quadratique

$$Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 + \ldots x_{p+q}^2$$

et $\Box$ le pseudo-Laplacien associé

$$\Box = \partial_1^2 + \ldots + \partial_p^2 - \partial_{p+1}^2 + \ldots \partial_{p+q}^2.$$

Supposons la paire symétrique de rang 1 et non Riemannienne.

3.2.1 Description des orbites

Tout sous-espace de Cartan est de dimension 1 et est conjugué à un sous-espace de Cartan θ-stable. Comme on est en rang 1 on a $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ ou $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{k}$. On notera de préférence $\mathfrak{b}$ pour un sous-espace de Cartan dans $\mathfrak{k}$.

En faisant intervenir l'espace Riemannien $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$, on voit que si la dimension de $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ est plus grande que 1 alors $(K \cap H)_o$ est transitive sur les sphères, en particulier le groupe M'/M est de cardinal 2.

La forme de Killing restreinte sur $\mathfrak{q}$ est de signature (p,q) avec $p = \dim \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ et $q = \dim \mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}$.

Pour se ramener à des intégrales orbitales pour $SO(p,q)_o$, il suffit de remarquer lorsque $p,q > 1$, H est transitif sur les hypersurface de niveau

$$\{x \in \mathfrak{q}, Q(x) = t\}$$

pour $t \neq 0$. Pour $t > 0$ l'orbite coupe le sous-espace de Cartan déployé.

Lorsque $p,q > 1$ le cône nilpotent $Q = 0$ est formé de deux orbites sous l'action de $SO(p,q)_o$. Lorsque $p = 1$ on a 3 orbites et lorsque $p = 1$ et $q = 1$ on a 5 orbites dans le cône nilpotent.

Remarque : Le cas $p = 1$ ou $q = 1$ est différent car il se peut que les hypersurfaces de niveau $t \neq 0$ ne soient pas homogènes sous l'action de H. Toutefois on pourra faire intervenir les intégrales stables c'est à dire que l'on met ensemble les différentes composantes connexes de l'hypersurface de niveau $t \neq 0$. Les résultats ne sont pas essentiellement différents.

L'action de H sur le cône nilpotent privé de 0 est transitif sauf dans trois cas exceptionnel et le cas $p = 1$ ou $q = 1$ pour l'action de $SO(p,q)_o$) (voir liste de Van Dijk [Dijk]), auquel cas on trouve 2 ou 3 orbites. Ces orbites sont importantes car ce sont elles qui porteront des distributions sphériques singulières en rang 1.

Ce résultat suivant est élémentaire et rassurant d'un certain point de vue.

Lemme 6. *Les distributions de support $\{0\}$ invariantes par $SO(p,q)_o$ sont des sommes de puissance du pseudo-Laplacien appliqué à la masse de Dirac $\square^k\delta$*

3.2.2 Intégrales orbitales et comportement

Pour f fonction à support compact dans $\mathbb{R}^n$ et $\phi \in \mathcal{C}^\infty$, on définit $\widetilde{Mf(t)}$ par l'équation

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(Q(x))f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(t)\widetilde{Mf(t)}dt. \tag{8}$$

Alors $\widetilde{Mf(t)}$ une modification de l'intégrale orbitale. Plus précisément on a pour $t > 0$

$$\widetilde{Mf(t)} = ct^{\frac{n}{2}-1}M_{\mathfrak{a}}^{st}f(\sqrt{t})$$

et pour $t < 0$,

$$\widetilde{Mf(t)} = \ c(-t)^{\frac{n}{2}-1}M_{\mathfrak{b}}^{st}f(\sqrt{-t})$$

où c est une constante. Cette façon d'écrire les choses regroupe en une seule quantité les deux types d'intégrales orbitales.

On utilise la formule classique suivante sur la transformée de Fourier

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi\lambda Q(x)} f(x)dx = \frac{1}{|2\lambda|^{\frac{n}{2}}} e^{-i\frac{\pi}{4}(p-q)sig(\lambda)} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\pi\frac{Q(\xi)}{2\lambda}} d\xi$$
$$\approx \frac{1}{|2\lambda|^{\frac{n}{2}}} e^{-i\frac{\pi}{4}(p-q)sig(\lambda)} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\frac{1}{8i\pi\lambda})^k \Box^k f(0) \Big) \quad (9)$$

Comme on sait par ailleurs calculer la transformée de Fourier inverse des termes de cette formule on en déduit le comportement asymptotique de $\widetilde{Mf(t)}$.

Plus précisément $\frac{1}{k!}(\frac{1}{8i\pi\lambda})^k \frac{1}{|2\lambda|^{\frac{n}{2}}} e^{-i\frac{\pi}{4}(p-q)sig(\lambda)}$ est la transformée de Fourier de (on note Y la fonction d'Heaviside)

$p \equiv 1, q \equiv 0$	$\frac{(-1)^{\frac{q}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} (\frac{t}{4})^k}{k!\Gamma(\frac{n}{2}+k)} Y(t) t^{\frac{n}{2}-1}$	$p \equiv 0, q \equiv 1$	$\frac{(-1)^{\frac{p}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} (\frac{t}{4})^k}{k!\Gamma(\frac{n}{2}+k)} Y(-t)(-t)^{\frac{n}{2}-1}$
$p \equiv 0, q \equiv 0$	$\frac{(-1)^{\frac{q}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} (\frac{t}{4})^k}{k!\Gamma(\frac{n}{2}+k)} \frac{1}{2}\text{sign}(t) t^{\frac{n}{2}-1}$	$p \equiv 1, q \equiv 1$	$\frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}-1} (\frac{t}{4})^k}{k!\Gamma(\frac{n}{2}+k)} \log\|t\| t^{\frac{n}{2}-1}$

Notons η la fonction donnée par le tableau ci-dessous

$p \equiv 1, q \equiv 0$	$Y(t) t^{\frac{n}{2}-1}$	$p \equiv 0, q \equiv 1$	$Y(-t)(-t)^{\frac{n}{2}-1}$
$p \equiv 0, q \equiv 0$	$\frac{1}{2}\text{sign}(t) t^{\frac{n}{2}-1}$	$p \equiv 1, q \equiv 1$	$\log\|t\| t^{\frac{n}{2}-1}$

Proposition 2. *L'intégrale orbitale normalisée* $\widetilde{Mf(t)}$ *s'écrit* $\varphi_o(t)+\eta(t)\varphi_1(t)$ *avec* φ_i *des fonctions régulières sur* $\mathbb{R}$.

Idée de la preuve : la formule (9) donne exactement la transformée de Fourier de $\widetilde{Mf(t)}$. En posant $B_k(f) = c_{p,q} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\Gamma(\frac{n}{2}+k)} \Box^k f(0)$ ($c_{p,q}$ les constantes donnés dans le premier tableau et qui ne sont pas reprises dans les formules), on en déduit que

$$\widetilde{Mf(t)} - \Big(\sum_{k=0}^{N} B_k(f)t^k\Big)\eta(t)\chi(t)$$

est une fonction $\mathcal{C}^m$ pour $N + \frac{n}{2} > m$ (on a noté $\chi(t)$ une fonction plateau au voisinage de $t = 0$). Cela montre le résultat cherché. En particulier les coefficients de Taylor de φ_1 sont des distributions invariantes de support $\{0\}$.

3.2.3 Le cas de $SO(2,1)$ agissant dans $\mathbb{R}^3$

C'est le cas des groupes, c'est à dire le cas de l'algèbre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. On a donc

$$\widetilde{Mf(t)} = \varphi_o(t) + Y(-t)|t|^{\frac{1}{2}}\varphi_1(t).$$

Notons comme d'habitude pour les intégrales orbitales des algèbres de Lie

$$I_{\mathfrak{a}}(f)(xI) = |x| \int_{G/A} f(g \cdot xI)d\dot{g}$$

avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et

$$I_{\mathfrak{b}}(f)(\theta J) = \theta \int_{G/B} f(g \cdot \theta J)d\dot{g}$$

avec $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Les conditions de recollement classique s'exprime par

$$I_{\mathfrak{b}}f(0^+) - I_{\mathfrak{b}}f(0^-) = I_{\mathfrak{a}}f(0).$$

Cette condition exprime simplement que la fonction φ_o est continue en $t = 0$. L'autre condition est que

$$\frac{d}{d\theta} I_{\mathfrak{b}}f(\theta)|_{\theta=0} = Cf(0)$$

En remarquant que l'on a

$$I_{\mathfrak{b}}f(\theta) = \varphi_o(-\theta^2) + |\theta|\varphi_1(-\theta^2),$$

on retrouve facilement la deuxième condition des intégrales de Harish-Chandra car $\varphi_1(0) = f(0)$.

3.3 Méthode de Riesz pour le cas de rang 1

Notons Q_+^s la distribution définie pour $Q(x) > 0$ par la fonction Q^s et nulle sinon.

En utilisant les notations de la proposition 2 on va prolonger la distribution

$$\langle Q_+^s, f\rangle = \int_{\{x,Q(x)>0\}} Q^s(x)f(x)dx = \int_0^\infty t^s\varphi_o(t)dt + \int_0^\infty t^s\eta(t)\varphi_1(t)dt. \tag{10}$$

3.3.1 Prolongement et pôles

La première intégrale de (10) a des pôles aux entiers strictement négatifs avec résidu en $-k-1$ qui vaut $\frac{1}{k!}\varphi_o^{(k)}(0)$ tandis que les pôles de la seconde intégrale dépendent des 4 cas énoncés plus haut.

Cas	Intégrales	Résidus	Valeurs
$p \equiv 1$, $q \equiv 0$	$\int_0^\infty t^{s+\frac{n}{2}-1}\varphi_1(t)$	$-\frac{n}{2}-k$	$\frac{1}{k!}\varphi_1^{(k)} = B_k(f)$ $= \frac{(-1)^q\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\Gamma(\frac{n}{2}+k)}\square^k f(0)$
$p \equiv 0$, $q \equiv 1$	Intégrale $= 0$		
$p \equiv 0$, $q \equiv 0$	$\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{s+\frac{n}{2}-1}\varphi_1(t)$	$-\frac{n}{2}-k$	$\frac{1}{2}B_k(f)$
$p \equiv 1$, $q \equiv 1$	$\frac{d}{ds}\Big(\int_0^\infty t^{s+\frac{n}{2}-1}\varphi_1(t)\Big)$	pôles doubles en $-\frac{n}{2}-k$	Résidu nul Résidu quadratique $= -\frac{1}{k!}\varphi_1^{(k)} =$ $\frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{4^k k!\Gamma(\frac{n}{2}+k)}\square^k f(0)$

On remarquera qu'en dimension paire les pôles du prolongement de Q_+^s aux points $\frac{n}{2}-k$ sont doubles.

3.3.2 Equation fonctionnelle

L'équation de Bernstein résulte de la formule

$$\Box Q_+^s = 4s(s+\frac{n}{2}-1)Q_+^{s-1}. \tag{11}$$

En appliquant la formule ci-dessus $(k-1)$ fois on trouve

$$\Box^k Q_+^s = 4^k \frac{\Gamma(k-s)\Gamma(k-s-\frac{n}{2}+1)\sin(\pi s)}{\Gamma(-s)\Gamma(1-s-\frac{n}{2})\pi} Q_+^{s-k}. \tag{12}$$

En prenant maintenant dans cette formule la limite pour $s \mapsto 0$ on va trouver des récurrences sur les résidus (voir détails dans Faraut-Harzallah [Fa-Har])

On tombe toutefois sur une difficulté, compte tenu du fait que le pôle dans le cas $p,q \equiv 1,0$ est double. En particulier en dimension paire on aura

$$\Box^{\frac{n}{2}} Y(Q) = 2^n(-1)^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\frac{n}{2})^2 \lim_{s\mapsto 0} s^2 Q_+^{s-\frac{n}{2}} \tag{13}$$

En fonction du tableau ci-dessus on déduit le lemme ;

Lemme 7. *Pour n pair, la distribution $\Box^{\frac{n}{2}}Y(Q)$ est nulle si $p,q \equiv 0$, et un multiple non nul de δ si $p,q \equiv 1$.*

En particulier pour $n=2$ on trouve $\Box Y(Q) = 4\delta$. Par ailleurs le résidu en $s=-1$ fournit en général la mesure invariante sur l'orbite nilpotente régulière.

Lemme 8. *On a $Res(Q_+^s, s=-1) = \lim_{t\mapsto 0} \widetilde{MF(t)} = \varphi_o(0)$*

En particulier on remarque que $\Box Y(Q)$ est une mesure invariante μ portée par l'orbite nilpotente que si $n \geq 3$. Plus précisément on a d'après l'équation (11)

$$\mu = Res(Q_+^s, s=-1) = \frac{1}{n-2}\Box Y(Q).$$

En résumé pour n impair les résidus des deux intégrales de (10) ne se chevauchent pas et en appliquant le pseudo-Laplacien à $\Box Y(Q)$ (c'est à dire la mesure invariante) on engendre tous les résidus aux entiers négatifs. Les résidus à partir de $-\frac{n}{2}-k$ sont proportionnels à $\Box^k\delta_0$. On a décrit toutes les distributions portées par le cône nilpotent.

Pour n pair il faut distingué deux cas :

p, q **pairs :** La mesure portée par le cône nilpotent, qui est bien-sur homogène et donc s'étend en une distribution sur $\mathfrak{q}$ est annulée par une puissance de $\Box$; on a donc $\Box^{\frac{n}{2}-1}\mu = 0$. Pour $n \geq 4$ on en déduit que la distribution $\Box^{\frac{n}{2}-2}\mu$ est sphérique de paramètre spectral nul. En tenant compte du résidu de la distribution en $-\frac{n}{2}$ et de ses dérivées sous l'action de $\Box$ on a décrit toutes les distributions invariantes par $SO(p, q)$

p, q **impairs :** La distribution $\Box^{\frac{n}{2}-1}\mu$ est un multiple non nul de δ (contrairement à ce qui est écrit dans l'article de Sekiguchi [Seki]). En tenant compte du résidu en $-\frac{n}{2}$ on engendre alors toutes les distributions invariantes par $O(p, q)$. En particulier dans ce cas, il n'existe pas de distributions sphériques singulières invariantes par $O(p, q)$.

Plus généralement on peut décrire précisément la structure de $\mathfrak{sl}(2)$ module sous-jacent au distributions de support le cône nilpotent. La structure provient de l'action de $\Box, Q, E$ avec E le champ d'Euler. Pour une description précise voir [Ko-Var1].

Remarque finale : Dans le cas p, q impairs avec $p = 1$, la recherche de distributions sphériques singulières est possible. En effet le cas est légèrement différent car le cône nilpotent a 3 orbites. On peut alors montrer (cf Kolk-Varadarajan [Ko-Var1, Ko-Var2]) que si l'on ne considère que la mesure invariante μ_+ portée par le demi-cône positif, alors on a $\Box^{\frac{n}{2}-1}\mu_+$ est proportionnelle à δ. On en déduit alors que la distribution $SO(1, q)_o$-invariante $\mu_+ - \mu_-$ est sphérique et singulière.

3.4 Formule limite dans le cas de rang 1

En utilisant les formules sur les résidus, on peut résoudre le problème posé en début d'exposé, à savoir : exprimer $f(0)$ en fonction des intégrales orbitales. En effet tenant compte de la partie radiale du pseudo-Laplacien qui vaut au signe près

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{n-1}{x}\frac{d}{dx},$$

on peut écrire aisément $f(0)$ comme combinaison de dérivées des intégrales orbitales sur les deux classes de conjugaison de Cartan. On pourra consulter [Or] pour les formules exactes qui ne sont pas difficiles à établir.

Références

[Ange] Yan Angeli, *Analyse sur les cônes satellites,* Thèse Université Henri-Poincaré, 2001. A paraître au Journal of Lie Theory (2005) and Journal of funcitional Analysis (2005).

[Bou] A. Bouaziz, *Intégrales orbitales sur les algèbres de Lie réductives,* Invent. Math. 115 (1994), no. 1, 163-207.

[Dijk] G. Van Dijk, *Invariant eigendistributions on the tangent space of a rank one semisimple symmetric space.* Math. Ann. 268 (1984), no. 3, 405–416.

[Fa-Har] J. Faraut et K. Harzallah, *Deux cours d'analyse harmonique*, Progress in Mathematics, vol. 69, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1987, Papers from the Tunis summer school held in Tunis, August 27-September 15, 1984.

[Ishi] Hideyuki Ishi, *Positive Riesz distributions on homogeneous cones.* J. Math. Soc. Japan 52 (2000), no. 1, 161–186.

[Ko-Var1] J. A. C. Kolk et V. S. Varadarajan, *Lorentz invariant distributions supported on the forward light cone,* Compositio Math. 81 (1992), no. 1, 61-106.

[Ko-Var2] J. A. C. Kolk et V. S. Varadarajan, *Riesz distributions*, Math. Scand. 68 (1991), no. 2, 273–291.

[Or] J. Orloff, *Orbital integrals on symmetric spaces,* in Noncommutative harmonic analysis and Lie groups (Marseille-Luminy, 1985), Lecture Notes in Math., vol. 1243, Springer, Berlin, 1987, pp. 198-239.

[Seki] J. Sekiguchi, *Invariant spherical hyperfunctions on the tangent space of a symmetric space,* Algebraic groups and related topics (Kyoto/Nagoya, 1983), Adv. Stud. Pure Math., vol. 6, North-Holland, Amsterdam, 1985, pp. 83-126.

[Toro] C. Torossian, *Un théorème d'unicité pour les distributions sphériques sur l'espace tangent à un espace symétrique.* Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 72 (1996), no. 10, 230–231.