Chapter 2

Surfaces compactes

Une surface est une variété topologique de dimension 2. Dans ce chapitre on étudie les surfaces compactes.

2.1 Exemples et constructions

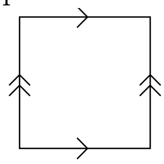
2.1.1 Exemples élémentaires

La sphère $\mathbf{S}^2$, le plan projectif $\mathbb{R}P^2$, le tore $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ sont des surfaces.

Le tore comme quotient d'un carré: L'application $f : [0,1] \times [0,1] \to S^1 \times S^1$ définie par $f(s,t) = (e^{i2\pi s}, e^{i2\pi t})$ est une application continue surjective d'un espace compact sur un espace séparé. C'est donc une application quotient, ce qui veut dire qu'on a un homéomorphisme

$$\widetilde{f} : [0,1] \times [0,1]/\sim \to \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 ,$$

où $\sim$ est la relation définie par l'égalité des images: $(s,t) \sim (s',t') \Leftrightarrow f(s,t) = f(s',t')$. Cette relation réalise des identifications sur le bord: $(0,t) \sim (1,t)$ et $(s,0) \sim (s,1)$. L'identification peut être représentée par le dessin



Le bord du carré est formé de quatre arêtes qui sont identifiées par paires. L'identification est représentée par un mot qui est formé par la suite des arêtes qui forment le bord, en utilisant le même symbole pour les arêtes identifiées et en utilisant le symbole avec une barre au dessus pour une arête qui a l'orientation contraire au parcours du bord. Ici $ab\overline{a}\overline{b}$.

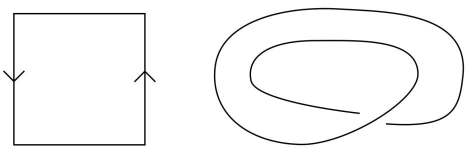
Pour $R > r > 0$, le passage au quotient de l'application $h : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$(s,t) \mapsto (x,y,z), \begin{cases} x = (R + r\cos 2\pi s)\cos 2\pi t \\ y = (R + r\cos 2\pi s)\sin 2\pi t \\ z = r\sin 2\pi s \end{cases}$$

définit un plongement du tore dans $\mathbb{R}^3$.

Le disque $\mathbf{D}^2$, le cylindre $[0,1] \times \mathbf{S}^1$ sont des surfaces à bord.

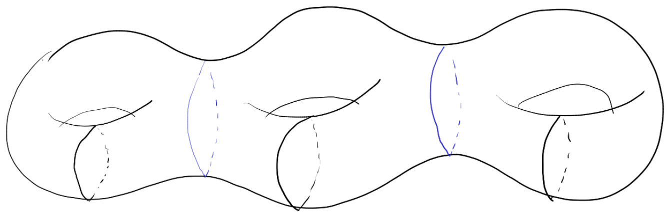
La bande de Mobius est le quotient $M = [0,1] \times [0,1]/(0,t) \sim (1, 1-t)$. C'est une surface à bord. On peut la coder avec le mot $abcb$ mais aussi avec le mot bbd (démontrer).



On obtient un tore troué avec un plongement d'un petit disque de rayon $2r$, $h : D^2_{2r} \to T = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$. Le tore troué est obtenu en enlevant l'image du disque ouvert de rayon r, $T_1 = T \setminus h(\mathring{D}^2_r)$. C'est une variété à bord. La restriction de h à la bande $\mathring{D}^2_{2r} - \mathring{D}^2_r$ définit un collier.

2.1.2 Recollements

Le recollement de 2 tores troués est une variété. L'opération qui consiste à trouer deux surfaces et les coller sur leur bord s'appelle une somme connexe. On obtient ainsi une suite de surfaces Σ_g, ou $\Sigma_1 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$, Σ_2 est le recollement de deux tores troués, et Σ_{g+1} est obtenu par somme connexe de Σ_g et Σ_1. On représente ci-dessous Σ_3.



Exercice 2.1.1. Identifier la surface obtenue en recollant une bande de Mobius à la sphère trouée (construire un homéomorphisme avec une surface vue dans les exemples précédents).

2.1.3 Surfaces polygonales

Soit $\mathcal{S} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un ensemble de symboles et $\mathcal{L} = \{a_1, \overline{a}_1, \ldots, a_n, \overline{a}_n\}$. Un codage de surface est un mot ou une suite de m mots dont les lettres sont dans $\mathcal{L}$ défini de sorte que chaque symbole apparaît deux fois.

Proposition 2.1.2. *Le quotient d'un ou m polygones par la relation qui identifie les deux arêtes associées au même symbole en tenant compte des orientations (sens positif pour a_i, négatif pour $\overline{a}_i$) est une surface compacte.*

Définition 2.1.3. Une surface polygonale est une surface obtenue à partir d'un ou plusieurs polygones en identifiant les arêtes par paires.

Remarque 2.1.4. Si les arêtes ne sont pas toutes identifiées, on obtient une surface à bord.

2.2 Les transformations élémentaires

Proposition 2.2.1. *Les mots ou suite de mots de surface reliés par les transformations élémentaires suivantes produisent des surfaces homéomorphes.*

1. *Renommer une arête ou son inverse, renommer x=ab et le cas échéant* $\overline{x} = \overline{b}\,\overline{a}$.
2. *Inverser un mot:* $\overline{m_1 m_2} = \overline{m_2}\,\overline{m_1}$.
3. *Rotation.*
4. *Couper/coller:* $(m_1 e, \overline{e} m_2) \leftrightarrow m_1 m_2$.
5. *Replier:* $m a \overline{a} \leftrightarrow m$.

Exercice 2.2.2. Démontrer que la bouteille de Klein K, définie avec le mot $aba\overline{b}$ est homéomorphe à la surface P_2 définie avec le mot $ccdd$

Définition 2.2.3. La caractéristique d'Euler d'un mot ou suite de mots de surface est définie par $\chi = f - a + s$, où f est le nombre de polygones (faces), a est le nombre d'arêtes et s le nombre de sommets (après les identifications).

Proposition 2.2.4. *Les transformations élémentaires ne changent pas la caractéristique d'Euler.*

Définition 2.2.5. Etant donné un mot de surface (un seul polygone) une paire d'arêtes identifiées est dite *croisée* dans le cas $\dots a \dots a \dots$ et *complémentaire* dans le cas $\dots a \dots \overline{a} \dots$.

Définition 2.2.6. Un mot de surface est de type (no) si et s'il contient au moins une paire croisée et de type (o) si toutes ses paires sont complémentaires.

Remarque 2.2.7. Si un mot de surface contient une paire croisée, alors il existe un ruban de Mobius plongé dans la surface. La réciproque sera démontrée plus tard dans ce cours.

2.3 Classification des surfaces polygonales

Les modèles de surfaces compactes connexes:

- la sphère $\mathbf{S}^2$,
- Σ_g , $g \geq 1$, définie avec $a_1 b_1 \overline{a}_1 \overline{b}_1 \dots a_g b_g \overline{a}_g \overline{b}_g$ $(\chi = 2 - 2g)$.
- P_g, $g \geq 1$, définie avec $a_1 a_1 \dots a_g a_g$ $(\chi = 2 - g)$.

La surface P_1 est homéomorphe au plan projectif $\mathbb{R}P^2$. La surface P_2 est homéomorphe à la bouteille de Klein définie par $aba\overline{b}$.

Théorème 2.3.1. *Toute surface polygonale connexe est homéomorphe à l'un des modèles ci-dessus. Plus précisément:*

- *tout mot de surface de type (o) est équivalent par transformations élémentaires à un mot de la forme $a\overline{a}$ ou $a_1 b_1 \overline{a}_1 \overline{b}_1 \dots a_g b_g \overline{a}_g \overline{b}_g$.*
- *tout mot de surface de type (no) est équivalent par transformations élémentaires à un mot de la forme $a_1 a_1 \dots a_g a_g$.*

Remarque 2.3.2. Dans chaque cas la valeur de g est déterminée par la caractéristique d'Euler.

On démontrera bientôt dans ce cours que les modèles sont 2 à 2 non homéomorphes. Il est plus difficile de démontrer que toute surface compacte est homéomorphe à une surface polygonale. Nous y reviendrons. La preuve du théorème de classification résulte des lemmes suivants:

Lemme 2.3.3. *Toute surface polygonale connexe est homéomorphe au quotient d'un seul polygone.*

Deux mots de surface sont dits équivalents si et seulement si ils se correspondent par transformations élémentaires

Lemme 2.3.4. *Tout mot de surface est équivalent à un mot qui représente une surface avec un seul sommet.*

Lemme 2.3.5. *Tout mot de surface de type (o) avec un seul sommet et distinct de $a\overline{a}$ est équivalent à un mot qui contient $ab\overline{a}\overline{b}$.*

Lemme 2.3.6. *Tout mot de type (no) est équivalent à un mot qui contient aa.*

Lemme 2.3.7. *Le mot $ab\overline{a}\overline{b}cc$ est équivalent à $aabbcc$.*