Chapter 7

Cohomologie

7.1 Groupes de cohomologie et coefficients universels

Définition 7.1.1. Un complexe de cochaînes $C = (C^n, \delta^n)$ est une suite de groupes abéliens C^n, $n \in \mathbb{Z}0$, et une suite de morphismes $\delta^n : C^n \to C^{n+1}$, vérifiant pour tout n: $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$.

Etant donné un complexe de cochaînes (C^n, ∂^n), on définit sa cohomologie:

$$H^n(C) = \frac{Z^n(C)}{B^n(C)} ,$$

où $Z^n(C) = \mathrm{Ker}(\delta^n)$ est le sous-groupe des cocycles, et $B^n(C) = \mathrm{Im}(\delta^{n-1})$ est le sous-groupe des cobords.

La dualité permet de construire un complexe de cochaînes à partir d'un complexe de chaînes: si $C = (C_*, \partial_*)$ est un complexe de chaînes et G un groupe, alors les groupes $C^n = Hom(C_n, G)$ forment

La cohomologie singulière à coefficients dans le groupe abélien G est obtenue avec les complexes de cochaînes $C^*(X, A; G) = Hom(C_*(X, A), G))$.

Coefficients universels

On peut restreindre cette section au cas des groupes abéliens, qui sont les modules sur $\mathbb{Z}$. On rappelle que tout sous-module d'un module libre sur un anneau principal est libre. Il en résulte que tout module M sur un anneau principal a une présentation libre: il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0 ,$$

avec L et R qui sont des modules libres.

Lemme 7.1.2. *Soient* $\mathbf{k}$ *un anneau princimal,* $f : M \to M'$ *une application* $\mathbf{k}$*-linéaire, et des présentations libres:*

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0 ,$$

$$0 \longrightarrow R' \xrightarrow{i'} L' \xrightarrow{p'} M' \longrightarrow 0 ,$$

il existe une application linéaire canonique entre les conoyaux:

$$\operatorname{coker}({}^t i') \longrightarrow \operatorname{coker}({}^t i) ,$$

définie par passage au quotient de la transposée de la restriction à R *d'un relèvement de* $f \circ p$ *à* L*.*

Ici la transposée est associée à la dualité à valeur dans G: ${}^t i = \operatorname{Hom}(i, \operatorname{Id}_G)$.

Théorème 7.1.3. *Avec les notations précédentes, le groupe*

$$\operatorname{Ext}(M, G) = \operatorname{coker}(\operatorname{Hom}(i, \operatorname{Id}_G))$$

est canonique et Ext *s'étend en un bifoncteur, contravariant dans la première variable et covariant dans la seconde. On a alors pour toute présentation libre*

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0 ,$$

une suite exacte:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(M, G) \longrightarrow \operatorname{Hom}(L, G) \longrightarrow \operatorname{Hom}(R, G) \longrightarrow \operatorname{Ext}(M, G) \longrightarrow 0 .$$

Exercice 7.1.4. Calculer $\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.

Exercice 7.1.5. Montrer que pour G fixé, $\operatorname{Ext}(., G)$ commute avec les sommes directes.

Proposition 7.1.6. *Pour un groupe abélien* M*,* $\operatorname{Ext}(M, \mathbb{Z})$ *est égal au sous-groupe de torsion (éléments d'ordre fini).*

Théorème 7.1.7 (Coefficients universels)**.** *Etant donné un complexe de chaînes libre* $C = (C_*, \partial_*)$*, pour tout groupe abélien* G *il existe une suite exacte naturelle*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}(H_{n-1}(C), G) \longrightarrow H^n(\operatorname{Hom}(C, G)) \longrightarrow \operatorname{Hom}(H_n(C), G) \longrightarrow 0 .$$

De plus la suite est scindée, mais ne l'est pas naturellement.

7.2 Anneau de cohomologie

On commence par définir le produit *cup* au niveau des cochaînes à coefficients dans un anneau Λ. Pour $\alpha \in C^p(X, \Lambda)$, $\beta \in H^q(X, \Lambda)$, σ un $p+q$-simplexe singulier dans X:

$$< \alpha \cup \beta, \sigma >= (-1)^{pq} < \alpha, {}_p\sigma >< \beta, \sigma_q > \ .$$

Ici, ${}_p\sigma(t_0, \ldots, t_p) = \sigma(t_0, \ldots, t_p, 0, \ldots, 0)$ et $\sigma_q(t_0, \ldots, t_q) = \sigma(0, \ldots, 0, t_0, \ldots, t_q)$

Le produit tensoriel $C^* \otimes C'^*$ de deux complexes de cochaînes est un complexe de cochaînes avec la différentielle d définie par:

$$d\, \alpha \otimes \beta = (\delta\alpha) \otimes \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \otimes (\delta'\beta) \ .$$

Proposition 7.2.1. *Le produit cup est un morphisme de complexes de cochaînes.*

Théorème 7.2.2. *Le produit cup induit sur la cohomologie une opération, qui munit $H^*(X, \Lambda)$ d'une structure d'anneau.*

Cas relatif

Définition 7.2.3. Soient A et B deux sous-espaces de X. On dit que (A, B) est un couple excisif dans X si et seulement si l'application donnée par les inclusions de $C(A) + C(B)$ dans $C(A \cup B)$ induit un isomorphisme en homologie.

C'est le cas si A et B sont ouverts dans $A \cup B$.

Théorème 7.2.4. *Si (A, B) est un couple excisif dans X, alors le produit cup est défini:*

$$H^p(X, A; \Lambda) \otimes H^p(X, B; \Lambda) \to H^{p+q}(X, A \cup B; \Lambda) \ .$$

Propriétés du produit cup

1. Fonctorialité.
2. Supersymétrie: $\alpha \cup \beta = (-1)^{\deg(\alpha)\deg(\beta)} \beta \cup \alpha$.
3. Relation avec l'exactitude.
   Pour $i : A \hookrightarrow X$, $\alpha \in H^p(A, \Lambda)$, $\beta \in H^q(X, \Lambda)$,

   $$\delta(\alpha \cup i^*(\beta)) = (\delta\alpha) \cup \beta \ .$$

   Ici δ est le connectant $H^*(Y, \Lambda) \to H^{*+1}(X, Y; \Lambda)$ dans la suite exacte longue de la paire (induit par le cobord).

7.3 Action sur l'homologie

Le produit cap sur les chaînes est l'homomorphisme

$$\cap : C^p(X,\mathbb{Z}) \otimes C_{p+q}(X,\mathbb{Z}) \to C_q(X,\mathbb{Z}) \ ,$$

défini pour une p-cochaîne α et un $(p+q)$-simplexe σ par

$$\alpha \cap \sigma = \langle \alpha, {}_p\,\sigma \rangle \sigma_q \ .$$

Théorème 7.3.1. *Le produit cap induit un homomorphisme fonctoriel*

$$\cap : H^p(X,\mathbb{Z}) \otimes H_{p+q}(X,\mathbb{Z}) \to H_q(X,\mathbb{Z}) \ ,$$

qui munit l'homologie $H_*(X,\mathbb{Z})$ d'une structure de module sur l'anneau de cohomologie.

Cas relatif

Théorème 7.3.2. *Si (A,B) est un couple excisif dans X, alors le produit cap est défini:*

$$H^p(X,A;\Lambda) \otimes H_{p+q}(X,A\cup B;\mathbb{Z}) \to H^q(X,B;\mathbb{Z}) \ .$$

Dualité de Poincaré

Théorème 7.3.3. *Soit M une variété compacte connexe orientée de dimension n, et $[M] \in H_n(M,\mathbb{Z})$ sa classe fondamentale, alors, pour $p+q=n$, le produit cap avec la classe fondamentale définit un isomorphisme:*

$$\begin{array}{rccc} D: & H^q(M,\mathbb{Z}) & \to & H_p(M,\mathbb{Z}) \\ & \alpha & \mapsto & \alpha \cap [M] \end{array}$$

Dans la cas à bord:

Théorème 7.3.4. *Soit M une variété compacte de dimension n à bord,alors, pour $p+q=n$, le produit cap avec la classe fondamentale définit un isomorphisme:*

$$\begin{array}{rccc} D: & H^q(M,\partial M;\mathbb{Z}) & \to & H_p(M,\mathbb{Z}) \\ & \alpha & \mapsto & \alpha \cap [M] \end{array}$$

7.4 La cohomologie de De Rham

On appelle variété différentiable, ou variété lisse, une variété munie d'un atlas dont les changements de cartes sont C^∞ (à équivalence près). Pour les variétés lisses M, on définit le complexe des chaînes singulières lisses, librement engendré par les simplexes

$\sigma : \Delta_n \to M$ qui sont restrictions d'applications C^∞ définies sur un voisinage ouvert de Δ_n dans $\mathbb{R}^{n+1}$. On obtient alors un sous-complexe $C_*^\infty(M)$, dont l'homologie est isomorphe à l'homologie singulière.

On note $\Omega^p(M)$ l'espace des p-formes différentielles (à coefficients réels) sur la variété lisse M. Avec la dérivée extérieure $d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ on obtient un complexe de cochaînes qui définit la cohomologie de De Rham $H^*_{\mathrm{DR}}(M)$. La formule de Stokes démontre que l'intégration sur les simplexes lisses

$$\omega \mapsto \int_\sigma \omega = \int_{\Delta_p} f^*\sigma \ ,$$

définit un morphisme de complexes de cochaînes

$$F : \Omega^*(M) \to C^*_\infty(M, \mathbb{R}) \ ,$$

qu'on appelle morphisme de De Rham.

Théorème 7.4.1 (De Rham)**.** *Pour les variétés lisses, la cohomologie de De Rham est naturellement isomorphe à la cohomologie singulière.*