Sur la cohomologie $H^*_{DR}(M)$

But : Preuve du théorème :

$$\boxed{H^*_{DR}(M) \simeq H^*(M, \mathbb{R})}$$

pour toutes les variétés différentiables

Rappel : $\Omega^p(M) \to C^p_\infty(M, \mathbb{R})$

L'intégration sur les simplexes lisses définit un morphisme de complexe de cochaînes.

On va montrer que cela induit un iso en cohomologie.

1. Mayer-Vietoris pour H^*_{DR}
2. Lemme de Poincaré : cas d'un ouvert convexe.
3. Homologie et cohomologie C^∞_* et C^*_∞.
4. "Bootstrap"

<u>Théorème</u>: Soit U et V des ouverts dans une variété différentiable, alors on a une suite exacte longue.

$$\to H^*(U\cup V) \xrightarrow{(j_U)^*\oplus (j_V)^*} H^*(U)\oplus H^*(V) \xrightarrow{(i_U)^*-(i_V)^*} H^*(U\cap V) \xrightarrow{\delta^*} H^{*+1}(U\cup V)$$

Lemme : Suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \Omega^p(U \cup V) \longrightarrow \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) \longrightarrow \Omega^p(U \cap V) \to 0$$

Rappel : $\Omega^p(M)$ est l'espace des sections continues du fibré : $\Lambda^p TM \longrightarrow M$.

1. injectivité ok
2. exactitude
   a) La composition s'annule. ok
   b) Soit (ω_U, ω_V) tel que $(i_U)^*(\omega_U) - (i_V)^*(\omega_V) = 0$

On utilise une "partition de l'unité".

$f_U \; U \cup V \longrightarrow [0,1]$, $f_V \; U \cup V \longrightarrow [0,1]$

$f_U + f_V = 1$, f_U nulle sur $V - U$
f_V —— $U - V$

On peut prolonger $f_U . \omega_U$ à $U \cup V$
________________ $f_V \omega_V$ à $U \cup V$

$\omega = f_U \omega_U + f_V \omega_V$ $\quad (j_U)^*(\omega) = \omega_U$

$(j_V)^*(\omega) = \omega_V$

3. Surjectivité :

Pour $\omega \in \Omega^p(U \cap V)$

Avec une partition de l'unité f_U, g_U

$f_U \omega$ se prolonge à V

$f_V \omega$ ________________ U.

$\omega = f_U \omega - f_V \omega$ sur $U \cap V$.

Lemme $\Rightarrow$ suite exacte longue.

Lemme de Poincaré : Si U est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, alors $H^*_{DR}(U) \simeq H^*_{DR}(pt)$.

On peut supposer que $0 \in U$.

En degré 0 : $H^0_{DR}(U) = Z^0(U)$

$$= \{ f ,\ df = 0 \}$$

$$= \mathbb{R}.$$

Ci-dessous la preuve qu'en degré $p \geq 1$ toute p-forme **fermé** ($d\omega \neq 0$) est **exacte** : $\omega = d\eta$.

$$H^p(M) = \frac{\text{formes fermées}}{\text{formes exactes}} = \frac{Z^p(M)}{B^p(M)}$$

9.2. Lemma (Poincaré Lemma). *The de Rham Theorem (Theorem* 9.1) *is true for any convex open subset U of* $\mathbf{R}^n$.

PROOF. We can assume that U contains the origin. We must show:

(i) that any closed p-form ω, $p \geq 1$, on U is exact; and
(ii) that any smooth function f on U with $df = 0$ is constant (this suffices because the de Rham map takes a constant function with value r to the constant 0-cocycle taking value r on each 0-simplex).

Part (ii) is clear since $df = 0$ means that all partials of f are zero, implying that f is locally constant, hence constant since U is connected.

We prove part (i) on $U \subset \mathbf{R}^{n+1}$, for notational convenience, with coordinates $x_0, \ldots, x_n$. For $p \geq 0$, we define

$$\phi\colon \Omega^{p+1} \to \Omega^p$$

as follows: If $\omega = f(x_0, \ldots, x_n)\, dx_{j_0} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p}$ then put

$$\phi(\omega) = \left(\int_0^1 t^p f(tx)\, dt \right) \eta,$$

where

$$\eta = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i x_{j_i}\, dx_{j_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_{j_i} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p}.$$

Then, using D_k to denote the partial derivative with respect to the kth variable,

$$
\begin{aligned}
d\phi(\omega) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 t^{p+1} D_k f(tx)\, dt \right) dx_k \wedge \eta + \left(\int_0^1 t^p f(tx)\, dt \right) d\eta \\
&= S + T,
\end{aligned}
$$

where S is the sum term and T the rest. Also

$$
d\omega = \sum_{k=0}^{n} D_k f(x)\, dx_k \wedge dx_{j_0} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p},
$$

so that

$$
\begin{aligned}
\phi(d\omega) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 t^{p+1} D_k f(tx)\, dt \right) (x_k\, dx_{j_0} \wedge \cdots dx_{j_p} - dx_k \wedge \eta) \\
&= \sum_{k=0}^{n} x_k \left(\int_0^1 t^{p+1} D_k f(tx)\, dt \right) dx_{j_0} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p} - S \\
&= \left(\int_0^1 t^{p+1} \frac{d}{dt} f(tx)\, dt \right) dx_{j_0} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p} - S \\
&= \left\{ t^{p+1} f(tx) \Big]_0^1 - (p+1) \int_0^1 t^p f(tx)\, dt \right\} dx_{j_0} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p} - S \\
&= \omega - T - S,
\end{aligned}
$$

since $d\eta = (p+1) dx_{j_0} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p}$. Then $d\phi(\omega) + \phi(d\omega) = \omega$ for $\omega \in \Omega^p(\mathbf{R}^{n+1})$, $p \geq 1$. Thus, if $d\omega = 0$ then $\omega = d(\phi(\omega))$, as required. □

Remarque : On peut en fait démontrer que H^*_{DR} est un invariant d'homotopie :

si $h : [0,1) \times X \longrightarrow Y$ est une homotopie entre f et g, telle que h_t est différentiable, alors il existe une $\boxed{\text{homotopie algébrique}}$

$$\Omega^p(Y) \longrightarrow \Omega^{p-1}(X)$$

qui permet de démontrer que : f^* et g^*
$$H^*(Y) \longrightarrow H^*(X)$$
sont égales,

Homologie H_*^{∞} :

On a Mayer Vietoris. OK

On a l'homotopie. OK

Les preuves sont les mêmes. que pour l'homologie singulière

petites chaînes

« cylindre »

Preuve de l'iso de De Rham avec la méthode « bootstrap » :

1. $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert convexe.

$$H^*_{DR}(U) = H^*_{DR}(pt) = H^*_{\infty}(pt) \underset{\text{homotopie.}}{=} H^*_{\infty}(\cancel{U}\, U) = H^*(U)$$

<u>Plutôt</u> : On a

$$\begin{array}{ccccc} H^*_{DR}(U) & \xrightarrow[\sim]{} & H^*_\infty(U) & \xleftarrow[\sim]{} & H^*(U) \\ \wr\| & & \wr\| & & \wr\| \\ H^*_{DR}(pt) & = & H^*_\infty(pt) & = & H^*(pt) \end{array}$$

chacun iso

2. Union d'un nombre fini de ouverts convexes de $\mathbb{R}^n$.

$U = \bigcup_{i=1}^{K} U_i$ les intersections sont aussi convexes.

ok par récurrences.

3. Ouvert qq de $\mathbb{R}^n$.

U est réunion dénombrable d'ouverts convexes.

On réécrit : $U = \bigcup_n U_n$

où U_n est une suite croissante d'ouverts qui sont réunions finis d'ouverts convexes.

~~Les~~ $H^*_{DR}(U) = \varprojlim_n H^*_{DR}(U_n)$

est caractérisé par :

1. $\alpha \in H^*_{DR}(U)$ définit une suite "cohérente" de restrictions : $(i_n)^*(\alpha)$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^*_{DR}(U_n) \arrow[rr] & & H^*_{DR}(U_{n-1}) \arrow[r] & \cdots \\
& & H^*_{DR}(U) \arrow[ul, "(i_n)^*"] \arrow[ur, "(i_{n-1})^*"'] \arrow[ull] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

2. Une suite cohérente α : $\alpha_n \in H^*_{DR}(U_n)$ définit de façon unique $\alpha \in H^*_{DR}(U)$.

Idem pour $H^*_\infty(U)$ et $H^*(U)$.

On déduit les iso $H^*_{DR}(U) \xrightarrow{\sim} H^*_\infty(U) \xleftarrow{\sim} H^*(U)$

4. Cas d'un ouvert de M correspondant à une carte. ✓
5. Cas d'un ouvert de M correspondant à un nombre fini de carte. ✓
6. Cas d'un ouvert général.
M est à base dénombrable
On peut le recouvrir avec un ensemble dénombrable de cartes :
On réécrit comme précédemment comme une union croissante et on utilise la limite.

Sur la limite projective.

$$U = \bigcup_n U_n \qquad U_n \nearrow$$

$$H^p_{DR}(U) = \frac{Z^p(U)}{B^p(U)}$$

Pour $\alpha = [\omega] \in H^p_{DR}(U)$ par fonctorialité on a une suite cohérente de restrictions.

Inverse : $[\omega_n] \in H^p_{DR}(U_n)$ une suite cohérente.

Partition de l'unité : $f_n \geq 0$, $\sum f_n = 1$

f_n est nulle en dehors de U_n.

$$\omega = \sum f_n \omega_n \in \Omega^p(U)$$

$$d\omega = 0$$

$$(i_n)^*([\omega]) = [\omega_n].$$

C'est l'unique classe qui vérifie ça.

<u>idem</u> pour $H^*_\infty(U)$.

$\square$

Sur la dualité de Poincaré.

Isomorphisme : $H^p_c(M) \simeq H_q(M)$

lorsque M est une n-variété orientée.

$n = p + q$

Où l'iso est obtenu comme limite de

$$H^p(M, M-K) \otimes \longrightarrow H_q(M)$$

$$\alpha \longmapsto \alpha \cap \mu_K$$

$\mu_K \in H^n(M, M-K)$.

Pour la preuve : "bootstrap"

1. Cas U convexe de $\mathbb{R}^n$
2. Réunion finie de convexes de $\mathbb{R}^n$.
3. Ouvert de $\mathbb{R}^n$ qq.
4. M qq :

Pour terminer : lien entre la dualité de Poincaré et le produit cup.

<u>Théorème :</u> Soit A et B des sous-variétés de M, M orientée de dim $n = p+q$.

$\dim A = p$ $\dim B = q$

On suppose que les intersections de A et B

sont transverse : les tangents sont supplémentaires.

<u>Hyp :</u> Les duaux de Poincaré de $\alpha \in H^q(M)$ et $\beta \in H^p(M)$ sont $[A]$ et $[B]$ (classes fondamentale)

alors $\langle \alpha \cup \beta, [M] \rangle = [B] \cdot [A]$

où $[B] \cdot [A]$ compte les intersections avec signes.

Référence : Bredon ch VI, section 11.