

Théorème 3.5.2

Explication sur les générateurs

$$i_n = \text{Id}_{\Delta_n} : \Delta_n \longrightarrow \Delta_n$$

est un élément de base dans $C_n(\Delta_n)$,
est un cycle modulo $C_n(\partial\Delta_n)$

$$\text{i.e. } i_n \in Z_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$$

$$[i_n] \in H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$$

$$\partial i_n \in C_{n-2}(\partial\Delta_n)$$

$$\in Z_{n-2}(\partial\Delta_n)$$

$$[\partial i_n] \in H_{n-2}(\partial\Delta_n)$$

Le théorème dit que ce sont des générateurs libres

$$(1) \quad \xrightarrow{n \geq 2} 0 \longrightarrow H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n) \xrightarrow[\sim]{d_n} H_{n-2}(\partial\Delta_n) \longrightarrow 0$$

$$(2) \quad 0 \longrightarrow H_{n-2}(\partial\Delta_n) \xrightarrow[\sim]{j_*} H_{n-2}(\partial\Delta, \partial\Delta_n - F_0^n(\Delta_{n-2})) \longrightarrow 0$$

$$\uparrow \quad F_0^n$$

$$H_{n-2}(\Delta_{n-2}, \partial\Delta_{n-2})$$

Par récurrence: $[i_n]$ engendre $H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n) = \mathbb{Z}$.

$$\text{Dans (1)} : \quad d_n([i_n]) = [\partial i_n] \quad \Bigg\|$$

$$\text{Dans (2)} : \quad \left((F_0^n)^{-1} \circ j_* \right) ([\partial i_n]) = [i_{n-1}]. \quad \Bigg\|$$

Cas $n=2$: suite (2)

$$0 \longrightarrow H_2(\partial\Delta_2) \xrightarrow{\sim} \underbrace{H_2(\Delta_2, \partial\Delta_2)}_{\text{connu}} \longrightarrow 0$$

$$\mathbb{Z} \cdot [\partial i_2]$$

$$\mathbb{Z} \cdot [i_2]$$

$$\rightarrow H_x(\partial \Delta_2) \rightarrow H_x(\Delta_2) \rightarrow H_x(\Delta_2, \partial \Delta_2) \xrightarrow{d_2}$$

$\begin{matrix} \text{"} \\ \{-2, 2\} \end{matrix}$

$$x > 2$$

$$x = 1$$

$$x = 0$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (a, b) & \longmapsto & a+b \end{array}$$

$$H_2 = \ker d_2$$

$$0$$

$$d_2([i_2]) = \underbrace{(1, -2)}_{\text{eng } H_1} \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = H_0(\{-2, 2\})$$

eng \$H_1\$ eng \$H_1\$ \$d_2\$

Avec (2) : $[i_2]$ est base de $H_2(\Delta_2, \partial \Delta_2)$

Par. réc. avec (2) puis (1), $\mathbb{Z}$
on a le résultat.

Q: Générateur de $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \cong \mathbb{Z}$.

$$H_n(\Delta_n, \partial \Delta_n) \rightarrow H_n(\Delta_n, \Delta_n - g)$$

où $g = (\frac{1}{n+2}, \dots, \frac{1}{n+2})$ est
le barycentre.

$$\begin{array}{ccc} \sigma : \Delta_n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (t_0, \dots, t_n) & \longmapsto & (t_1 - t_0, t_2 - t_0, \dots, t_n - t_0) \end{array}$$

$$\sigma(g) = 0$$

σ est un plongement affine :

$$e_0 \longmapsto b_- = (-1, \dots, -1)$$

$$j \geq 1 \quad e_j \longmapsto b_j = (0, \dots, 1, \dots, 0) \quad \left. \vphantom{e_j} \right\} \text{ base de } \mathbb{R}^n.$$

l'image de σ est $\text{conv}(b_-, b_1, \dots, b_n)$

σ a été noté : $\langle b_-, b_1, \dots, b_n \rangle$.

Par équivalence d'homotopie

$$\partial \Delta_n \xrightarrow{\sim} \Delta_n - q$$

on a: $[i_n]$ base de $H_n(\Delta_n, \Delta_n - q)$

Par homéomorphisme:

$$[\sigma] = \sigma_*([i_n]) \longrightarrow H_n(\sigma(\Delta_n), \sigma(\Delta_n) - 0)$$

$\sigma(q) = 0$

Par excision $[\sigma]$ est base de

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) = \mathbb{Z}.$$

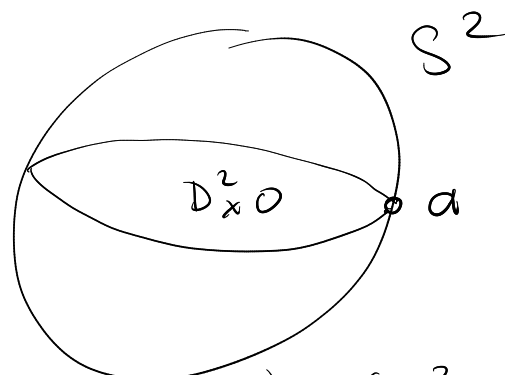
Q4: Exercice 3.5.7,

$$X = S^2 \cup (D^2 \times 0) \ni a = (1, 0, 0)$$

① $H_*(X, X - a) ?$

$$H_*(X - a)$$

X



contractile

Autre solution: $X - a = (D^2 - a) \cup (S^2 - a)$.

On peut utiliser Mayer-Vietoris car on peut à équivalence d'homotopie près remplacer $D^2 - a$ et $S^2 - a$ par des voisinages ouverts.

$$H_*(D^2 - a) = 0 \text{ pour } * > 0$$

contractile

idem

pour

$S^2 - a$

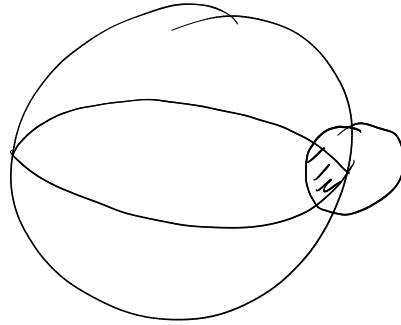
$$(D^2 - a) \cap (S^2 - a) = S^2 - a$$

On déduit $H_k(X - a) = \begin{cases} 0 & k > 0 \\ \mathbb{Z} & k = 0 \end{cases}$

Exactitude :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & H_x(X-a) & \rightarrow & H_x(X) & \rightarrow & H_x(X, X-a) & \rightarrow \\ & & & & \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}^2 & & & \\ x=2 & & & & 0 & & 0 & & 0 & \\ & & & & | & & & & & \\ x=1 & & & & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z} & & 0 & \\ & & & & & & & & & \\ x=0 & & & & & & & & & \end{array}$$

Autre méthode : $X \cap D^3(a, \varepsilon) \simeq$



$\int h$



Orientation M variété de dimension n .

Orientation locale : $\mu_x \in H_n(M, \mathbb{R}-x) \simeq \mathbb{Z}$
générateur. ($x \in M$)

Pour un disque fermé D_x voisinage de x ,
on a $H_n(M, \mathbb{R}-D_x) \xrightarrow{\sim} H_n(M, \mathbb{R}-x)$

Pour $y \in \overset{\circ}{D}_x$ $\downarrow$ μ_{D_x} générateur μ_x
 $H_n(M, \mathbb{R}-y)$

Choix de générateur $\mu_x \Rightarrow$ choix de générateur
sur un voisinage : $(\mu_y)_{y \in \overset{\circ}{D}_x}$

Orientation globale sur M : famille continue
 $(\mu_x)_{x \in M}$ d'orientation locale.

"Continue" peut se définir comme étant compatibles sur tout disque.

Théorème: Section du revêtement d'orientation: $\tilde{M} \xrightarrow{\sim} M$
 $\tilde{M}$ est l'ensemble des (x, μ_x) avec la topologie appropriée.

$\mathbb{R}^n$ est orienté $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \ni \mu_0 = [\underbrace{e_1, \dots, e_n}]_{\text{standard}}$
 $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\})$

translation $t_x(y) = y + x$. $(t_x)_*(\mu_0) = \mu_x$

Atlas orienté: Pour tout changement de carte, on préserve le générateur orienté.

Cas lisse: équivalent à déterminant jacobien > 0

THM: M est orientée ssi elle admet un atlas orienté.

THM: Pour M compacte connexe

M est orientée si et seulement si $H_n(M) \simeq \mathbb{Z}$.

Il existe une classe fondamentale: $[M] \in H_n(M)$

$$\forall x \quad \underbrace{p_x([M])}_{=} = \underbrace{\mu_x}_{=} \in H_n(M, M-x)$$

Ici $p_x: H_n(M) \rightarrow H_n(M, M-x)$ est induite par l'inclusion.

Pour K compact: $\mu_K \in H_n(M, M-K)$

Sur le chapitre 5

Lemme: $H_k(C_*(\Delta_p) \otimes C_*(\Delta_p), \partial^\otimes) = 0$ pour $k > 0$.

Preuve dans le livre de Bredon, Lemma 1.1 p 316.

Idee: Construire une homotopie

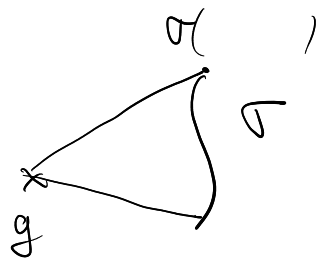
$$E: (C_*(\Delta_p) \otimes C_*(\Delta_p))_n \rightarrow (C_*(\Delta_p) \otimes C_*(\Delta_p))_{n+1}$$

en utilisant la construction du cône qui a démontré que Δ_p est acyclique.

Rappel: $g = (\frac{1}{p+2}, \dots, \frac{1}{p+2}) \in \Delta_p$

$$D: C_k(\Delta_p) \rightarrow C_{k+2}(\Delta_p)$$

$$\sigma \mapsto \langle g, \sigma \rangle$$



$$(t_0, \dots, t_{p+2}) \mapsto (t_0 g, (1-t_0) \sigma + (\frac{t_1}{1-t_0}, \dots))$$

$$(\partial \circ D + D \circ \partial)(\sigma) = \sigma \text{ si } \sigma \text{ est un } k\text{-simplexe, } k > 0$$

$$(\quad)(\sigma_0) = \sigma_0 - g, \text{ pour } \sigma_0 = x \text{ 0-simplexe.}$$

Formule pour E: $E = D \otimes Id + \underline{\underline{\varepsilon}} \otimes D$

ou $\varepsilon_k: C_k(\Delta_n) \rightarrow C_k(\Delta_n) = 0$ si $k > 0$

$$\varepsilon_0: C_0(\Delta_n) \rightarrow C_0(\Delta_n)$$

$$\sigma_0 = x \mapsto g$$

$$(E \circ \partial^\otimes + \partial \circ E)(\sigma \otimes \tau) = \sigma \otimes \tau \text{ si } \sigma \text{ est } k\text{-simplexe}$$

$$(E \circ \partial^\otimes + \partial^\otimes \circ E)(\sigma_0 \otimes \tau_0) = \sigma_0 \otimes \tau_0 - g \otimes g \text{ si } k \text{ ou } l > 0.$$

~~def~~ $\left(\begin{array}{l} E(\sigma \otimes \tau) = D\sigma \otimes \tau \quad \text{si } k > 0 \\ E(\sigma_0 \otimes \tau) = g \otimes D\tau \quad \text{si } k = 0 \end{array} \right.$
 $\partial^*(\sigma \otimes \tau) = (\partial\sigma) \otimes \tau + (-1)^k \sigma \otimes \partial\tau$

Cas $k > 0$

$$\begin{aligned}
 (E \circ \partial)(\sigma \otimes \tau) &= E((\partial\sigma) \otimes \tau + (-1)^k \sigma \otimes \partial\tau) \\
 &= (D\partial\sigma) \otimes \tau + (-1)^k D\sigma \otimes \partial\tau \\
 (\partial \circ E)(\sigma \otimes \tau) &= \partial(D\sigma \otimes \tau) \\
 &= (\partial D\sigma) \otimes \tau + (-1)^{k+1} D\sigma \otimes \partial\tau
 \end{aligned}$$

Somme $= (D\partial + \partial D)(\sigma) \otimes \tau = \sigma \otimes \tau$

Pour $k = 0$ $l > 0$

$$(D\partial)(\sigma_0 \otimes \tau) = D(g \otimes \partial\tau) \quad \varepsilon(\sigma_0) = g$$

voir la suite page suivante.

Homologie cellulaire

CW-complexe: $X = (X^n)_{n \geq 0}$ espace filtré

où $X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^n$

$$\bigcup_n X^n = X$$

Il existe un homéo. $X^{n-1} \cup \left(\bigsqcup_i D_i^n \right) \xrightarrow{\sim} X^n$

$$\text{Ici } \phi_i : S_i^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$$

est l'application d'attachement.

En pratique: On définit une application

suite page n+2

suite de la page n-2

$$E(\sigma \otimes \tau) = D\sigma \otimes \tau \quad k = \deg \tau > 0$$

$$E(\sigma_0 \otimes \tau) = D\sigma_0 \otimes \tau + g \otimes D\tau, \quad \deg \sigma_0 = 0$$

$$g = E(\sigma_0).$$

Formule d'homotopie cas $k=0$.

$$\partial(\sigma_0 \otimes \tau) = \cancel{\partial \sigma_0 \otimes \tau} + \sigma_0 \otimes \partial \tau$$

$$D\partial(\sigma_0 \otimes \tau) = g \otimes \cancel{D\partial \tau} + \cancel{D\sigma_0} \otimes \tau$$

$$\partial D(\sigma_0 \otimes \tau) = \partial(g \otimes \tau) + \partial D\sigma_0 \otimes \tau$$

$$= g \otimes (\partial D)\tau + (\sigma_0 - g) \otimes \tau - \cancel{D\sigma_0} \otimes \partial \tau$$

$$(D\partial + \partial D)(\sigma_0 \otimes \tau) = g \otimes \underbrace{(D\partial + \partial D)(\tau)}_x + (\sigma_0 - g) \otimes \tau.$$

Si $l = \deg \tau > 0$

$$(D\partial + \partial D)(\sigma_0 \otimes \tau) = g \otimes \tau + (\sigma_0 - g) \otimes \tau$$

$$= \sigma_0 \otimes \tau$$

Si $l = \deg \tau_0 = 0$

$$(D\partial + \partial D)(\sigma_0 \otimes \tau_0) = g \otimes (\sigma_0 - g) + (\sigma_0 - g) \otimes \tau_0$$

$$= \sigma_0 \otimes g_0 - g \otimes g \quad \square$$

Homotopie entre $\text{Id}_{C_\infty(\Delta_n) \otimes C_\infty(\Delta_n)}$ et

et $\sigma \otimes \tau \mapsto 0$ en $\deg > 0$

$\sigma_0 \otimes \tau_0 \mapsto g \otimes g$ en $\deg = 0$

$\Rightarrow$ Annullité

$$X^{n-1} \coprod \left(\coprod_i D_i^n \right) \longrightarrow X^n$$

$$\mathcal{U} \longmapsto \mathcal{U}$$

$$y_i \longmapsto \Phi_i(y_i)$$

qui induit l'homéomorphisme attendu.

Les Φ_i paramétrisent les cellules et sont des homéomorphismes sur les cellules ouvertes.

cf corrigé du devoir 3.

Complexes cellulaires :

Calcul : $H_*(X^n, X^{n-2}) = \begin{cases} 0 & * \neq n \\ \text{libre pour } * = n \\ \text{avec base les} \end{cases}$

$(\Phi_i)_* ([D_i^n])$ noter simplement par e_i^n ; même notation que la cellule ouverte, mais avec l'orientation fixée.

Def : $C_n^{cell}(X) := H_n(X^n, X^{n-2})$ est libre de base les cellules ouvertes orientées.

? $\boxed{\partial_n^{cell}}$

$$H_n(X^n, X^{n-2}) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-2}(X^{n-2})$$

$$\downarrow j_{X^{n-2}} \partial_n^{cell} \rightarrow H_{n-2}(X^{n-2}, X^{n-2})$$

THM : $H_*^{cell}(X) \cong H_*(X)$.

Calcul de ∂_n^{cell} .

Pour une cellule orientée e_i^n

$$\partial_n^{\text{cell}} e_i^n = \sum_j \text{coeff}_j e_j^{n-1}$$

↑ nombre d'incidence, noté:

$$[e_i^n : e_j^{n-1}]$$

Proposition: $[e_i^n : e_j^{n-1}]$ est un degré de la composition.

$$\begin{array}{ccccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\phi_i} & X^{n-1} & \longrightarrow & X^{n-1} / X^{n-2} \cong \mathbb{P}_j^{n-2}(\mathbb{D}_j^{n-1}) \\ & \searrow \psi_i^j & & & \parallel \\ & & & & \mathbb{D}_j^{n-2} / S_j^{n-2} \cong S^{n-2} \end{array}$$

Remarque: si $0 \in \mathbb{D}_j^{n-2}$

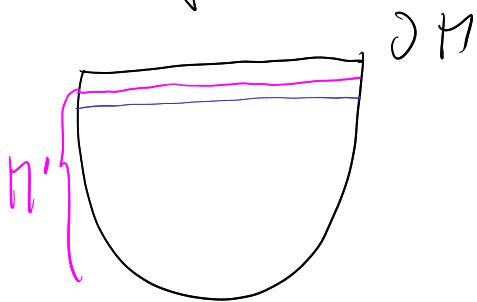
est une valeur régulière, alors le degré global est la somme des degrés locaux.

$$\deg(\psi_i^j) = \sum_x \deg_x(\psi_i^j)$$

$$\psi_i^j(x) = 0$$

cf: Bonigé devoir 3
Cas $\mathbb{RP}^3 / \mathbb{RP}^n$.

Q: Classe fondamentale dans le cas ∂M .



$$C :]-\frac{1}{2}, 0] \times \partial M \hookrightarrow M$$

$$\begin{aligned} M' &= M - C(-\frac{1}{2}, 0] \\ &\cong M \end{aligned}$$

$$\text{Pour } K = M' \quad \mu_K \in H_n(M, M-K)$$

retraction par def: $H_n(M', \partial M') \ni [n]$

Suite : Calculer les structures multiplicatives.

$$\text{Ex: } H^2(\Sigma_g) \otimes H^1(\Sigma_g) \rightarrow H^3(\Sigma_g)$$

$$\text{Ex: } H^p(\mathbb{CP}^n) \otimes H^q(\mathbb{CP}^n) \rightarrow H^{p+q}(\mathbb{CP}^n)$$

Bredon section "cup" 4.6 et suivants, p389

Résultat : $H^*(\mathbb{CP}^n)$ comme anneau
est engendré par $\alpha \in H^2(\mathbb{CP}^n)$

avec la relation $\alpha^{n+2} = 0$.
 α^k engendre $\mathbb{CP}^{2k} = \mathbb{Z}$ pour $k \leq n$.

Pour $H^*(\Sigma_g)$

Prendre Base de $H^2(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ avec

les bases duales des $\underbrace{a_i, b_i}_{\text{base de } H_2(\Sigma_g)}, 1 \leq i \leq g$

$$a_i \cup a_j = 0$$

$$b_i \cup b_j = 0$$

$$a_i \cup b_j = 0 \quad i \neq j$$

$$= \pm \text{générateur de } H^2(\Sigma_g, \mathbb{Z}) \\ \text{pour } i = j$$