

Rappel :

Coefficients universels

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(X), \Lambda) \rightarrow H^n(X, \Lambda) \xrightarrow{\text{ev}} \text{Hom}_2(H_n(X), \Lambda) \rightarrow 0$$

On a un morphisme "d'évaluation"

$$\text{ev} : H^n(X, \Lambda) \rightarrow \text{Hom}(H_n(X), \Lambda)$$

$$\downarrow \alpha \longmapsto [z \mapsto \text{ev}(\alpha)(z) \in \Lambda]$$

notation $\langle \alpha, z \rangle$

Produit cap

Sur les chaînes :

$$C^q(X, \mathbb{Z}) \otimes C_{p+q}(X) \rightarrow C_p(X)$$

$$\downarrow \quad \otimes \quad \downarrow \quad \longmapsto (-1)^{pq} \langle \sigma, \sigma_q \rangle \cdot \downarrow$$

$p+q$ -simplex

Cas $p=0$

$$C^q(X, \mathbb{Z}) \otimes C_q(X) \rightarrow C_0(X)$$

σ est un 0-simplex
identifié à un point de X .

En homologie, cas X connexe par arc.

$$H^q(X, \mathbb{Z}) \otimes H_q(X) \rightarrow H_0(X) = \mathbb{Z}$$

$$\beta \otimes z \longmapsto \beta \cap z \in H_0(X) = \mathbb{Z}$$

$$\langle \beta, z \rangle \cdot [\sigma]$$

Dualité de Poincaré

THM: Pour M compacte orientée de dim $n = p+q$, on a un isomorphisme

$$H^q(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cap [M]} H_p(M)$$

Conséquence de:

THM: Pour M orientée, de dimension $n = p+q$, on a un isomorphisme

$$H_c^q(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_p(M)$$

qui est défini comme limite directe des homomorphismes

$$H^q(M, M-K; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cap [K]} H_p(M)$$

$$H_c^q(M, \mathbb{Z}) = \varinjlim_K H^q(M, M-K; \mathbb{Z})$$

1. Cas $M = \mathbb{R}^n$

On utilise la suite de compacts: $D_m = D(0, m)$
 $m > 0$

$$\varinjlim_m H^*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - D_m) = H_c^*(\mathbb{R}^n),$$

car chaque compact K est contenu dans un D_m .

$$H^*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - D_m) \cong H^*(D_m, \partial D_m) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } * = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Coefficients universels: engendrés par la classe duale de $[D_m] \in H_n(D_m, \partial D_m)$

$$\text{notée } [D_m]^* \in H^n(D_m, \partial D_m)$$

$$H^n(D_m, \partial D_m) \xrightarrow{\cap [D_m]} H_0(D_m) = \mathbb{Z}$$

$$[D_m]^* \longmapsto \langle [D_m]^*, [D_m] \rangle = 1$$

On a démontré PD pour $\mathbb{R}^n$.

2. Lemme (3.36 dans Hatcher)

Si on a la dualité de Poincaré pour les ouverts U, V et $U \cap V$ dans une variété M , alors la dualité de Poincaré est vraie pour $U \cup V$.

Preuve: On utilise les 2 suites exactes de Mayer-Vietoris.

Attention: il faut démontrer que les carrés sont commutatifs.

3. Cas où $M \subset \mathbb{R}^n$ est une réunion finie d'ouverts convexes.

4. Cas où $M \subset \mathbb{R}^n$ est une réunion dénombrable d'ouverts convexes, c'est à dire ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$.

$$M = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} U_m = \bigcup_m V_m \quad V_m = \bigcup_{j \leq m} U_j$$

chaque est convexe.

Avec 3: PD est vraie pour chaque V_m

On déduit pour M en utilisant que chaque K compact est dans l'un des V_m .

5. M variété de dimension n quelconque.

$$M = \bigcup_m U_m = \bigcup_m V_m$$

avec U_m ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Cas M compact, sans bord. $H_C^*(M, \mathbb{Z}) = H^*(M, \mathbb{Z})$

Cas M variété de dimension n à bord.

$$H_C^*(M - \partial M, \mathbb{Z}) \simeq H^*(M, \partial M, \mathbb{Z})$$

Exercice Dédurre la dualité de Poincaré dans le cas "à bord décomposé" :

M est une variété de dimension $n = p + q$, à bord décomposé $\partial M = A \cup B$ où A et B sont des bord de dimension $n - 2$ recollés sur leur bord.

L'exemple type: $\partial(D^p \times D^q) = S^{p-1} \times D^q \cup_{S^{p-1} \times S^{q-1}} D^p \times S^{q-1}$

IV L'homologie singulière lisse

Définition : Soit $X \subset M$, M variété lisse.

Un n -simplexe singulier lisse est une application

$\sigma : \Delta_n \longrightarrow X$ telle que pour tout point $x \in \Delta_n$, il existe un voisinage ouvert V_x et une extension lisse

$$\begin{array}{ccc} V_x & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_x} & M \\ \uparrow & & \uparrow \\ V_x \cap X & \xrightarrow{\sigma_x = \sigma|_{V_x \cap X}} & X \end{array}$$

Avec la restriction du bord, on obtient un sous-complexe $C_*^\infty(X) \subset C_*(X)$.

Lemme : $H_k^\infty(\Delta_n) = 0$ pour $k > 0$

Preuve : $C_k^{\text{aff}}(\Delta_n)$ est le sous-complexe engendré par les simplexes affines.

On a $C_k^{\text{aff}}(\Delta_n) \subset C_k^\infty(\Delta_n) \subset C_k(\Delta_n)$

(Avec la méthode du cône, on obtient)

$$H_k^{\text{aff}}(\Delta_n) = 0 \text{ pour } k > 0.$$

On a une inclusion $i: C_k^{\text{aff}}(\Delta_n) \rightarrow C_k(\Delta_n)$

En utilisant la convexité de Δ_n , on a aussi (linéarisation)

$$L: C_k(\Delta_n) \rightarrow C_k^{\text{aff}}(\Delta_n)$$
$$\sigma \longmapsto \langle \sigma(e_0), \dots, \sigma(e_k) \rangle$$

C'est un morphisme de chaîne.

$L \circ i = \text{Id}_{C_k^{\text{aff}}}$ et $i \circ L$ est homotope à Id_C .

L'inclusion i est une équivalence d'homotopie.

On déduit que $C_*^\infty(\Delta_n) \rightarrow C_*(\Delta_n)$ est aussi une équivalence d'homotopie et

$$H_k^\infty(\Delta_n) = 0 \text{ pour } k > 0.$$

On démontre | exactitude
homotopie
excision / Mayer-Vietoris

pour H_*^∞ .

Théorème: Pour toute variété différentiable M ,
l'inclusion $C_*^\infty(M) \subset C_*(M)$ induit
un isomorphisme en homologie

La preuve résulte du lemme (cf Bredon 9.5)

Lemme: Soit $P(M)$ propriété des variétés lisses telle que:

1. $P(M)$ est vraie si $M \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert convexe.
2. $P(U), P(V), P(U \cap V)$ vraies pour des ouverts $U, V \subset M$, implique $P(U \cup V)$ vrai.
3. $P(\bigsqcup_\alpha M_\alpha)$ est vraie si $\forall \alpha, P(M_\alpha)$ est vraie.

Alors $P(M)$ est vraie pour toute variété lisse

V Cohomologie des formes différentielles.

$$H_{\text{DR}}^*(M) = H(\underbrace{\Omega^*(M)}_{\text{formes différentielles}}, d) \quad \text{dérivée extérieure}$$

Lemme de Poincaré / Homotopie.

Mayer - Vietoris.

Intégration sur les simplexes lisses.

Définition: Pour $\sigma: \Delta_p \rightarrow M$ lisse, $\omega \in \Omega_p^p(M)$

on définit $\int_\sigma \omega = \int_{\Delta_p} \sigma^*(\omega)$

On calcule l'intégrale avec un paramétrage orienté de $\Delta_p = \{(t_1, \dots, t_p), t_i \geq 0, \sum t_i = 1\}$

Avec $s_i = t_1 + \dots + t_i, 1 \leq i \leq p$

$$\int_{\Delta_p} \sigma^* \omega = \int_0^1 \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{p-1}} f(s_1, \dots, s_p) ds_1 \dots ds_p.$$

Théorème de Stokes

$$\int_{\sigma} d\omega = \int_{\partial_{+}} \omega \quad \left(= \sum_{i=0}^p (-2)^i (\sigma \circ F_i)^*(\omega) \right)$$

Corollaire: L'évaluation de De Rham définit un morphisme de cochaînes $\mathcal{D}^*(M) \rightarrow C_{\infty}^*(M, \mathbb{R})$.

Théorème: L'évaluation de De Rham définit un isomorphisme en cohomologie

$$H_{DR}^*(M) \xrightarrow{\sim} H_{\infty}^*(M, \mathbb{R}) \simeq H^*(M, \mathbb{R}).$$