Topologie algébrique

Cours sino-français Hefei, automne 2025

Devoir n°2 pour le 20 octobre

I

Identifier les surfaces polygonales définies par les mots suivants (trouver une surface modèle homéomorphe):

1. $abcdecd\overline{a}be$,
2. $ab\overline{e}\,\overline{a}d\overline{b}ce\overline{d}\overline{c}$.

II

Soit X l'espace topologique obtenu en recollant deux bandes sur un carré:

$$X = S^1 \times [0, \frac{1}{4}] \amalg [0, \frac{1}{4}] \times S^1 / (e^{i2\pi s}, t) \sim (s, e^{i2\pi t}) \ .$$

1. Représenter X par un dessin.
2. Démontrer que X est homéomorphe au tore troué.

III

On note $S^3 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ la sphère unité. Pour des entiers premiers entre eux $p \geq 2$, $q \geq 1$, on note $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{p}}$, $\beta = \alpha^q$ et on définit $L(p,q)$ comme le quotient de S^3 par la relation qui identifie (u,v) avec $(u\alpha, v\beta)$.

1. Identifier le quotient $L(2,1)$.
2. En utilisant la décomposition de la sphère S^3 en deux tores pleins
   $$T_1 = \{(u,v),\ |u| \leq |v|\}\ ,\ T_2 = \{(u,v),\ |u| \geq |v|\}\ ,$$
   démontrer que $L(p,q)$ est obtenu comme recollement de deux tores pleins et trouver un homéomorphisme de recollement.
3. Calculer l'homologie $H_*(L(p,q))$.