

Topologie algébrique

Cours sino-français Hefei, automne 2025

Devoir n°3 pour le 30 octobre

I

Soit $C = S^1 \times \mathbb{R}$ le cylindre dans $\mathbb{R}^3$ produit du cercle unité $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ avec $\mathbb{R}$.

1. Ecrire explicitement une rétraction par déformation de C sur $S^1 \times 0$. Dédire l'homologie de C .
2. Déterminer l'intersection de C avec la sphère S de rayon 2 centrée à l'origine de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit X la réunion du cylindre C avec la sphère S . Calculer $H_*(C)$.

II

Soit X le quotient de la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ par la relation qui identifie les points antipodaux (opposés) du cercle équatorial $S^1 = \{(x, y, 0), x^2 + y^2 = 1\}$.

1. Démontrer avec précision que X a une structure de CW-complexe.
2. Calculer l'homologie $H_*(X)$.
3. Est-ce que X est une variété ?

III

Soit M une variété orientée compacte connexe de dimension $n \geq 0$ à bord non vide. On note M_0 et M_1 deux copies de M , et on définit le double $D(M)$ en recollant M_0 et M_1 sur leurs bords avec l'identité.

1. Justifier brièvement que $D(M)$ est une variété connexe sans bord.
2. Démontrer que l'orientation de $M_0 \subset D(M)$ se prolonge en une orientation de $D(M)$.
3. En utilisant l'inclusion $i_0 : M_0 \rightarrow D(M)$, démontrer que $H_n(M)$ est nul.
4. Démontrer que la variété ∂M est orientée et décrire sa classe fondamentale.