Un espace topologique est connexe par arcs si et seulement si deux points x et y de X sont toujours reliés par un chemin, c'est-à-dire une application continue $p\colon [0,1] \to X,\ p(0) = x,\ p(1) = y$. Démontrer qu'un espace connexe par arcs est connexe.

Démonstration. Suppose que X est connexe par arcs mais pas connexe, alors il existe deux ouverts propres U_1 et U_2 de X tels que $U_1 \cup U_2 = X,\ U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Donc $\exists x \in U_1$ et $\exists y \in U_2$. Par définition, il existe une application continue $p\colon [0,1] \to X,\ p(0) = x,\ p(1) = y$. Alors on a $V_1 = p^{-1}(U_1)$ et $V_2 = p^{-1}(U_2)$ deux ouverts non-vide de $[0,1]$ (non-vide car $0 \in V_1$ et $1 \in V_2$), et $V_1 \cap V_2 = p^{-1}(U_1 \cap U_2) = \varnothing$. Mais cela contredit la connexité de $[0,1]$. $\square$

Proposition préliminaire : $[0;1]$ est connexe.

Hypothèse : $I = [0,1] \subset U \cup V$, U et V ouverts de $\mathbb{R}$

$$I \cap U \cap V = \emptyset.$$

On peut supposer que 0 est dans U.

Soit $\alpha = \sup(b,\ [0,b[\subset I \cap U)$.

$b > 0$ car <u>U est ouvert</u> et $0 \in U$ donc

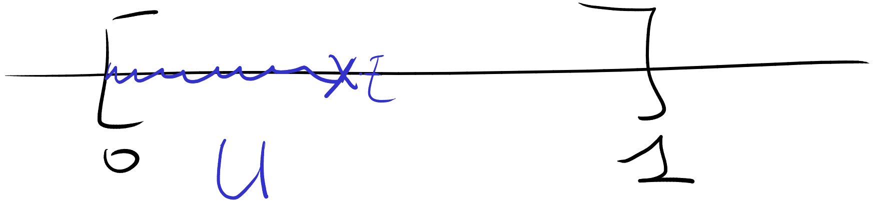
U contient un intervalle $[0,\varepsilon[$. $0 < \varepsilon < 1$

$\alpha \geq \varepsilon > 0$.

<u>Supposons $\alpha < 1$</u>

1. Si $\alpha \in U$, alors $[\alpha, \alpha+\varepsilon[\subset U \cap I$ pour $\varepsilon > 0$; contradiction

de α borne supérieure :



2. Si $\alpha \notin U$

$\alpha \in V$ et $]-\varepsilon+\alpha, \alpha] \subset V \cap I$
$\varepsilon > 0$

$$]-\varepsilon+\alpha, \alpha[\cap U = \emptyset$$

contredit α borne supérieure.

<u>On déduit $\alpha = 1$.</u> $[0,1[\subset U$.

$1 \in V$ est exclu avec l'argument précédent.

Donc $[0,1] \subset U$.

On démontre :

Proposition : Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

II. 1 : $Y \subseteq X$ est un parti connexe.

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ En tant que sous-espace. ~~topologique~~, Y est connexe.

$\Longleftrightarrow$. Si $Y \subseteq \underline{O_1 \cup O_2}$ * t.q. sont d'ouverts dans X, et $\underline{O_1 \cap O_2 \cap Y = \emptyset}$.

alors $Y \subseteq O_1$ ou $Y \subseteq O_2$.

* ouverts "ambiants", c'est à dire de X.

(2) Lemme : Si $(A_i)_{i\in I}$ parties connexes dans X, $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \phi$
alors $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.

démo du Lemme : prenons $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$, s'il existe U, V ouverts t.q. $U \cup V \supset A$, $U \cap V \cap A = \phi$.
ambiants
on peut supposer que $x \in V$. Dans ce cas, $\forall i \in I$, on a $U \cap A_i \neq \phi$, $A_i \subset U \cup V$, $U \cap V \cap A_i = \phi$
par l'hypothèse que $(A_i)_{i\in I}$ soient connexes, on a $U \cap A_i = \phi$, $\forall i \in I \Rightarrow$ $V \cap A = \phi$, ce qui montre que A est connexe.

OK

retour à la question. $C(x)$ est l'union d'une famille de parties connexes, qui ont un élément commun x.
par le lemme, $C(x)$ est connexe.

(3) Si $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$, par le lemme, $C(x) \cup C(y)$ une partie connexe contenant x est y.
par définition de $C(x)$, $C(x) \cup C(y) \subset C(x)$, et on a $C(x) \subset C(x) \cup C(y)$, alors $C(x) = C(x) \cup C(y)$
de même $C(y) = C(x) \cup C(y)$, d'où $C(x) = C(y)$

Commentaire : $\mathcal{C}(x)$ est la composante connexe de x.
C'est une partie connexe maximale.
Les composantes connexes forment une partition de X.

4. Démontrer que l'adhérence d'une partie connexe est connexe.

Démo: Soit un e partie ouvert $U \subset X$ connexe. Si son adhérence n'est pas connexe, il existe donc deux ouverts non vides disjoints V_1 et V_2 tq $V_1 \cap \bar{U} \neq \varnothing, V_2 \cap \bar{U} \neq \varnothing, \bar{U} \subset V_1 \cup V_2$. Comme U est connexe, on peut supposer que $U \subset V_1$, donc $U \subset {V_2}^c$, qui est ferme. Mais l'adhérence de U est le plus petit fermé qui contient U, on voit donc $\bar{U} \subset {V_2}^c \Leftrightarrow \bar{U} \cap V_2 = \varnothing$, d'où la contradiction.

5. Soit Y le sous-espace de $\mathbb{R}^2$ réunion du graphe de la fonction $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ et de $\{0\} \times [-1, 1]$. Est-ce que Y est une partie connexe ?

Y est une partie connexe.

Dém. Soit Z_1 le graphe de la fonction $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ avec $x > 0$.

Z_2 le graphe de la fonction $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ avec $x < 0$.

Comme Z_1, Z_2 sont connexe par arcs, ils sont connexe.

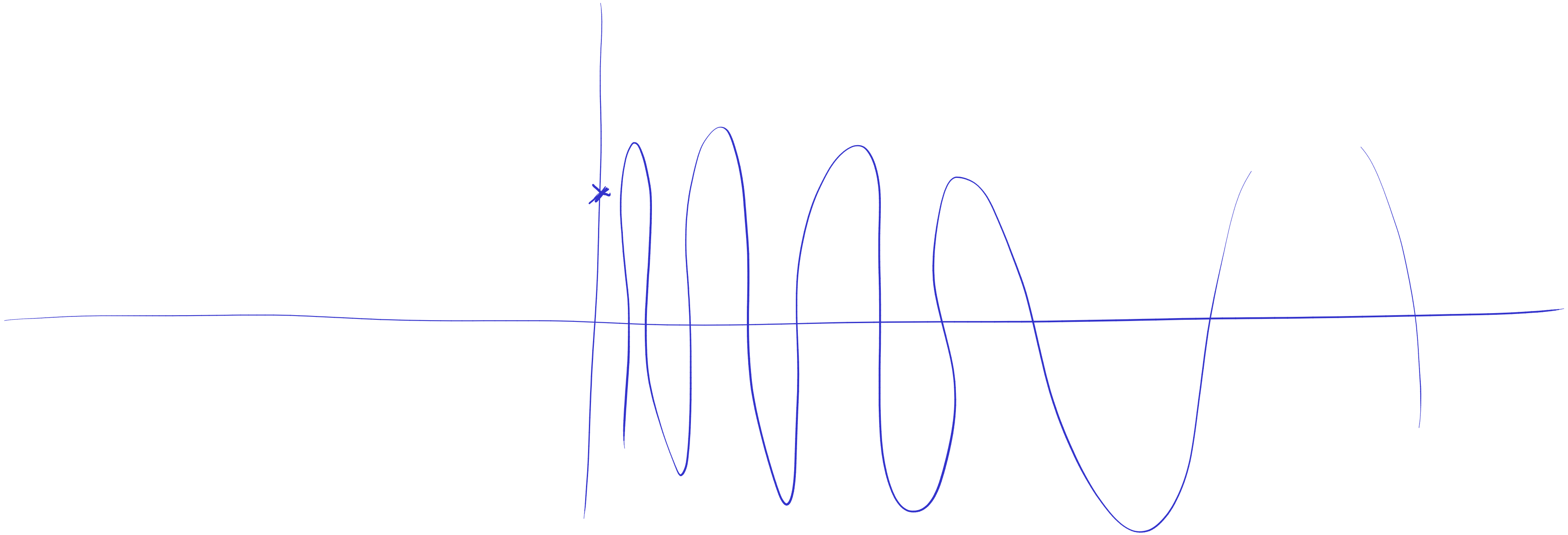
C'est facile à vérifier que $\overline{Z_1} = Z_1 \cup \{0\} \times [-1,1]$, $\overline{Z_2} = Z_2 \cup \{0\} \times [-1,1]$.

Donc $Z_1 \cup \{0\} \times [-1,1]$, $Z_2 \cup \{0\} \times [-1,1]$ sont connexe.

Sous la topologie de Y, on sait que $\overline{Z_1} \subset C((0,0))$ et $\overline{Z_2} \subset C((0,0))$

Donc $Y = \overline{Z_1} \cup \overline{Z_2} \subset C((0,0))$. C'est-à-dire Y est connexe. $\square$

Image continue d'un intervalle qui est connexe.



$$\left.\begin{array}{l}]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \longmapsto \left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \end{array}\right) \text{ continue d'image } Z_1$$

<u>Voir que</u> $\overline{Z_1} = Z_1 \cup \{0\} \times [-1,1]$.

Voir que $(0, y)$, $y \in [\![-1, 1]\!]$, est limite de points de Z_1

$y = \sin \theta$

$y = \sin \frac{1}{x_n}$ avec $\frac{1}{x_n} = \theta + 2n\pi$

$x_n = \frac{1}{\theta + 2n\pi}$

$$\lim_{n \to \infty} \left(x_n , \sin \frac{1}{x_n} \right) = (0, y)$$

$(0, y) \in \overline{Z_1}$

En fait égalité, à justifier.

$Z_1 \subset Y \subset \overline{Z_1}$

connexe

aussi connexe avec le même argument que précédemment

Dans la question 4, l'argument démontre :

Proposition : Si $Y \subset X$ est une partie connexe, alors toute partie Z telle que :

$$Y \subset Z \subset \overline{Y}$$

est connexe.

[II.

D^2/S^1 est homéomorphe à S^2.

Pour $f: D^2 - S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \longmapsto \left(\frac{x}{1-\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{1-\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

f est injective : si on a $f((x_1,y_1)) = f((x_2,y_2))$, i.e. $\begin{cases} \frac{x_1}{1-\sqrt{x_1^2+y_1^2}} = \frac{x_2}{1-\sqrt{x_2^2+y_2^2}} \\ \frac{y_1}{1-\sqrt{x_1^2+y_1^2}} = \frac{y_2}{1-\sqrt{x_2^2+y_2^2}} \end{cases}$

alors $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} := k$, et $\begin{cases} \frac{x_1}{1-\sqrt{\frac{1}{k^2}+1}\,x_1} = \frac{x_2}{1-\sqrt{\frac{1}{k^2}+1}\,x_2} \\ \frac{k y_1}{1-\sqrt{k^2+1}\,y_1} = \frac{k y_2}{1-\sqrt{k^2+1}\,y_2} \end{cases}$, donc $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$ et f injective

f est surjective : $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} \frac{x}{1-\sqrt{x^2+y^2}} = u \\ \frac{y}{1-\sqrt{x^2+y^2}} = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}+1} \\ y = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}+1} \end{cases}$ donc f est surjective

et $f((x,y)) = \left(\frac{x}{1-\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{1-\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ et $f^{-1}((u,v)) = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}+1}, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}+1}\right)$ sont continue

donc $D^2 - S^1$ est homéomorphe à ~~la sphère~~ $\mathbb{R}^2$

alors $\tilde{f} : D^2/S^1 \longmapsto \hat{\mathbb{R}}^2$

$(x,y) \longmapsto f((x,y))$ si $(x,y) \in D^2 - S^1$

$(x,y) \longmapsto \infty$ si $(x,y) \in S^1$

est bijection et continue, D^2/S^1 est homéomorphe à $\hat{\mathbb{R}}^2$

$$D^2 \longrightarrow \hat{\mathbb{R}}^2$$

$$\mathring{D}^2 \ni (x,y) \longmapsto f(x,y)$$

$$S^1 \ni (x,y) \longmapsto \infty$$

Voir continue

Ça induit

$$D^2/S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

application quotient d'un compact dans un sép.

mais on a S^2 est homéomorphe à $\hat{\mathbb{R}}^2$ par la fonction $\tilde{f} : S^2 \longrightarrow \hat{\mathbb{R}}^2$

$(x,y,z) \longmapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$ si $(x,y,z) \neq (0,0,1)$

$(x,y,z) \longmapsto \infty$ si $(x,y,z) = (0,0,1)$

donc D^2/S^1 est homéomorphe à la sphère S^2

$$F \quad D^2 \longrightarrow \widehat{\mathbb{R}}$$

$$\mathring{D}^2 \ni (x,y) \longmapsto f(x,y)$$

$$S^1 \ni (x,y) \longmapsto \infty$$

Si V est un ouvert de $\widehat{\mathbb{R}}$ qui ne contient pas ∞

$F^{-1}(V) = f^{-1}(V)$ est un ouvert de $\mathring{D}^2$

donc ouvert de D^2

Si V est un ouvert de $\widehat{\mathbb{R}}$ de la forme

$V = \widehat{\mathbb{R}} - K$, K compact fermé et

donc K borné dans $\mathbb{R}^2$

$$F^{-1}(V) = D^2 - f^{-1}(K)$$

$f^{-1}(K)$ est un fermé inclus dans $B(0,r)$

$r < 1$.

$f^{-1}(K)$ est compact donc fermé dans D^2

Son complément est ouvert dans D^2.

⚠ : $\mathring{D}^2$ contient des fermés non compacts