Topologie algébrique

Cours sino-français Hefei, automne 2023

Devoir n°1 pour le 13 septembre

I

Un espace topologique est connexe par arcs si et seulement si deux points x et y de X sont toujours reliés par un chemin, c'est à dire une application continue $p : [0,1] \to X$, $p(0) = x$, $p(1) = y$. Démontrer qu'un espace connexe par arcs est connexe.

II

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Pour $x \in X$ on note $\mathcal{C}(x)$ la réunion de toutes les partie connnexes de X qui contiennent x.

1. Formuler soigneusement ce qu'est une partie connexe de X.
2. Démontrer que $\mathcal{C}(x)$ est une partie connexe de X (on l'appelle la composante connexe de x).
3. Démontrer que pour $x \neq y$, on a soit $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$, soit $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) = \emptyset$
4. Démontrer que l'adhérence d'une partie connexe est connexe.
5. Soit Y le sous-espace de $\mathbb{R}^2$ réunion du graphe de la fonction $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ et de $\{0\} \times [-1, 1]$. Est-ce que Y est une partie connexe ?

III

Démontrer que l'espace quotient du disque unité D^2 par le cercle unité S^1 est homéomorphe à la sphère S^2.