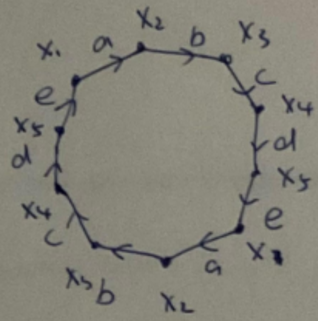
Exer I

(A) Très bien rédigé,

À quelle surface sont homéomorphes les quotients du disque obtenus par les identifications du bord encodés par les mots suivants ?

a, $abcde\,abcde$

b, $abcde\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}$



(a) : On observe que

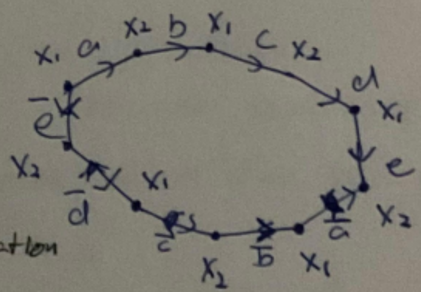
- Il y a 5 ~~point~~ sommets après l'identification. donc

$\chi = 5-5+1 = 1$

- Il est de type (o)

Donc il est homéomorphe à P_1

TB



b, On observe que

- Il y a 2 sommets après l'identification

Donc $\chi = 2-5+1 = -2$

- Il est de type (no)

Donc homéo à Σ_2

B

II Homéomorphisme entre $\mathbb{C}P^1$ et S^2

Préliminaire : En utilisant des cartes, on démontre que $\mathbb{C}P^n$, $n \geq 1$, est un espace séparé localement euclidien : une variété de dimension $2n$.
On montre que c'est une variété compacte : image continue de $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$.

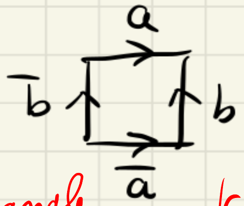
L'espace topologique compact $\mathbb{C}P^1$ est la réunion d'un ouvert $U = \{[1, y], y \in \mathbb{C}\}$ homéomorphe à $\mathbb{C}$ et d'un point $\infty = [0, 1]$.
L'unicité de la compactification par un point d'un espace localement compact nous donne un homéomorphisme $\mathbb{C}P^1 \simeq \widehat{\mathbb{C}}$.
Avec la projection stéréographique, on a des homéomorphismes : $\widehat{\mathbb{C}} \simeq \widehat{\mathbb{R}^2} \simeq S^2$.
Conclusion : $\mathbb{C}P^1 \simeq S^2$.

III

Soit X le quotient du tore $S^1 \times S^1$ par la relation qui identifie (x, y) et (y, x). Montrer que X est une surface à bord et identifier cette surface.

Démonstration.

Le mot du tore $S^1 \times S^1$ est $ab\bar{a}\bar{b}$, et on a la projection canonique $p : [0,1] \times [0,1] \to S^1 \times S^1$.

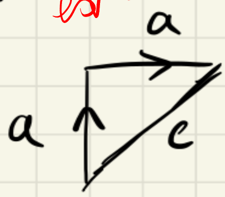


On a aussi un homéomorphisme :

Justifier : La restriction au triangle qui est compact, est surjective.

$$[0,1]\times[0,1] / (x,y)\sim(y,x) \simeq \{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ y \geq x\}.$$

Donc $X = S^1 \times S^1 / (x,y)\sim(y,x)$ suit le mot aac.



c.a.d. X est la bande de Möbius, une surface à bord.