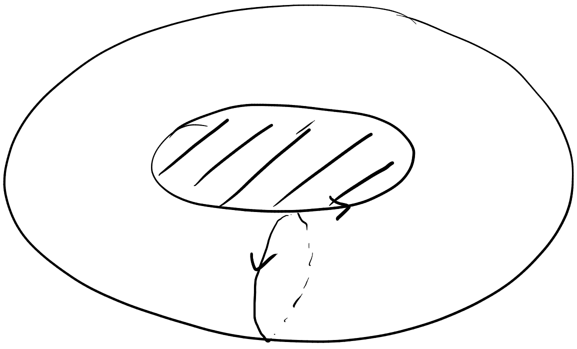
I 1. Soit $C \subset M$ une composante connexe par arc.
Pour $x \in C$ il existe une carte $\varphi : U \xrightarrow{\sim} V$ où V est une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$.
V étant connexe par arc, U l'est aussi et donc U est inclus dans C.
On conclut que <u>C est ouvert de M.</u>

2. Le complément d'une composante connexe par arc C est la réunion des autres composantes connexes par arc. Cette réunion est ouverte d'après la question 1. <u>Donc C est fermé.</u>

3. Si M est connexe, alors une composante connexe C de M est ouverte et fermée, donc égale à M : <u>$M = C$ est connexe par arc.</u>

II

$$X = S^1 \times S^1 \cup_{\varphi} D^2$$



$$\varphi : \partial D^2 = S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$$
$$z \longmapsto (1, z)$$

Soit : $p : S^1 \times S^1 \amalg D^2 \longrightarrow X$, la projection.

$U_1 = X - p(\{-1\} \times S^1)$, $U_2 = X - p(0)$ $(0 \in D^2)$

U_1 et U_2 sont des ouverts qui se rétractent par déformation respectivement sur $A = p(D^2)$ et $B = p(S^1 \times S^1)$.

U_1, U_2, et $U_1 \cap U_2$ sont des ouverts connexes par arc. On peut appliquer le théorème de Van-Kampen.

On prend comme point de base $x_0 = p(1,1) = p(1)$.

$\pi_1(U_1, x_0) = \pi_1(D^2, 1) = 0$, $\pi_1(U_2, x_0) = \pi_1(S^1 \times S^1, (1,1)) = \mathbb{Z}^2$,

$$\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) = \pi_1(1 \times S^1, (1,1)) = \mathbb{Z}.$$

L'application d'inclusion $i_\# : \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \to \pi_1(U_2, x_0)$ envoit le générateur $[\gamma_2]$, $\gamma_2(t) = (1, e^{i2\pi t})$, sur le second générateur. On obtient

$$\boxed{\pi_1(X, x_0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \mathbb{Z}}$$, engendré par $[\gamma_1]$, $\gamma_1(t) = (e^{i2\pi t}, 1)$

III (a) Pour A et B dans $SL(2, \mathbb{Z})$, on a :

$f_A \circ f_B = f_{AB}$. On déduit que f_A est bijective d'application inverse $f_{A^{-1}}$.

f_A et $f_{A^{-1}}$ sont continues (composées d'applications élémentaires continues).

Donc f_A est un homéomorphisme et $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$.

b) On représente les générateurs de $\pi_1(S^1 \times S^1, (1,1))$ par $[\gamma_1], [\gamma_2]$, $\gamma_1(t) = (e^{i2\pi t}, 1)$, $\gamma_2(t) = (1, e^{i2\pi t})$.

$(f_A \circ \gamma_1)(t) = (e^{i2\pi a t}, e^{i2\pi b t})$

On va montrer que ce lacet est homotope à $(\gamma_1)^a \cdot (\gamma_2)^b$.
En composant avec le lacet constant, on a une homotopie entre γ_1^a et $\begin{cases} t \mapsto (e^{i2\pi a 2t}, 1), & t \leq \frac{1}{2} \\ t \mapsto (1,1), & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

De même γ_2^b est homotope à : $\begin{cases} t \mapsto (1,1), & t \leq \frac{1}{2} \\ t \mapsto (1, e^{i2\pi b(2t-1)}), & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

On déduit $f_A \circ \gamma_1 \sim (\gamma_1^a, 1) \cdot (1, \gamma_2^b)$

Conclusion : $\boxed{(f_A)_\#([\gamma_1]) = a[\gamma_1] + b[\gamma_2] \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \pi_1(S^1 \times S^1, (1,1))}$

De même : $\boxed{(f_A)_\#([\gamma_2]) = c[\gamma_1] + d[\gamma_2].}$

2 a) La variété à bord $S^1 \times D^2$ a un collier :

$$C :]-\varepsilon, 0] \times S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times D^2$$
$$(t, z, z') \longrightarrow (z, e^{i2\pi(1-t)} z')$$

$D^2 \times S^1$ a aussi un collier.
En utilisant ces deux colliers, on obtient que le recollement est une variété de dimension 3.

b) En utilisant les images des colliers : $C_\varepsilon \subset S^1 \times D^2$ et $C'_\varepsilon \subset D^2 \times S^1$, on obtient deux ouverts $U_1 = D^2 \times S^1 \cup_{f_A} C_\varepsilon$ et $U_2 = C'_\varepsilon \cup_{f_A} S^1 \times D^2$.

U_1, U_2 et $U_1 \cap U_2$ sont connexes par arc et se rétractent par déformation respectivement sur $A_1 = D^2 \times S^1$, $A_2 = S^1 \times D^2$, $A_1 \cap A_2 \simeq S^1 \times S^1$.

Il convient de noter qu'en identifiant $A_1 \cap A_2$ à $S^1 \times S^1 \subset S^1 \times D^2$, le plongement dans $D^2 \times S^1$ est donné par f_A.

On peut appliquer le théorème de Van-Kampen, avec $\pi_1(A_1, (1,1)) = \mathbb{Z}$ engendré par $[\delta]$, $\delta(t) = (1, e^{i2\pi t})$,

$\pi_1(A_2, (1,1)) = \mathbb{Z}$ ——— $[\gamma_1]$, $\gamma_1(t) = (e^{i2\pi t}, 1)$

$\pi_1(A_1 \cap A_2, (1,1)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ engendré par $[\gamma_1], [\gamma_2]$.

On obtient deux relations qui proviennent des générateurs du groupe fondamental de $A_1 \cap A_2$:

$$(i_1)_\#([\gamma_1]) = [\gamma_1] = (i_2)_\# \circ (f_A)_\#([\gamma_1]) = c.[\delta],$$

$$(i_2)_\#([\gamma_2]) = 0 = (i_2)_\# \circ (f_A)_\#([\gamma_2]) = d[\delta].$$

Conclusion : $\pi_1(X_A, (1,1)) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, engendré par $[\delta]$.

3.a) L'application $(z, z') \longmapsto \left(\frac{z}{|z|^2+|z'|^2}, \frac{z'}{|z|^2+|z'|^2}\right)$ donne un homéomorphisme entre le bord du "cube" $D^2 \times D^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ et la sphère S^3:

$$\partial(D^2 \times D^2) = D^2 \times S^1 \underset{Id}{\cup} S^1 \times D^2 \simeq S^3.$$

Donc $S^3 = f_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

b) On a un homéomorphisme :

$$D^2\times S^1 \underset{Id}{\cup} D^2\times S^1 \simeq S^2\times S^1$$

En reparamétrant $D^2\times S^1$ avec l'homéomorphisme :

$$S^1\times D^2 \longrightarrow D^2\times S^1, \quad (z,z') \longmapsto (-z', z)$$

on obtient $\boxed{S^2\times S^1 \simeq D^2\times S^1 \underset{f\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}}{\cup} S^1\times D^2}$.

c) $\mathbb{R}P^3 = S^3/\sim \; = D^2\times S^1/\sim \;\cup\; S^1\times D^2/\sim$

On va obtenir une matrice de recollement en identifiant précisément les deux tores quotients.

On a un homéomorphisme : $D^2\times S^1/\sim \;\xrightarrow[\sim]{\varphi}\; D^2\times S^1$

$$[x,y] \longmapsto \left(\frac{x}{y}, y^2\right) = (u,v)$$

d'inverse $(u,v) \longmapsto [u v^{1/2}, v^{\frac{1}{2}}]$.

L'application φ est continue, bijective, d'un compact dans un espace séparé.

De même : $S^1\times D^2/\sim \;\xrightarrow[\sim]{\psi}\; (S^1\times D^2)$

$$[x',y'] \longmapsto \left(x'^2, \frac{y'}{x'}\right) = (u',v')$$

La restriction à $S^1\times S^1$ de $\varphi\circ\psi^{-1}$ est :

$$(u',v') \longmapsto (u,v) = (v'^{-1}, u'v'^2)$$

<u>Conclusion :</u> $\mathbb{R}P^3 = X_{\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}}$