Topologie algébrique

Cours sino-français Hefei, automne 2023

Devoir n°3 pour le 7 octobre

I

On suppose que M est une variété topologique.

1. Démontrer que les composantes connexes par arc sont ouvertes.
2. Démontrer que les composantes connexes par arc sont fermées.
3. Démontrer que si la variété M est connexe, alors elle est connexe par arc.

II

Soit X l'espace obtenu en collant un disque D^2 au tore $S^1 \times S^1$ avec l'identification de $z \in S^1 \subset D^2$ à $(1, z) \in S^1 \times S^1$.

Calculer le groupe fondamental de X. On précisera le point de base utilisé et on rédigera avec précision les arguments.

III

Pour une matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ à coefficients entiers et de déterminant 1, $A \in SL(2, \mathbb{Z})$, on note $f_A : \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ l'application définie par

$$f_A(u, v) = (u^a v^c, u^b v^d) \ .$$

1. (a) Justifier que f_A est un homéomorphisme et décrire l'homéomorphisme inverse.

   (b) Déterminer l'action de f_A sur $\pi_1(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1, *)$, $* = (1, 1)$, c'est à dire l'application
   $$(f_A)_\sharp : \pi_1(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1, *) \to \pi_1(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1, *) \ .$$

   On note X_A l'espace obtenu en collant $\mathbf{S}^1 \times D^2$ à $D^2 \times \mathbf{S}^1$ avec l'application $f_A : \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 = \partial(\mathbf{S}^1 \times D^2) \to \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \subset D^2 \times \mathbf{S}^1$.

   (a) Montrer que X_A est une variété.

   (b) Calculer le groupe fondamental de X_A.

2. Reconnaître $\mathbf{S}^3$, $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$, $\mathbb{R}P^3$ parmi les variétés X_A.