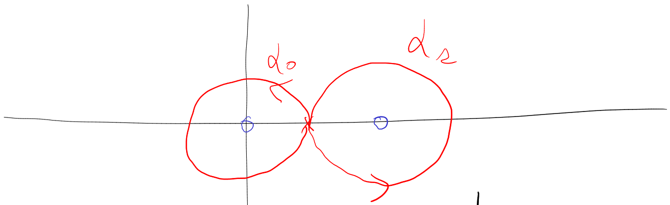
I 1. $f_n'(z) = n z^{n-1} \neq 0$, pour $z \in \mathbb{C}^*$.
Il en résulte que f_n est un difféomorphisme local.
Pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$, la fibre $f_n^{-1}(\alpha)$ est finie, et on peut donc trouver une trivialisation locale :
f_n est un revêtement à n feuilles.

2. a) Pour $\alpha \in \mathbb{C}^* - \{1\}$, on peut trouver une trivialisation locale $f_n^{-1}(W) \longrightarrow W \ni \alpha$ avec $1 \notin W$.
Donc la restriction g_n est aussi un revêtement.

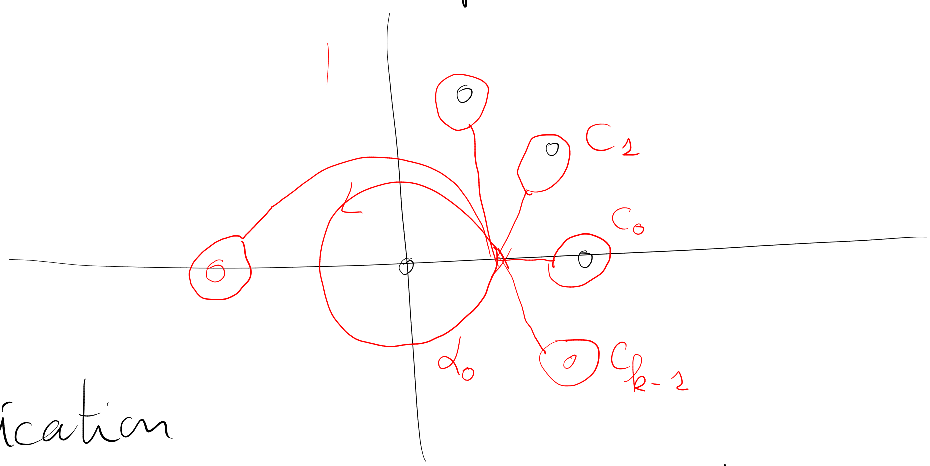
b) $\pi_1(B, \frac{1}{2})$ est un groupe libre à deux générateurs :



$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= [\alpha_0] \quad \alpha_0(t) = \tfrac{1}{2} e^{i 2\pi t} \\ a_1 &= [\alpha_1] \quad \alpha_1(t) = 1 - \tfrac{1}{2} e^{i 2\pi t} \end{aligned}}$$

$$X_n = \mathbb{C}^* - \{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} , 0 \leq k < n \}$$

$\pi_1(X_n, \frac{1}{2})$ est un groupe libre à $(n+1)$ générateurs :
$b_0 = a_0$ et $c_k = [\gamma_k]$ où γ_k est un lacet autour de $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ relié au point de base par un chemin.



c) L'application
$(g_n)_\# \quad \pi_1(X_n, \frac{1}{2}) \longrightarrow \pi_1(B, \frac{1}{2})$ est injective. Son image est un sous-groupe libre à $(n+1) = m$

générateurs dans un groupe libre à 2 générateurs

Ici $n \geq 2$, donc $m \geq 3$.

II 1. L'action du sous-groupe $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ par addition est une action discrète par homéomorphismes :
Pour $z \in \mathbb{C}$, $V = B(z, \frac{1}{4})$, les $t_{n+mi}(V) = B(z+n+mi, \frac{1}{4})$, $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ sont deux à deux disjoints.
L'application quotient $q : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ est un revêtement. De plus l'application

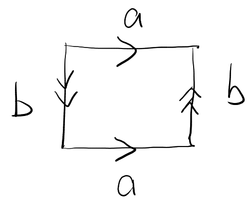
$$g : \mathbb{C} \longrightarrow S^1 \times S^1$$
$$z = s + it \longmapsto (e^{i2\pi s}, e^{i2\pi t})$$

induit par passage au quotient un homéomorphisme

$$\bar{g} : \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\sim} S^1 \times S^1.$$

$p = \bar{g} \circ q$ est aussi un revêtement.

2. La bouteille de Klein K :



$$K \cong [0,1] \times S^1 \big/ (1,z) \sim (0, \bar{z})$$

Soit K' le quotient de $S^1 \times S^1$ par la relation qui identifie (u, v) à $(-u, \bar{v})$.
Ce quotient est un revêtement double : action discrète de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
L'inclusion $[0,1] \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$

$$(t, z) \longmapsto (e^{i\pi t}, z)$$

induit un homéomorphisme $[0,1] \times S^1/\sim \; \xrightarrow{\sim} K'$

K' est donc aussi une bouteille de Klein et on a construit un revêtement double orienté : le revêtement d'orientation.

3) La composition : $\mathbb{C} \xrightarrow[p]{} S^1 \times S^1 \longrightarrow K' \simeq K$ est un revêtement simplement connexe.

III 1 a) $S^3 = \{(z, z'),\ |z|^2 + |z'|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$

$(\alpha, \beta).(z, z') = (\alpha z, \beta z') \in S^3$

On a une application $G \times S^3 \longrightarrow S^3$ qui a les propriétés d'une action.

b) L'action est continue et le groupe G est fini, donc l'action est discrète.

2. S^3 étant simplement connexe, le groupe fondamental de la base du revêtement $L(p,q)$ s'identifie à la fibre au dessus d'un point de base. En prenant la classe de $(1,0)$ comme point de base, la fibre est $F = \{(\alpha^k, 0), 0 \leq k < p\} \simeq G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Remarque : La fibre avec relevé du point de base est un groupe lorsque le sous-groupe défini par le revêtement, ici le groupe trivial, est un sous-groupe normal.

3. $L(2,1) = S^3 / (z, z') \sim (-z, -z')$ est l'espace projectif $\mathbb{R}P^3$.

IV Soit $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{C}^2 \right\}$

Alors $\mathbb{H} \simeq \mathbb{C}^2$ comme espace hermitien,

et $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$ comme espace euclidien

La norme de $q = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$ est $\|q\| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$.

On a $\|qq'\| = \|q\| \times \|q'\|$.

On déduit que $SU(2)$ agit sur $\mathbb{H}$ à gauche et à droite par isométrie :

$$v \longmapsto qv \quad , \quad v \longmapsto vq^{-1} \quad , \quad v \mapsto qvq^{-1}$$

sont des isométries de $\mathbb{H}$.

Ce sont a priori des éléments du groupe orthogonal $O(4)$. Comme $SU(2) = S^3$ est connexe, elles sont dans la composante connexe $SO(4)$.

Notons $\rho(q)$ l'action par conjugaison.

$\rho(q)$ fixe $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc définit une action restreinte par isométrie sur son orthogonal qui est l'espace tangent à la sphère au point unité : l'espace euclidien V de base orthonormée :

$$J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} , \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} , \quad L = JK = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

$\rho(q)$ définit donc un élément de $SO(3)$ aussi noté $\rho(q)$ et un homomorphisme continu :

$$\rho : SU(2) \longrightarrow SO(3).$$

On peut écrire les formules dans la base et déterminer le noyau : $\mathrm{Ker}(\rho) = \{\pm I\}$

On a donc une action discrète du groupe $\{\pm I\}$ sur $SU(2)$ par homéomorphisme qui construit un revêtement double : $SU(2) \longrightarrow SU(2)/_{\{\pm 1\}} \simeq \mathrm{Im}(\rho)$

En utilisant la compacité de $SU(2)$,

on a un homéomorphisme $SU(2)/_{\{\pm 1\}} \underset{\rho}{\simeq} \mathrm{Im}(\rho)$.

$\mathrm{Im}(\rho) \subset SO(3)$ est fermé

$SO(3)$ étant connexe, pour prouver la surjectivité,

il suffit de montrer que l'image est ouverte.

On peut le faire en utilisant la structure de variété de $SU(2)$ et l'invariance du domaine.

On peut aussi montrer que ρ est un difféomorphisme local*, donc ouverte.

* $\rho(g)^{ad}$ est un isomorphisme.