Topologie algébrique

Cours sino-français Hefei, automne 2023

Devoir n°4 pour le 16 octobre

I

Pour $n \geq 2$, soit $f_n : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ l'application définie par $f_n(z) = z^n$.

1. Démontrer que f_n est un revêtement. Décrire l'application $\pi_1(f_n) = (f_n)_\sharp$.
2. Soit $B = \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$ et $X_n = f_n^{-1}(B)$. On note $g_n : X_n \to B$ la rectriction de f_n.
   (a) Est-ce que g_n est un revêtement ?
   (b) Décrire les groupes fondamentaux de B et de X_n.
   (c) Démontrer que pour $m \geq 3$, le groupe libre à deux générateurs contient un sous-groupe qui est libre à m générateurs.

II

1. Construire un revêtement $p : \mathbb{C} \to S^1 \times S^1$.
2. Décrire un revêtement orientable (de type (o)) de la bouteille de Klein K.
3. Construire un revêtement universel (simplement connexe) de la bouteille de Klein.

III

On note S^3 la sphère unité de $\mathbb{C}^2$. On rappelle que c'est un groupe multiplicatif. Pour des entiers premiers entre eux p et q, $\alpha = e^{\frac{i2\pi}{p}}$, $\beta = \alpha^q$.

1. (a) Montrer que le sous-groupe $G \subset S^1 \times S^1$ engendré par (α, β) agit par multiplication sur la sphère S^3.
   (b) Est-ce une action discrète ?
2. On note $L(p, q)$ l'espace quotient $G \backslash S^3$. Déterminer le groupe fondamental de $L(p, q)$.
3. Reconnaître l'espace $L(2, 1)$.

IV (facultatif)

En utilisant l'action de conjugaison du groupe

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{C}^2\ ,\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\},$$

contruire un revêtement de $SU(2)$ sur le groupe $SO(3)$ des endomorphismes orthogonaux orientés de $\mathbb{R}^3$. En déduire le groupe fondamental de $SO(3)$.