I

*Démonstration.* 1. Soit $V_i = \{[z_0, \cdots, z_n] \mid z_i \neq 0\}$ pour $i = 0, \cdots, n$, alors $V_i$ est ouvert de $\mathbb{C}P^n$, et on a $\mathbb{C}P^n = \bigcup_{i=0}^{n} V_i$. Pour chaque $V_i$, il existe l'homéomorphisme

$$\varphi_i \colon V_i \to \mathbb{C}^n,\ [z_0, \cdots, z_n] \mapsto (\frac{z_0}{z_i}, \cdots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \cdot, \frac{z_n}{z_i}),$$

il a l'inverse $(z_1, \cdots, z_n) \mapsto [z_1, \cdots, z_i, 1, z_{i+1}, \cdots, z_n]$, donc $(V_i, \varphi_i)$ donne une. Sur $V_i \cap V_j$, soit $i < j$, l'application $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \colon \varphi_j(V_i \cap V_j) \to \mathbb{C}^n$ est donné par $(z_1, \cdots, z_n) \mapsto \frac{1}{z_j}(z_1, \cdots, z_i, 1, z_{i+1}, \cdots, \hat{z}_j, \cdots, z_n)$, donc elle est lisse, on a $\mathbb{C}P^n$ est une variété de dimension $2n$. $\mathbb{C}P^n$ est clairement compact, parce que l'image de $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ est égal à $\mathbb{C}P^n$.

Complément : séparation.

Soit $f : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire non nulle, alors $V_f = \{[z_0, \ldots, z_n],\ f(z_0, \ldots, z_n) \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{C}P^n$. L'hyperplan affine $\Pi = f^{-1}(1) \subset \mathbb{C}^{n+1}$ est homéomorphe à $\mathbb{C}^n$.

On obtient une carte :

$$\varphi_f \quad V_f \longrightarrow \Pi \simeq \mathbb{C}^n$$
$$[z] = [z_0, \ldots, z_n] \longmapsto \left(\frac{z_0}{f(z)}, \ldots, \frac{z_n}{f(z)}\right)$$

avec $\varphi_f^{-1}(y) = [y]$.

Étant données $[z] \neq [z']$ dans $\mathbb{C}P^n$, il existe $f$, forme linéaire non nulle sur $\mathbb{C}^{n+1}$, telle que $f(z) \neq 0$ et $f(z') \neq 0$. Les points $\varphi_f([z])$ et $\varphi_f([z'])$ sont séparés dans $\Pi$, donc $[z]$ et $[z']$ sont séparés dans $V_f$ : il existe des ouverts disjoints $V \ni [z]$ et $V' \ni [z']$, dans $V_f$, ouvert de $\mathbb{C}P^n$.

$\mathbb{C}P^n$, image du compact $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, est compact.

Orientation : Observons qu'un isomorphisme linéaire complexe $v \in GL(\mathbb{C}^n)$ est toujours orienté

2. a) $Y_n = \{[z_1, \dots, z_{n-1}, 1] \mid |z_1| < 1, \dots, |z_{n-1}| < 1\}$.

$\varphi_n(Y_n) = (\mathring{D}^2)^n \subseteq \mathbb{C}^n$. boule ouverte

b) on considère $\{[x_0, \dots, x_n] \mid x_n = 0\} \subseteq \mathbb{C}P^n$ est homéomorphe à l'espace $\mathbb{C}P^{n-1}$.

et $\{[x_0, \dots, x_n] \mid x_n = 0\} \subseteq X_n$. On va montrer que $X_n$ rétract~~X~~ à $\{[x_0, \dots, x_n] \mid x_n = 0\}$. par déformation

$\varphi : X_n \times [0,1] \longmapsto X_n$.

$\varphi([x_0, \dots, x_n], t) = [x_0, \dots, x_{n-1}, t x_n]$ X les $x_i$, $i < n$, sont non tous nuls, sinon $x_n = 0$.

$\varphi(\cdot, 1) = Id_{X_n}$ $\quad \varphi(\cdot, 0) \circ i = id_{\{[x_0, \dots, x_n] \mid x_n = 0\}}$.

$\Rightarrow X_n$ rétracte par déformation sur un sous espace homeomorphe à $\mathbb{C}P^{n-1}$.

B

(b) Montrer que $X_n = \mathbb{C}P^n - Y_n$ se rétracte par déformation sur un sous-espace homéomorphe à $\mathbb{C}P^{n-1}$.

Solution. $X_n = \{[z_0 : \cdots : z_n] \in \mathbb{C}P^n : \exists\, 0 \le i \le n-1,\ |z_i| \geq |z_n|\}$.

Donc $[0 : \cdots : 0 : 1] \notin X_n$. On pose

$$d : (\mathbb{C}^{n+1} - \mathbb{C}\cdot(0, \cdots, 0, 1)) \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}.$$

$$(z_0, \cdots, z_n, t) \longmapsto (z_0, \cdots, z_{n-1}, (1-t)z_n)$$

qui induit une déformation

$$\hat{d} : X_n \times [0,1] \longrightarrow X_n$$

$$([z_0, \cdots, z_n], t) \longmapsto [z_0, \cdots, z_{n-1}, (1-t)z_n]$$

non tous nuls, sinon $z_n = 0$.

Alors $\hat{d}(X_n, 0) = X_n$,

$\hat{d}(X_n, 1) = \{[z_0, \cdots, z_{n-1}, z_n] \in \mathbb{C}P^n : z_n = 0\} \simeq \mathbb{C}P^{n-1}$.

Donc $X_n$ se rétract par déformation sur un sous-espace homéomorphisme à $\mathbb{C}P^{n-1}$.

B

3. Prenons $Z_n$ un voisinage collier de $Y_n$ et donc $\mathbb{C}P^n = X_n \cup Z_n$ avec $X_n \cap Z_n \sim \mathbf{S}^{2n-1}$. Par la suite de Mayer-Vietori, on a

$$\cdots \to H_i(S^{2n-1}) \to H_i(X_n) \oplus H_i(Z_n) \to H_i(\mathbb{C}P^n) \to H_{i-1}(S^{2n-1})$$

Clairement on a $H_0(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$ et $H_1(\mathbb{C}P^n) = \pi_1^{ab}(\mathbb{C}P^n) = 0$. Si $i > 1$ et $i \leq 2n-2$, on a $H_i(\mathbb{C}P^n) \simeq H_i(X_n) = H_i(\mathbb{C}P^{n-1})$. Si $i = 2n$, on a $H_{2n}(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$ comme elle est une variété compacte orientable. Si $i = 2n-1$, on a $H_{2n-1}(X_n) \simeq H_{2n-1}(\mathbb{C}P^{n-1})$ par l'exactitude de la suite et elle est nulle car $\mathbb{C}P^{n-1}$ est une variété compacte orientable de dimension $2n-2$.

On a donc

$$H_i(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, 2, 4, \cdots, 2n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque complémentaire

$H^*(\mathbb{C}P^n, \Lambda)$ s'obtient avec le coefficients universels.

Pb : Structure d'anneau ?

$c \in H^2(\mathbb{C}P^n, \Lambda)$ le générateur :

$$H^2(\mathbb{C}P^n, \Lambda) \cong \mathrm{Hom}(H_2(\mathbb{C}P^n), \Lambda) = \Lambda$$

$\boxed{H^*(\mathbb{C}P^n, \Lambda) \simeq \Lambda[c]/c^{n+1}}$ comme anneau.

II Le but est de calculer $H_*(\mathbb{R}P^n)$

1. a) $\tau : M \longrightarrow M$ est un homéomorphisme involutif.

L'application quotient $p : M \longrightarrow B = M/\tau$ est associée à l'action discrète du groupe $\{Id, \tau\}$ : c'est un revêtement. On déduit que $B$ est séparé et localement euclidien ; c'est une variété.

b) Si $\tau$ est orientée, alors l'orientation de $M$ : $(\mu_x)_{x \in M}$, $\mu_x \in H_n(M, M-x)$, définit une orientation de $B = M/\tau$ : $p_*(\mu_x) = p_*(\mu_{\tau(x)}) \in H_n(B, B-p(x))$.

c) L'involution non orientée $\tau$ est de degré $-1$ : pour tout $x \in M$, $\tau_*(\mu_x) = -\mu_{\tau(x)}$.

Comparons les deux revêtements à 2 feuilles :

$p : M \longrightarrow B$, et $q : \widetilde{B} \longrightarrow B$.

Fixons les points de base $x_0 \in M$, $b_0 = p(x_0) \in B$, $\widetilde{b}_0 = (x_0, p_*(\mu_{x_0})) \in \widetilde{B}$.

Pour $[\gamma] \in \pi_1(B, b_0)$, le lacet $\gamma$ se relève en un lacet $\widetilde{\gamma}$ dans $M$ si et seulement si le relèvement de l'orientation locale $\nu_{\widetilde{\gamma}(t)}$, $\nu_{\widetilde{\gamma}(0)} = \mu_{x_0}$, est telle que $\nu_{\widetilde{\gamma}(1)} = \mu_{x_0}$.

On déduit que : $[\gamma] \in p_\#(\pi_1(M, x_0))$ si et seulement si

$$[\gamma] \in q_\#(\pi_1(\widetilde{B}, \widetilde{b}_0)).$$

Le théorème de classification des revêtements prouve que les deux revêtements sont isomorphes.

2. Soit $\tau\colon S^n \to S^n$, $x \mapsto -x$. Fixe un générateur $\mu$ de $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$, et pour $x \in S^n$ soit $\mu_x = \rho_x(\mu) \in H_n(S^n, S^n - \{x\})$, alors $(\mu_x)_{x \in S^n}$ donne une orientation de $S^n$. On a $\deg \tau = (-1)^{n+1}$, c'est le même pour le degré local, donc par le résultat ~~président~~ précédent, si $n$ est impair~~e~~, $\mathbb{R}P^n = S^n/\tau$ est aussi orientable. Si $n$ est pair~~e~~, alors $S^n$ est le revêtement d'orientation de $\mathbb{R}P^n$, qui est connexe, donc $\mathbb{R}P^n$ n'est pas orientable.

3. Calculer l'homologie des espaces projectifs $\mathbb{R}P^n$.

**Solution.**

On identifie $\mathbb{R}P^n$ avec $D^n/\sim$, où $x \sim y$ si $x=y$, ou $x=-y$ et $x \in S^{n-1}$. Soit $p\colon D^n \to \mathbb{R}P^n$ la projection canonique.

On sait que $\mathbb{R}P^1 \simeq S^1$, donc

$$H_*(\mathbb{R}P^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } * = 0, 1 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On va démontrer par récurrence que

$$\underset{(n \geq 0)}{H_*(\mathbb{R}P^{2n+1})} = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } * = 0, 2n+1 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{si } 1 \leq * \leq 2n \text{ et } * \text{ est impair} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\underset{(n \geq 1)}{H_*(\mathbb{R}P^{2n})} = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } * = 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{si } 1 \leq * \leq 2n \text{ et } * \text{ est impair} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On prend $U_1 = p(\{x \in D^n : \|x\|_2 < 9/10\})$ et

$U_2 = p(\{x \in D^n : \|x\|_2 > 4/5\})$, alors

$U_1$ est contractile, $U_2$ se rétracte par déformation à $S^{n-1}/\sim \simeq \mathbb{RP}^{n-1}$.

$U_1 \cap U_2$ est homotopic à $S^{n-1}$. Par le théorème de Mayer-Vietoris :

(i) si $n$ est impair ($n \geq 3$) :

$$\to H_*(S^{n-1}) \to H_*(U_1) \oplus H_*(\mathbb{RP}^{n-1}) \to H_*(\mathbb{RP}^n) \to$$

| | $H_*(S^{n-1})$ | | $H_*(U_1) \oplus H_*(\mathbb{RP}^{n-1})$ | $H_*(\mathbb{RP}^n)$ |
|---|---|---|---|---|
| $*=n$ | $0$ | | $0$ | $\mathbb{Z}$ |
| $*=n-1$ | $\mathbb{Z}$ | | $0$ | $0$ |
| $1 \leq * \leq n-2$ | $0$ | | $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $*$ est impair<br>$0$ si $*$ est pair | $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $*$ est impair<br>$0$ si $*$ est pair |
| $*=0$ | $\mathbb{Z}$ | $\hookrightarrow$ | $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ | $\mathbb{Z}$ |

(ii) si $n$ est pair ($n \geq 2$) :

$$\to H_*(S^{n-1}) \to H_*(U_1) \oplus H_*(\mathbb{RP}^{n-1}) \to H_*(\mathbb{RP}^n) \to$$

| | $H_*(S^{n-1})$ | | $H_*(U_1) \oplus H_*(\mathbb{RP}^{n-1})$ | $H_*(\mathbb{RP}^n)$ |
|---|---|---|---|---|
| $*=n$ | $0$ | | $0$ | ? |
| $*=n-1$ | $\mathbb{Z}$ | $\xrightarrow{i_{n-1}^*}$ | $0 \oplus \mathbb{Z}$ | ? |
| $1 \leq * \leq n-2$ | $0$ | | $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $*$ est impair<br>$0$ si $*$ est pair | $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $*$ est impair<br>$0$ si $*$ est pair |
| $*=0$ | $\mathbb{Z}$ | $\hookrightarrow$ | $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ | $\mathbb{Z}$ |

Comme $\forall z \in Z_{n-1}(S^{n-1}), i_{n-1}(z) = 2[z] \in Z_{n-1}(\mathbb{RP}^{n-1})$,

$i_{n-1}^*$ satisfait : $i_{n-1}^* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto 2n$.

Donc $H_n(\mathbb{RP}^n) = 0$, $H_{n-1}(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $n \geq 2$ pair.

Alors on a fini la démonstration. $\square$