Topologie algébrique

Cours sino-français Hefei, automne 2023

Devoir n°5 pour le 30 octobre

I

L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$, $n \geq 1$, est le quotient

$$\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}/\mathbb{C} - \{0\} \ .$$

On note $[z_0, \dots, z_n]$ la classe de $(z_0, \dots, z_n)$ dans $\mathbb{C}P^n$.

1. Démontrer que $\mathbb{C}P^n$ est une variété de dimension $2n$ compacte orientable.
2. Soit $Y_n = \{[z_0, \dots, z_n],\ [z_1] < |z_n|, \dots, |z_{n-1}| < |z_n]\}$.
   (a) Identifier le sous-espace Y_n.
   (b) Montrer que $X_n = \mathbb{C}P^n - Y_n$ se rétracte par déformation sur un sous-espace homéomorphe à $\mathbb{C}P^{n-1}$.
3. En procédant par récurrence, déterminer $H_*(\mathbb{C}P^n)$.

II

On appelle involution libre sur un espace topologique X, tout homéomorphisme $\tau : X \to X$, tel que $\tau \circ \tau$ est l'identité de X, et $\tau(x) \neq x$ pour tout x. Dans le cas où X est une variété orientée, une involution libre $\tau : X \to X$ est dite orientée si et seulement si τ est de degré local égal à 1 en tout point.

1. (a) Montrer que si $\tau : M \to M$ est une involution libre sur une variété M, alors le quotient $B = M/\tau$, obtenu en identifiant $\tau(x)$ à x pour tout x, est une variété.
   (b) Montrer que si $\tau : M \to M$ est une involution libre orientée sur une variété M orientée, alors le quotient $B = M/\tau$ est une variété orientée.
   (c) Montrer que si τ est une involution libre non orientée sur une variété connexe orientée M, alors l'application quotient $M \to B = M/\tau$ est équivalente au revêtement d'orientation de B.
2. Etudier l'antipodie de la sphère S^n. Dans quels cas l'espace projectif $\mathbb{R}P^n$ est-il orientable ?
3. Calculer l'homologie des espaces projectifs $\mathbb{R}P^n$.