Preuve de l'exactitude : chasse dans le diagramme dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_{n+1}(Y) \arrow[r] \arrow[d] & C_{n+1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & C_{n+1}(X,Y) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_n(Y) \arrow[r, "C_n(i)"] \arrow[d] & C_n(X) \arrow[r, "C_n(j)"] \arrow[d] & C_n(X,Y) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n-1}(Y) \arrow[r] & C_{n-1}(X) \arrow[r] & C_{n-1}(X,Y) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Les applications verticales sont les bords.
Les applications horizontales $C_n(i)$ sont données par

l'inclusion $i : Y \hookrightarrow X$.

Les applications horizontales $C_n(j)$ sont données par l'inclusion $j : (X, \emptyset) \longrightarrow (X, Y)$.

$C_n(j)$ est l'application quotient $C_n(X) \to C_n(X,Y)$

1. Définition du connectant ∂_n.

Pour un cycle relatif $z \in Z_n(X,Y)$, on choisit un représentant $\tilde{z} \in C_n(X)$, alors $\partial \tilde{z} \in C_{n-1}(Y)$, car sa classe dans $C_{n-1}(X,Y)$ est $\partial_n z = 0$.

On cherche à définir $d_n([z]) = [\partial \tilde{z}]$.

Avec le diagramme, on s'assure que :

a) $\partial \tilde{z} \in Z_n(Y)$: $\partial\partial \tilde{z} = 0 \in C_{n-1}(X)$

et $C(Y) \longrightarrow C(X)$ est injective.

b) $[\partial \tilde{z}]$ ne dépend pas du choix du représentant $\tilde{z}$:

si $C_n(j)(\tilde{z}) = C_n(j)(\tilde{\tilde{z}})$, alors $\tilde{\tilde{z}} - \tilde{z} \in C_n(Y)$

et $[\partial \tilde{z}] = [\partial \tilde{\tilde{z}}] \in H_{n-1}(Y)$

c) Pour $z' = z + \partial_{n+1} x$, $x \in C_{n+1}(X, Y)$ on obtient

la même classe : $\tilde{z}' = \tilde{z} + \partial_{n+1} \tilde{x}$, $\tilde{x} \in C_{n+1}(X)$

$\partial \tilde{z}' = \partial \tilde{z}$.

2. Exactitude en $C_n(X)$.

Il s'agit de montrer l'égalité de $i_*(H_n(Y))$ et $\mathrm{Ker}(j_*)$

L'inclusion $i_*(H_n(Y)) \subset \mathrm{Ker}(j_*)$ se déduit de

$$C_n(j) \circ C_n(i) = 0.$$

Pour $x = [z] \in H_n(X)$ tel que $j_*(x) = 0 \in H_n(X,Y)$

La chaîne z est un bord relatif :

$$\partial_{n+1}^{(X,Y)} u \equiv z \quad \text{modulo } Y \quad \text{pour une chaîne}$$

$$u \in C_{n+1}(X).$$

$$z = \partial u + y \qquad \text{où} \quad y \in C_n(Y)$$

En homologie $[\partial u] = 0$, et donc :

$$[z] = [y] \in H_n(Y)$$

3. Exactitude en $H_n(X, Y)$

4. Exactitude en $H_n(Y)$

Exercice : compléter