

I 1. a) $X - \{N\}$ se rétracte par déformation sur $X_- = X \cap (\mathbb{R}^2 \times]-\infty, 0])$.

Soit :

$$h : [0, 1] \times X - \{N\} \rightarrow X - \{N\}$$

$$(t, (x, y, z)) \mapsto (x, y, z) \text{ si } z \leq 0$$

$$(t, (x, y, z)) \mapsto (x_t, y_t, z_t) \text{ si } z > 0,$$

$$\text{avec pour } \begin{cases} x_t = \cos \varphi \sin \theta_t \\ y_t = \sin \varphi \sin \theta_t \\ z_t = \cos \theta_t \end{cases}, \quad \begin{cases} \theta_t = (1-t)\theta + t\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

h est continue; pour tout $t \in [0, 1]$ $h_t = h(t, \cdot)$ est l'identité sur X_- et $h_1(X) = X_-$.

Le sous-espace X_- , réunion de deux disques sur leur bord est homéomorphe à la sphère S^2 .

(Conclusion : $H_*(X - \{N\}) \simeq H_*(X_-) \simeq H_*(S^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & * = 0, 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$)

b) Par excision, $H_*(X, X - N)$ est isomorphe à

$H_*(S^2_{>0}, S^2_{>0} - \{N\}) \simeq H_*(D^2, D^2 - \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & * = 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

2. On utilise la suite exacte longue de la paire $(X, X - N)$:

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & H_*(X - \{N\}) & \rightarrow & H_*(X) & \rightarrow & H_*(X, X - \{N\}) & \rightarrow \\ * \geq 3 & 0 & & 0 & & 0 & \\ * = 2 & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & \\ * = 1 & 0 & & 0 & & 0 & \\ * = 0 & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z} & & 0 & \end{array}$$

On déduit les groupes $H_*(X)$:

$$H_2(X) = \mathbb{Z}^2,$$

$$H_*(X) = 0, \quad * = 1 \text{ ou } * > 2,$$

$$H_0(X) = \mathbb{Z} \quad (X \text{ est connexe par arcs}).$$

3. $X - \{A\}$ se rétracte par déformation sur $B = \{(-1, 0, 0)\}$.

On va appliquer la suite exacte longue de la paire :

$$\rightarrow H_*(X-A) \rightarrow H_*(X) \rightarrow H_*(X, X-A) \rightarrow$$

| | | | |
|------------|--------------|---------------------------------|----------------|
| $* \geq 3$ | 0 | 0 | 0 |
| $* = 2$ | 0 | \mathbb{Z}^2 | \mathbb{Z}^2 |
| $* = 1$ | 0 | 0 | 0 |
| $* = 0$ | \mathbb{Z} | $\xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ | 0 |

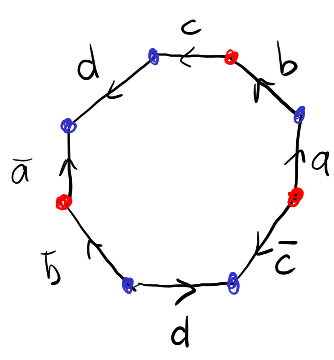
On conclut que $H_*(X, X-A)$ est concentré en degré 2 :

$$H_*(X, X-A) = H_2(X, X-A) \simeq \mathbb{Z}^2$$

4. Dans la question 3, on a calculé l'homologie locale en A , qui est \mathbb{Z}^2 en degré 2. Pour une variété de dimension n , on doit avoir \mathbb{Z} en degré n (ou 0 sur le bord). Donc X n'est pas une variété.

5. Par symétrie, les points du cercle S^1 , intersection de la sphère avec le disque, ont même homologie locale que A , et donc n'ont pas de voisinage euclidien. Tous les autres points sont intérieurs à un disque ouvert : ils ont un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^2 .

II 1.



Pour X_1 , l'identification donne 2 sommets dans le quotient :

$$\chi(X_1) = 2 - 4 + 1 = -1$$

Pour X_2 :

$$\chi(X_2) = 1 - 4 + 1 = -2$$

Les caractéristiques d'Euler étant

distinctes, les surfaces ne sont pas homéomorphes.

Ces deux surfaces sont non-orientables (no) et respectivement homéomorphes aux modèles P_3 et P_4 .

$$2. a) H_*(X_2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & * = 0 \\ \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & * = 1 \\ 0 & * \geq 2 \end{cases}$$

b) $H^*(X_2, \mathbb{Z})$ est obtenu avec les coefficients universels.

$$H^0(X_2, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_0(X_2), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

$$H^2(X_2, \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}(H_2(X_2), \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_1(X_2), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$$

$$H^1(X_2, \mathbb{Z}) = \text{Ext}(H_1(X_2), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Idem pour $H^*(X_2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

$$H^0(X_2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$H^1(X_2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_1(X_2), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(H_0(X_2), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$$

$$H^2(X_2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \text{Ext}(H_2(X_2), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

On a utilisé : $\text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ et $\text{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

3. a) La surface X_2 étant non orientable, son revêtement d'orientation est une surface orientable connexe \tilde{X}_2 . En utilisant le modèle associé à m_2 , on obtient un modèle dédoublé avec 4 sommets, 8 arêtes et 2 disques : $\chi(\tilde{X}_2) = -2 = 2 - 2g$
Donc $\tilde{X}_2 \simeq \Sigma_2$

b) Soit $p: X \rightarrow X_2$ un revêtement connexe à deux feuilles.

Comme précédemment $\chi(X) = -2$.

Si X est orientable, alors le revêtement p est équivalent au revêtement d'orientation (devoir 5, II.1.c).

Si p n'est pas le revêtement d'orientation, alors X est non orientable. Avec $\chi(X) = -2$ on déduit $X \simeq P_4 \simeq X_2$.

III On suppose X séparé.
 1a) L'application $p : X \rightarrow B$ est un revêtement double : chaque $b \in B$ a deux préimages \bar{b} et $\tau \bar{b}$ qui appartiennent à des ouverts homéomorphes disjoints.

Étant donné un simplexe singulier $\sigma : \Delta_n \rightarrow B$, le point $b_0 = \sigma(e_0)$, $e_0 = (1, 0, \dots, 0) \in \Delta_n$ a 2 préimages par p : \bar{b}_0 et $\tau(\bar{b}_0)$. Comme $\pi_2(\Delta_n, e_0)$ est trivial, il existe un relèvement $\tilde{\sigma}$ tel que : $\tilde{\sigma}(e_0) = \bar{b}_0$. Par unicité des relèvements, celui-ci est unique. De même $\tau \circ \tilde{\sigma}$ est l'unique relèvement pour lequel $e_0 \mapsto \tau(\bar{b}_0)$.

En conclusion on obtient exactement 2 relèvements.

b) L'homéomorphisme τ induit une action $C_*(\tau)$ sur les chaînes qui commute avec le bord : un morphisme de complexe de chaîne.

Pour un simplexe $\sigma : \Delta_n \rightarrow B$, un relèvement $\tilde{\sigma} : \Delta_n \rightarrow B$ a des faces $\tilde{\sigma} \circ F_i$ qui relèvent les faces de σ . On peut alors écrire pour

$$\begin{aligned} \langle \delta T^{n-1}(\frac{f}{b}), \sigma \rangle &= \langle T^{n-1}(\frac{f}{b}), \partial \sigma \rangle \\ &= \langle \frac{f}{b}, \partial \tilde{\sigma} + C_{n-2}(\tau)(\partial \tilde{\sigma}) \rangle \\ &= \langle \frac{f}{b}, \partial (\tilde{\sigma} + C_n(\tau)(\tilde{\sigma})) \rangle \\ &= \langle \delta \frac{f}{b}, \tilde{\sigma} + C_n(\tau)(\tilde{\sigma}) \rangle \\ &= \langle T^n(\delta \frac{f}{b}), \sigma \rangle \end{aligned}$$

Conclusion : T est un morphisme de complexe de cochaîne.

c) Le noyau de T^n est formé des n -cochaînes f telles que $\langle f, \tilde{\sigma} + \tau \circ \tilde{\sigma} \rangle = 0 \pmod{2}$ pour tout n -simplexe $\sigma : \Delta_n \rightarrow B$.

Ce sont les n -cochaînes qui factorisent par $C_n(B)$:

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ C_n(p) \downarrow & \nearrow & \\ C_n(B) & \xrightarrow{f} & \end{array}$$

On a identifié le noyau de T^n avec $C^n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Il reste à vérifier la surjectivité de T^n .

Comme $C_n(B)$ est un module libre, il existe une section

de $C_n(p) : \quad \sum C_n(B) \longrightarrow C_n(X), \quad \sigma \mapsto \tilde{\sigma}.$

On a alors une base de $C_n(X)$ avec les $\tilde{\sigma}$ et $\tau \tilde{\sigma}$.

Étant donné une cochaîne $g : C_n(B) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,

on définit \tilde{g} par $\begin{array}{l} \tilde{\sigma} \mapsto \langle g, \sigma \rangle \\ \tau \tilde{\sigma} \mapsto 0 \end{array}$.

Alors $T^n \tilde{g} = g$.

d) La suite exacte courte précédente est une suite exacte de complexes de cochaînes. Par la méthode standard, on déduit une suite exacte longue en cohomologie :

$$\rightarrow H^n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{p^*} H^n(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{T^*} H^n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} H^{n+1}(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow$$

Les deux premiers morphismes sont naturellement associés à la projection p et au transfert T . Le connectant β est un cobord obtenu en "chassant dans le diagramme".

Pour $g \in \mathbb{Z}^n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $\tilde{g} \in C^n(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ un relèvement
 $\beta[g]$ est représentée par $\delta\tilde{g} \in C^n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \text{ker}(T^n)$

2(a) Pour S^m avec $-\text{Id}$, $S^m/-\text{Id} = \mathbb{RP}^m$

Suite exacte :

$$H^n(\mathbb{RP}^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^n(S^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^n(\mathbb{RP}^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

$$n=0 \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim}$$

$$n=1 \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim}$$

:

$$n=m-2 \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim}$$

$$n=m \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Notons que cela calcule $H^*(\mathbb{RP}^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

b) Supposons que $f: S^m \rightarrow S^{m-2}$ est impaire,

alors elle induit $\tilde{f}: \mathbb{RP}^m \rightarrow \mathbb{RP}^{m-1}$

On utilise la functorialité de la suite exacte précédente. En degré 0 on a un isomorphisme

En degré 0 on a un isomorphisme

$$\tilde{f}^* H^0(\mathbb{RP}^{m-1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathbb{RP}^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

On utilisant le connectant, on déduit des isomorphismes

$$\tilde{f}^* H^k(\mathbb{RP}^{m-1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^k(\mathbb{RP}^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \quad 0 \leq k \leq m-1$$

Pour les lignes de degré $m-1$:

$$H^{m-1}(\mathbb{RP}^{m-1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{0} H^{m-1}(S^{m-2}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^{m-1}(\mathbb{RP}^{m-1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow$$

$$H^{m-1}(\mathbb{RP}^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{0} 0 \rightarrow H^{m-1}(\mathbb{RP}^{m-1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow$$

Le carré de droite donne une contradiction.

Conclusion : Il n'existe pas d'application continue
impair $f: S^m \rightarrow S^{m-2}$

3. Supposons que $g: S^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ est telle que

$\forall x \ g(x) \neq g(-x)$, alors

$$f(x) = \frac{g(x) - g(-x)}{\|g(x) - g(-x)\|} \quad \text{définit}$$

une application continue impaire $S^m \rightarrow S^{m-2}$,
ce qui est exclu.