Cours sino-français Hefei, automne 2023
Topologie algébrique - Examen du 20 novembre (durée 3 heures)

L'évaluation prend en compte la rédaction: on demande des solutions argumentées. Néanmoins, certaines questions peuvent avoir des réponses très courtes. Barême indicatif: 6+6+8.

I

Soit X le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ réunion de la sphère unité S^2 et du disque unité du premier plan de coordonnées: $D^2 \times \{0\}$.

1. Pour $N = (0, 0, 1)$.
   (a) Calculer l'homologie $H_*(X - \{N\})$.
   (b) Calculer l'homologie relative $H_*(X, X - \{N\})$.
2. Calculer l'homologie de X.
3. Pour $A = (1, 0, 0)$, calculer l'homologie $H_*(X, X - \{A\})$.
4. Est-ce que X est une variété topologique ?
5. Quel sont les points de X qui ont un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^2$?

II

On note X_1 et X_2 les surfaces obtenues comme quotient du disque avec les identifications associées aux mots $m_1 = a\,b\,c\,d\,\overline{a}\,\overline{b}\,d\,\overline{c}$ et $m_2 = a\,b\,c\,d\,\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,d$.

1. Démontrer que X_1 et X_2 ne sont pas homéomorphes.
2. (a) Décrire les groupes d'homologie $H_*(X_1)$.
   (b) Calculer les groupes de cohomologie $H^*(X_1, \mathbb{Z})$, $H^*(X_1, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
3. (a) Identifier le revêtement d'orientation de X_1.
   (b) Soit $p : X \to X_1$ un revêtement connexe à deux feuilles. Démontrer que si p n'est pas le revêtement d'orientation, alors X est homéomorphe à X_2.

III

séparé

On appelle involution libre sur un espace topologique séparé X, tout homéomorphisme $\tau : X \to X$, tel que $\tau \circ \tau$ est l'identité de X et $\tau(x) \neq x$ pour tout x.

1. Soit $\tau : X \to X$ une involution libre avec quotient associé $p : X \to B = X/\tau$.

   (a) Démontrer qu'un simplexe singulier $\sigma : \Delta_n \to B$ a exactement 2 relevés, $\tilde{\sigma}$ et $\tau \circ \tilde{\sigma}$,
   $$\tilde{\sigma} : \Delta_n \to X \ , \ p \circ \tilde{\sigma} = \sigma \ .$$
   On définit le transfert sur les cochaînes, $T^n : C^n(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to C^n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ par
   $$\langle T^n(f), \sigma \rangle = \langle f, \tilde{\sigma} + \tau \circ \tilde{\sigma} \rangle \ ,$$
   où $\tilde{\sigma}$ et $\tau \circ \tilde{\sigma}$ sont les deux relevés du simplexe singulier σ.

   (b) Montrer que T commute avec le cobord (est un morphisme de complexes de cochaînes).

   (c) Montrer qu'avec la projection et le transfert on obtient une suite exacte courte de complexes de cochaînes: pour chaque n on a une suite exacte
   $$0 \longrightarrow C^n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{C^n(p)} C^n(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{T^n} C^n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

   (d) Déduire une suite exacte longue en cohomologie à coefficients modulo 2. On précisera les homomorphismes qui apparaissent dans cette suite, en particulier le connectant noté β.

2. (a) Décrire la suite exacte longue de transfert de la question précédente dans le cas de l'involution $-\mathrm{Id}$ sur la sphère S^m, $m \geq 1$. On pourra d'abord expliciter les petites valeurs de m.

   (b) Démontrer que, pour $m \geq 1$, il n'existe pas d'application continue impaire
   $$f : S^m \to S^{m-1} \ , \ \forall x \ f(-x) = -f(x) \ .$$
   On pourra étudier l'action de l'application induite
   $$\overline{f} : \mathbb{R}P^m \to \mathbb{R}P^{m-1}$$
   sur la cohomologie modulo 2.

3. Démontrer que pour toute application continue $g : S^m \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, il existe $x \in S^m$ tel que $g(x) = g(-x)$ (théorème de Borsuk-Ulam) .