I 1. Soit $h : [0,1] \times C \longrightarrow C$

$$(t,(u,z)) \longmapsto h_t(u,z) = (u, tz)$$

h est continue

$h_0 = Id_C$

$h_1 : C \longrightarrow S^1 \times \{0\} = S^1$ est une rétraction : $\forall u \; h_1(u,0) = (u,0)$.

h est une homotopie entre Id_C et la rétraction h_1 :

on a obtenu une rétraction par déformation
$\boxed{h_1 : C \longrightarrow S^1}$, qui est donc une

équivalence d'homotopie.

2. $(x,y,z) \in C \cap S \iff \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ z = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$C \cap S$ est la réunion de deux cercles de rayon 1 situés respectivement dans les plans $z = -\sqrt{3}$ et $z = \sqrt{3}$.

3. On peut utiliser la suite exacte de Mayer-Vietoris:
Dans $C \cup S$, C et S ont des voisinages ouverts qui se rétractent par déformation. La suite exacte longue s'écrit:

$$\to H_*(C \cap S) \xrightarrow{(i_1)_* \oplus (i_2)_*} H_*(C) \oplus H_*(S) \xrightarrow{(j_1)_* - (j_2)_*} H_*(X) \to$$

$*$	$H_*(C\cap S)$	$H_*(C)$	$H_*(S)$	$H_*(X)$
$* \geq 3$	0	0		0
$* = 2$	0		$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^2$
$* = 1$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$		$\mathbb{Z}$
$* = 0$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$

$(x,y) \longmapsto x+y$

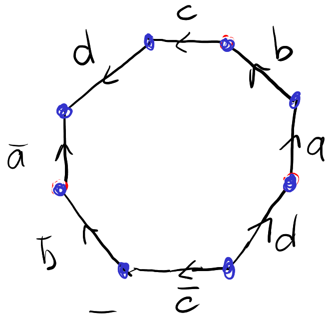
$x \longmapsto (x,x)$

$(x,y) \longmapsto x-y$

En utilisant les morphismes définis avec les inclusions
On obtient : $H_2(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Ker}((x,y) \mapsto x+y)$ et $H_1(X) = \mathbb{Z}$

$H_2(X) = \mathbb{Z}^2$

II 1.

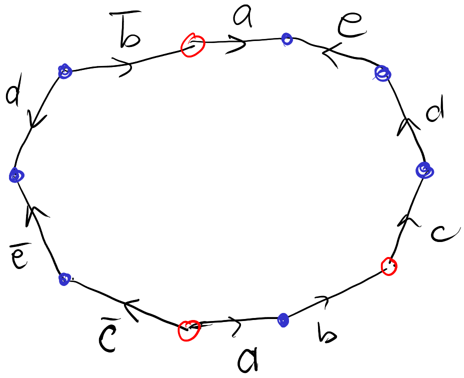


Pour X_1, l'identification donne 2 sommets dans le quotient :

$$\chi(X_1) = 1 - 4 + 1 = -2$$

Pour X_2 :

$$\chi(X_2) = 1 - 5 + 2 = -2$$



Les deux surfaces ont la même caractéristique d'Euler et sont non-orientables (no) : elles sont homéomorphes (modèle P_4)

2. a) $$H_*(X_1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & * = 0 \\ \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & * = 1 \\ 0 & * \geq 2. \end{cases}$$

b) $H^*(X_1, \mathbb{Z})$ est obtenu avec les coefficients universels.

$$H^0(X_1, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(H_0(X_1), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$
$$H^1(X_1, \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(H_1(X_1), \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(H_0(X_1), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^3$$
$$H^2(X_2, \mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}(H_1(X_1), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Idem pour $H^*(X_1, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

$$H^0(X_1, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
$$H^1(X_1, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(H_1(X_1), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}(H_0(X_1), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$$
$$H^2(X_1, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}(H_1(X_1), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

On a utilisé : $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ et $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

3. Si $\Sigma \longrightarrow X_1$ est un revêtement à deux feuilles, on a $\chi(\Sigma) = 2\chi(X_1) = -4$.

Le revêtement orientable de X_1 est donc la surface Σ_g avec $2-2g = -4$, soit $g = 3$.

Les revêtements pointés connexes à 2 feuilles sont en correspondance avec les sous-groupes d'indice 2 de $\pi_1(X_1, pt)$. Un tel sous-groupe définit un quotient isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'application quotient factorise par l'abélianisé : $\pi_1(X_1, pt)^{ab} = H_1(X_1)$

On déduit une bijection entre les revêtements étudiés et les homomorphismes surjectifs

$$H_1(X_1) = \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Il y a donc 7 revêtements dont un seul est orientable. Les autres sont homéomorphes à P_6.

III a) A est homéomorphe à la boule D^4 : c'est une variété de dimension 4 de bord $S^1\times D^2 \cup D^2\times S^1$ homéomorphe à la sphère S^3

b) On a une rétraction par déformation de (A, T) sur (D^2, S^1) définie par :

$$h : [0,1]\times A \longrightarrow A$$
$$(t, (u,v)) \longmapsto ((1-t)u, v).$$

$$\boxed{\text{On déduit } H_*(A,T) = H_*(D^2, S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } * = 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

$$\boxed{H_*(A, \partial A) = H_*(D^4, S^3) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } * = 4 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

2. a) On peut exciser $D^2_{1-\varepsilon}\times S^1 \subset A_1 = B_1$, $\varepsilon>0$

$H_*(P_k, B_1) \simeq H_*(P_k^\varepsilon, B_1^\varepsilon)$ où P_k^ε et A_1^ε sont les espaces obtenus après excision.

On a une rétraction par déformation de $(P_k^\varepsilon, B_1^\varepsilon)$ sur $(B_2, B_2\cap B_1) \simeq (A_2, T_2)$

Comme en question 1 : $H_*(A_2, T_2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & * = 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Conclusion $H_*(P_k, B_1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & * = 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

b) On utilise la suite exacte de la paire (P_k, B_1)

$$\to H_*(B_2) \longrightarrow H_*(P_k) \longrightarrow H_*(P_k, B_1) \to$$

$* \geq 3$	0		0	0
$* = 2$	0		$\mathbb{Z}$	$\xrightarrow{\sim}$ $\mathbb{Z}$
$* = 1$	0		0	0
$* = 0$	$\mathbb{Z}$	$\xrightarrow{\sim}$	$\mathbb{Z}$	0

Conclusion
$$\boxed{H_*(P_k) = \begin{cases} \mathbb{Z} & * = 0, 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

c) On procède comme en a) :
$$\boxed{H_*(P_k, M_k) = \begin{cases} \mathbb{Z} & * = 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

d) On a obtenu P_k en recollant les deux boules A_1 et A_2 sur une partie de leur bord. Le bord M_k du recollement est obtenu en prenant ce qui reste des bords : $\partial(T_1') \cup \partial(T_2') = T_1' \cup_{(f_k)_{|S^1 \times S^1}} T_2'$

On peut alors utiliser la suite exacte de Mayer-Vietoris.

$$\to H_*(S^1 \times S^1) \to H_*(T_1') \oplus H_*(T_2') \to H_*(M_k) \to$$

$* > 3$	0	0		0	0
$* = 3$	0	0		0	$\mathbb{Z}$
$* = 2$	$\mathbb{Z}$	0		0	$\ker$
$* = 1$	$\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{(i_1)_* \oplus (i_2)_*}$	$\mathbb{Z}$	$\oplus$	$\mathbb{Z}$	coker
$* = 0$	$\mathbb{Z} \longrightarrow$	$\mathbb{Z}$	$\oplus$	$\mathbb{Z} \longrightarrow$	$\mathbb{Z}$
	$x \longmapsto$	(x, y)			
		(x, y)	$\longmapsto$		$x - y$

$H_1(S^1 \times S^1)$ a pour base $m_1 = [S^1 \times 1]$ et $m_2 = [1 \times S^1]$
$H_1(T_1')$ et $H_1(T_2')$ ont pour base $(i_1)_*(m_2)$ et $(i_2)_*(m_1)$

Le morphisme $(i_1)_* \oplus (i_2)_*$ est donné par :

$$(x, y) \longmapsto (x, x).$$

Le noyau et le conoyau sont isomorphes à $\mathbb{Z}$.

Conclusion : $$\boxed{H_*(Mk) = \begin{cases} \mathbb{Z} & * = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$