Cours sino-français Hefei, automne 2023
Topologie algébrique - Seconde session (durée 3 heures)

L'évaluation prend en compte la rédaction: on demande des solutions argumentées. Barême indicatif: 6+6+8.

I

Soit $C = S^1 \times \mathbb{R}$ le cylindre dans $\mathbb{R}^3$ produit du cercle unité $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ avec $\mathbb{R}$.

1. Ecrire explicitement une rétraction par déformation de C sur $S^1 \times 0$. Déduire l'homologie de C.
2. Déterminer l'intersection de C avec la sphère S de rayon 2 centrée à l'origine de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit X la réunion du cylindre C avec la sphère S. Calculer $H_*(X)$.

II

On note X_1 et X_2 les surfaces obtenues comme quotient du disque avec les identifications associées aux mots $m_1 = a\,b\,c\,d\,\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,d$ et $m_2 = a\,b\,c\,d\,e\,\overline{a}\,\overline{b}\;d\,\overline{e}\,\overline{c}$.

1. Est-ce que X_1 et X_2 sont homéomorphes ?
2. (a) Décrire les groupes d'homologie $H_*(X_1)$.
   (b) Calculer les groupes de cohomologie $H^*(X_1, \mathbb{Z})$, $H^*(X_1, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
3. Pour quelles surfaces compactes connexes existe-t-il un revêtement à deux feuilles de base X_1?

III

1. On note $A = D^2 \times D^2$, $T = D^2 \times S^1$, $T' = S^1 \times D^2$.
   (a) Justifier pourquoi A est une variété à bord et préciser le bord.
   (b) Calculer les homologies $H_*(A, T)$ et $H_*(A, \partial A)$.
2. Soient A_1, A_2 deux copies de l'espace $D^2 \times D^2$. Pour $i \in \{1, 2\}$ on note $T_i \subset A_i$ le tore plein $D^2 \times S^1$ et $T'_i \subset A_i$ le tore plein $S^1 \times D^2$.

   Pour $k \in \mathbb{Z}$, on considère l'espace P_k obtenu en attachant A_2 à A_1 avec l'application:

$$f_k : \begin{array}{ccc} T_2 & \longrightarrow & A_1 \\ (\alpha, \beta) & \longmapsto & (\alpha\beta^k, \beta) \end{array}$$

   La projection canonique de $A_1 \amalg A_2$ sur P_k est notée p. On note B_i, $i \in \{1, 2\}$, le sous-espace $p(A_i)$.

   Calculer les homologies

   (a) $H_*(P_k, B_1)$,
   (b) $H_*(P_k)$,
   (c) $H_*(P_k, M_k)$,
   (d) $H_*(M_k)$.