Chapitre 9

Différentielles d'ordre supérieur

9.1 Espaces d'applications linéaires continues

Si E et F sont des espaces vectoriels normés (sur $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on rappelle que $\mathcal{L}(E, F)$ est l'espace des applications linéaires continues de E dans F. Cet espace est normé par $N(f) = \sup_{||x|| \leq 1} ||f(x)||$.

Remarque 9.1.1. Autres expression de la norme :

$$N(u) = \sup_{||x||=1} ||u(x)|| = sup_{x \neq 0_E} \frac{||u(x)||}{||x||} .$$

Si E_1, E_2 et F sont des espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ l'espace des applications bilinéaires continues de $E_1 \times E_2$ dans F.

Proposition 9.1.2. *L'espace $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ est normé par :*

$$N(v) = \sup_{\substack{||x_1|| \leq 1 \\ ||x_2|| \leq 1}} ||v(x_1, x_2)|| .$$

Pour $v \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$, on définit $\Phi(v) : E_1 \to \mathcal{L}(E_2, F)$, par : $\Phi(v)(x_1)(x_2) = v(x_1, x_2)$.

Proposition 9.1.3. *L'application Φ est un isomorphisme entre les espaces $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ et $\mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, F)$. De plus Φ respecte la norme : c'est une isométrie.*

9.2 Différentielles d'ordre deux

Soit $f : U \to F$ une application différentiable sur U, ouvert de E (E et F sont des espaces vectoriels normés).

On a donc une application $df : U \to \mathcal{L}(E,F)$. Si df est différentiable en a, alors : $d(df)_a$ appartient à $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F)$. Notons $\Psi : \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(E,E;F)$ l'isomorphisme réciproque de l'application Φ de la proposition 9.1.

Définition 9.2.1. On dit que f est deux fois différentiable en a si et seulement si df est différentiable en a. On appelle alors différentielle d'ordre 2 en a l'application :

$$d^2 f_a = \Psi(d(df)_a) \in \mathcal{L}(E,E;F) \ .$$

Théorème 9.2.2 (Schwarz)**.** *Si f est deux fois différentiable en a, alors l'application $d^2 f_a$ est symétrique :*

$$\forall (h,k) \in E^2 \ , \ d^2 f_a(k,h) = d^2 f_a(k,h) \ .$$

Remarque 9.2.3. On peut poursuivre et définir $d^n f_a \in \mathcal{L}^n(E;F)$ où, pour $n \geq 1$, $\mathcal{L}^n(E;F) \approx \mathcal{L}(E, \mathcal{L}^{n-1}(E,F)$ est l'espace des applications n-linéaires continues de E dans F.

Remarque 9.2.4. Le théorème sur les différentielles partielles permet aussi de traiter les différentielles d'ordre supérieur : si les $d_j d_i f_a$ existent et sont continues en a, alors f est deux fois différentiable en a.

9.3 Matrice hessienne

On traite ici le cas de $f : U \to \mathbb{K}$ avec U ouvert de $\mathbb{K}^n$. On suppose que f est différentiable sur U. On a alors l'application $df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) \approx \mathcal{L}(\mathbb{K},\mathbb{K})^n$ qui est définie par ses composantes $d_i f : U \to \mathcal{L}(\mathbb{K},\mathbb{K})$, et $df_i(h_i) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_a h_i$. La matrice jacobienne de df en a a pour coefficient les $\left(\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_j}\right)_a$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ notés : $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}\right)_a$.

Définition 9.3.1. On appelle matrice hessienne de f en a, la matrice des dérivées secondes :

$$H(f)_a = \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i} \right)_a \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \ .$$

C'est la matrice (dans la base canonique) de la différentielle d'ordre 2 : $d^2 f_a$.

Remarque 9.3.2. Lorsque f est deux fois différentiable en a, alors le théorème de Schwarz montre que cette matrice est symétrique.

9.4 Formule de Taylor-Young

Lemme 9.4.1. *Soit : $\phi : V \to F$ une application différentiable d'un voisinage de 0_E de l'espace vectoriel normé E vers l'espace vectoriel normé F. Si la norme $N(d\phi_h)$ est un $o(||h||^n$, $n \geq 0$, alors :*

$$||\phi(h) - \phi(0)|| = o(||h||^{n+1}) \ .$$

Théorème 9.4.2 (Taylor-Young). *Soit $f : U \to F$ une application deux fois différentiable en $a \in U$. On a :*

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}d^2 f_a(h,h) + o(||h||^2) \ .$$

Remarque 9.4.3. On se contentera dans ce cours d'un énoncé à l'ordre 2. On a bien sûr un énoncé identique à l'ordre n.

9.5 Points critiques, extrema simples

Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Ici U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 9.5.1. Un point $a \in U$ est critique si et seulement si la différentielle de f est nulle en a.

Définition 9.5.2. On dit que f a un maximum local en a (resp. un maximum local strict) si et seulement si s'il existe un voisinage W de a tel que :

$$\forall x \in W \ , \ f(x) \leq f(a) \text{ resp. } \forall x \in W - \{a\} \ , \ f(x) < f(a) \ .$$

On dit que f a un minimum local en a (resp. un minimum local strict) si et seulement si s'il existe un voisinage W de a tel que :

$$\forall x \in W \ , \ f(x) \geq f(a) \text{ resp. } \forall x \in W - \{a\} \ , \ f(x) > f(a) \ .$$

Proposition 9.5.3. *Si f est différentiable en a et admet un extremum (maximum ou minimum) local en a, alors a est un point critique.*

La condition n'est pas suffisante. La différentielle seconde va permettre de préciser. En effet, si f est deux fois différentiable en un point critique a, alors :

$$f(a+h) = f(a) + d^2 f_a(h,h) + o(||h||^2) \ .$$

Lemme 9.5.4. *Si f est deux fois différentiable en un point critique a, et $d^2 f(v,v) > 0$, alors pour $t \neq 0$ assez petit :*

$$f(a+tv) > f(a) \ .$$

Théorème 9.5.5. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application deux fois différentiable en un point critique a.*
a) Si la matrice hessienne $H(f)_a$ a toutes ses valeurs propres strictement positives ($d^2 f_a$ est définie positive), alors f a un maximum local strict en a.
b) Si la matrice hessienne $H(f)_a$ a toutes ses valeurs propres strictement négatives ($d^2 f_a$ est définie négative), alors f a un minimum local strict en a.
c) Si f a au moins une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative, alors f n'a pas d'extremum en a : a est un point selle.